Den stela kroppens mekanik

Definitioner

Def. En stel kropp är antingen

a/ ett system av n massor $\{m_i\}$ med konstanta avstånd

$$r_{ij} = |\bar{r}_i - \bar{r}_j| = c_{ij} = \text{konst.} \qquad \forall\, i,j = 1,\dots,n$$

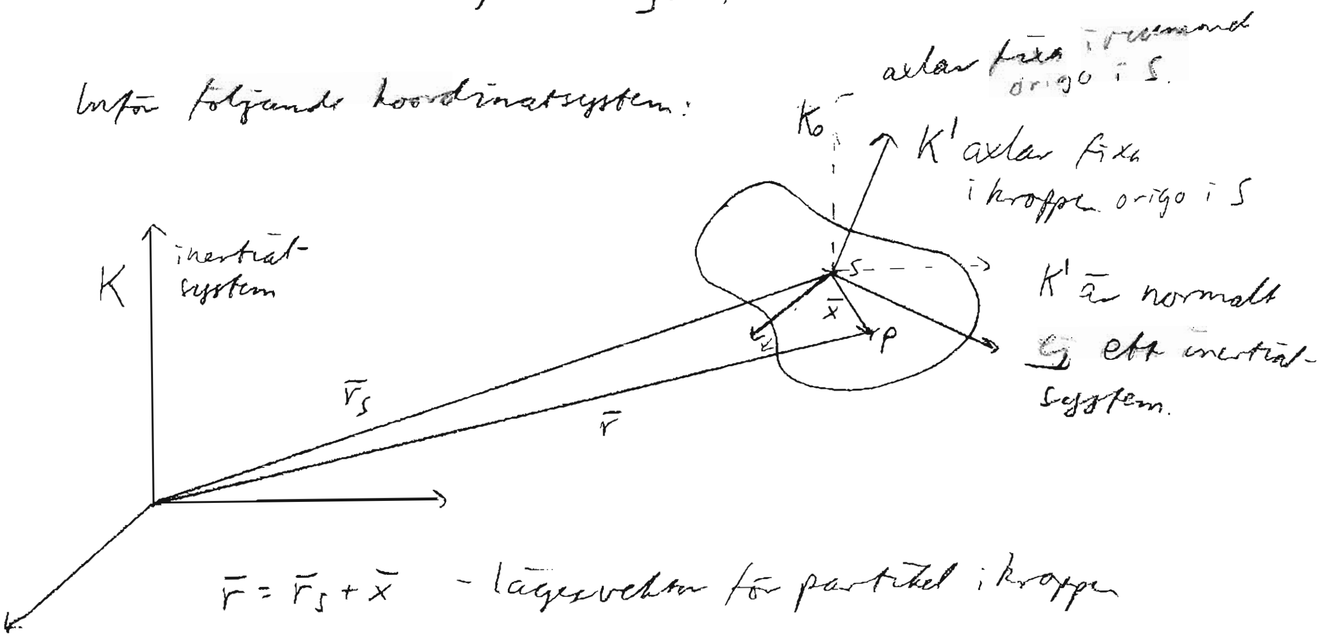
eller

b/ en kontinuerlig massfördelning $\rho(\bar{r})$ vars form inte ändras

Massan ges av a) $M = \sum_i m_i$

b) $M = \int \rho(\bar{r})\, d\bar{r}$

Inför följande koordinatsystem:



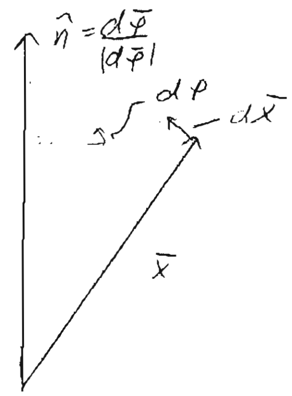
$\bar{r} = \bar{r}_s + \bar{x}$ – lägesvektor för partikel i kroppen

Anm: • En stel kropp har 6 frihetsgrader: läget för S och dess orientering.

• Normalt låter man S vara i masscentrum för kroppen

Infinitesimala rotationer

Om vi flyttar och roterar kroppen lite har vi skriva ändringen av $\bar{r}$ som



$$d\bar{r} = d\bar{r}_S + d\bar{\varphi} \times \bar{x}$$

där $d\bar{\varphi}$ gesar $d\varphi \cdot \hat{n}$ vilket är en rotation vinkeln $d\varphi$ runt $\hat{n}$-axeln ($\hat{n} = \frac{d\bar{\varphi}}{|d\bar{\varphi}|}$)

Vi har nu följande hastigheter

$$\begin{cases} \bar{V} = \frac{d\bar{r}_S}{dt} & \text{- referenspunkten S hastighet} \\ \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} & \text{- hastigheten för en punkt P i kroppen} \end{cases}$$

<u>Def</u>: Vinkelhastigheten

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \omega\hat{\omega}$$

Vi får nu att

$$\boxed{\bar{v} = \bar{V} + \bar{\omega} \times \bar{x}}$$

<u>Anm</u>: • $\bar{\omega}$ är entydig och beror ej av vårt val av S

• $\begin{cases} \bar{V} \text{ är translationshastighet} \\ \bar{\omega} \times \bar{x} \text{ är rotationshastighet} \end{cases}$ } uppdelningen beror på vårt val av S

Kinetisk energi och tröghetstensorn

$\boxed{\text{Låt nu och framöver } S \text{ vara i masscentrum.}}$

Den kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \bar{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \underbrace{(\bar{V} + \bar{\omega}\times\bar{x}_i)^2}_{\bar{V}^2 + 2\bar{V}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{x}_i) + (\bar{\omega}\times\bar{x}_i)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\sum_i m_i}_{M} \bar{V}^2 + \bar{V}\cdot\sum_i m_i(\bar{\omega}\times\bar{x}_i) + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\bar{\omega}\times\bar{x}_i)^2$$

Men

$$\bar{V}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{x}_i) = \bar{x}_i\cdot(\bar{V}\times\bar{\omega})$$

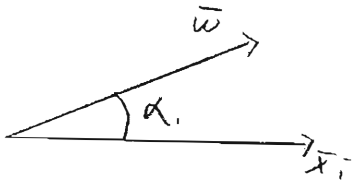
$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}M\bar{V}^2 + \underbrace{\left(\sum m_i\bar{x}_i\right)}_{\substack{MC\text{ läge i } K \\ =0}}\cdot(\bar{V}\times\bar{\omega}) + \frac{1}{2}\sum m_i(\bar{\omega}\times\bar{x}_i)^2$$

$$\Rightarrow T = \underbrace{\frac{1}{2}M\bar{V}^2}_{\text{translation}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i(\bar{\omega}\times\bar{x}_i)^2}_{\text{rotation} = T_{rot}} = \frac{1}{2}M\bar{V}^2 + T_{rot}$$

Studera nu T_{rot} närmare!

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\bar{\omega} \times \bar{x}_i)^2$$

Notera att



$$(\bar{\omega}\times\bar{x}_i)^2 = (\bar{\omega}^2)(\bar{x}_i^2)\sin^2\alpha_i =$$

$$= \bar{\omega}^2 \bar{x}_i^2(1-\cos^2\alpha_i) = \bar{\omega}^2\bar{x}_i^2 - \underbrace{\bar{\omega}^2\bar{x}_i^2\cos^2\alpha_i}_{(\bar{\omega}\cdot\bar{x}_i)^2} =$$

$$= \bar{\omega}\cdot\Big[\underbrace{\bar{x}_i\cdot\bar{x}_i}_{\text{vanlig skalärprodukt}} - \underbrace{\bar{x}_i\bar{x}_i}_{\text{Dyadisk produkt! En tensor!}}\Big]\cdot\bar{\omega}$$

Notera

$$(\bar{\omega}\cdot\bar{x})^2 = \sum_k \omega_k x_k \sum_l \omega_l x_l =$$

$$= \sum_{kl}\omega_k \underbrace{x_k x_l}_{\substack{kl\text{-komp}\\ \text{av tensorn}\\ \bar{x}\bar{x}}}\omega_l = \bar{\omega}\cdot\bar{x}\bar{x}\cdot\bar{\omega}$$

Vi kan nu skriva

$$\boxed{T_{rot} = \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\overset{\equiv}{I}\cdot\bar{\omega}}$$

där den s.k. tröghetstensorn ges av

$$\boxed{\overset{\equiv}{I} = \sum_i m_i(\bar{x}_i\cdot\bar{x}_i - \bar{x}_i\bar{x}_i)}$$

Obs! I bassystemet $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ kan $\overset{\equiv}{I}$ representeras av en matris

$$\overset{\equiv}{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{med} \quad I_{xy} = \hat{x}\cdot\overset{\equiv}{I}\cdot\hat{y} \quad \text{etc}$$

Notera att vi kan skriva

$$I_{kl} = \sum_i m_i\left((\bar{x}^{(i)}\cdot\bar{x}^{(i)})\delta_{kl} - x_k^{(i)}x_l^{(i)}\right)$$

Egenskaper hos tröghetstensorn

i) $\overset{\equiv}{I}$ är linjär, dvs $\overset{\equiv}{I} = \overset{\equiv}{I}_1 + \overset{\equiv}{I}_2$ om kropparna 1 & 2 med tröghetstensorer $\overset{\equiv}{I}_1$ och $\overset{\equiv}{I}_2$ sätts ihop

ii) Om $\overset{\equiv}{I}$ representeras av en matris är den symmetrisk. $I_{kl} = I_{lk}$

iii) Det går alltid att rotera K' till ett system så att $\overset{\equiv}{I}$ är diagonal.

$$\overset{\equiv}{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Axlarna i det nya koordinatsystemet kallas <u>principalaxlar</u>. I_i kallas <u>tröghetsmoment</u>. (moment of inertia)
Om kroppen har symmetrier är det lätt att hitta principalaxlarna.

iv) Om $\overset{\equiv}{I}$ räknas ut i K' fixt i kroppen är $\overset{\equiv}{I}$ en konstant tensor. Om $\overset{\equiv}{I}$ räknas ut i ett koordinatsystem som ej är fixt i kroppen är $\overset{\equiv}{I}$ normalt ej konstant.

<u>Steiners sats</u>

Om $\overset{\equiv}{I}$ är tröghetstensorn m.a.p masscentrum så ges tröghetstensorn m.a.p ett system med origo i $\bar{a}$ av

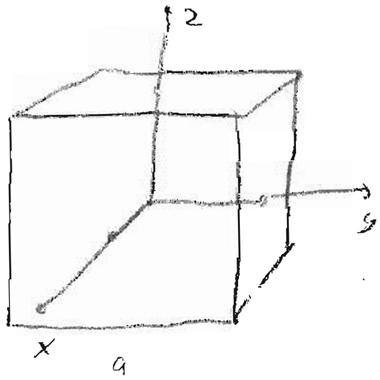
$$\overset{\equiv}{I}' = \overset{\equiv}{I} + M\left[a^2 \mathbb{1} - \bar{a}\bar{a}\right]$$

Visas enkelt!

Mer om tröghetstensorn

- Om vi har spegelsymmetri i ett plan ligger två principalaxlar (och S) i planet och en är vinkelrät mot planet
- Om vi har rotationssymmetri är symmetriaxeln en principalaxel och de andra två är vinkelräta mot den.

Ex1 Tröghetstensorn för en kub med sidan a



Pg.a symmetri är $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ principalaxlar

$$I_{zz} = \int d^3\bar{r}\, \underbrace{\rho(\bar{r})}_{\frac{M}{a^3}} \left(x^2+y^2+z^2-z^2\right) =$$

$$= \frac{M}{a^3} \iiint_{-a/2}^{a/2} dx\,dy\,dz\,(x^2+y^2) = \frac{M}{a^3} \underbrace{\int dz}_{a} \int dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} =$$

$$= \frac{M}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} dx \left[a x^2 + \frac{a^3}{12}\right] = \frac{M}{a^2} \left[a\frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{12}x\right]_{-a/2}^{a/2} =$$

$$= \frac{M}{a^2}\left[\frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{12}\right] = \frac{1}{6} M a^2$$

Anm Alla icke-diagonala element $= 0$.

$$I_{xy} = \int d^3\bar{r}\, \rho(\bar{r})(-xy) = 0$$

$\Rightarrow$ 0 pg.a symmetri

Rörelsemängdsmomentet

$$\bar{L} = \sum_i m_i (\bar{r}_i \times \dot{\bar{r}}_i) = \sum_i m_i (\bar{r}_s + \bar{x}_i) \times (\dot{\bar{r}}_s + \bar{\omega} \times \bar{x}_i) =$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i}_{M} (\bar{r}_s \times \dot{\bar{r}}_s) + \underbrace{\sum_i m_i \bar{r}_s \times (\bar{\omega} \times \bar{x}_i)}_{0 \text{ ty } S = MC} + \underbrace{\sum_i m_i \bar{x}_i}_{0 \text{ ty } S = MC} \times \dot{\bar{r}}_s +$$

$$+ \sum_i m_i \bar{x}_i \times (\bar{\omega} \times x_i) =$$

$$\Rightarrow \quad \bar{L} = \underbrace{\bar{r}_s \times M\dot{\bar{r}}_s}_{\text{rörelsemängdsmomentet för MC}} + \underbrace{\bar{L}_{rel}}_{\text{relativa rörelsemängdsmomentet}}$$

$$\bar{x}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{x}_i) = \bar{\omega}(\bar{x}_i \cdot \bar{x}_i) - \bar{x}_i(\bar{x}_i \cdot \bar{\omega})$$

$$\bar{L}_{rel} = \sum_i m_i \bar{x}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{x}_i) = \left\{ \begin{array}{l} \text{formel för} \\ \text{vektoriell} \\ \text{trippelprodukt} \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_i m_i (\bar{x}_i \cdot \bar{x}_i - \bar{x}_i \bar{x}_i) \cdot \bar{\omega} = \bar{\bar{I}} \cdot \bar{\omega}$$

Notera att

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \bar{\omega} = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{L}_{rel}$$

Eulervinklar

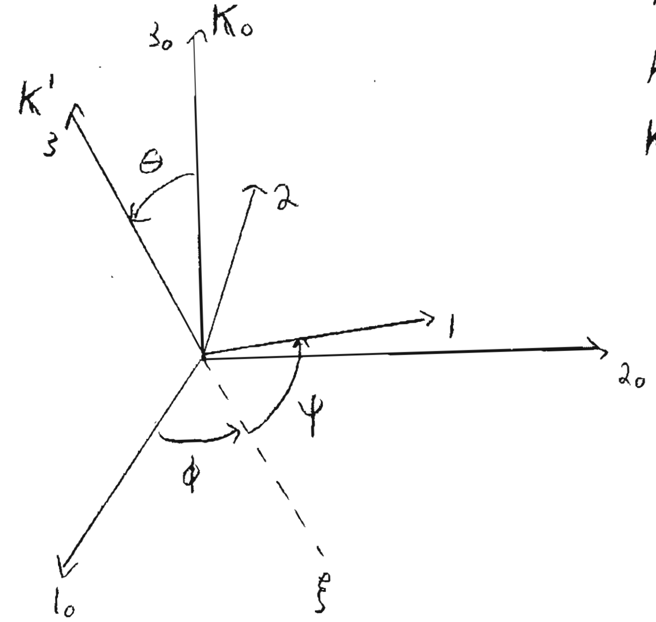
Vilka vinklar behövs för att beskriva kroppens orientering?

Eulervinklarna är ett sätt:

K' & K_0 med origo = S

K' fixt i kroppen

K^0 med axlar fixa i rummet.



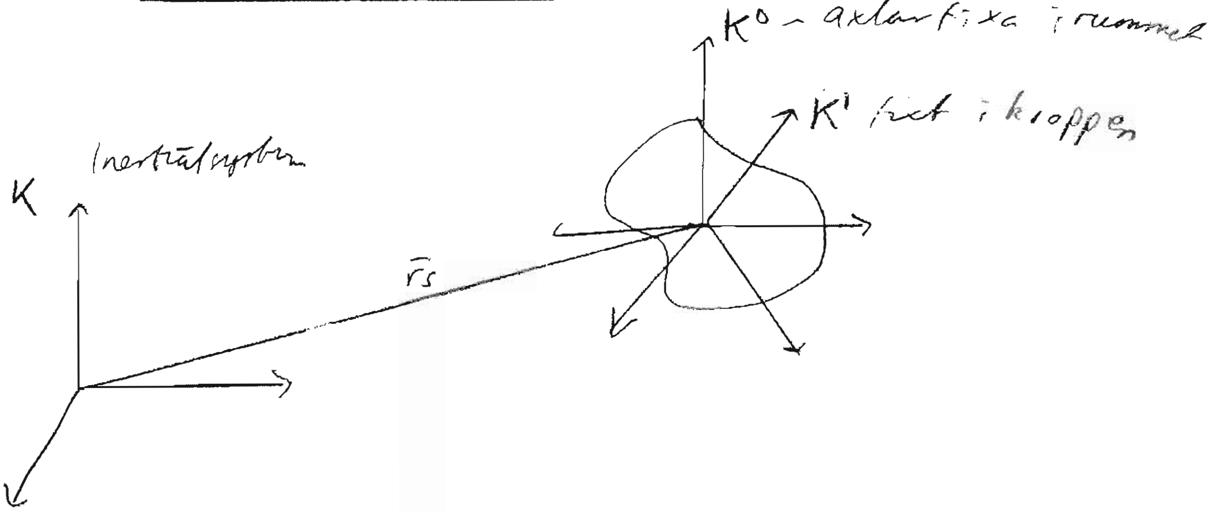
$$\mathbb{R}(t) = R_3(\psi)\,\mathbb{R}_\xi(\theta)\,\mathbb{R}_{3_0}(\phi)$$

$$\begin{cases} \mathbb{R}_{3_0}(\phi): & \text{rotera kring } 3_0\text{-axeln en vinkel } \phi \\ \mathbb{R}_\xi(\theta): & \text{rotera kring } \xi\text{-axeln (den roterade 1-axeln) en vinkel } \theta \\ \mathbb{R}_3(\psi): & \text{rotera kring 3-axeln en vinkel } \psi \end{cases}$$

$0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$

Anm:
- Det är viktigt att rotera i rätt ordning (rotationer runt olika axlar kommuterar ej)
- I kvantmekaniken vanligen tre andra vinklar (α, β, γ).

Rörelseekvationerna



För masscentrums rörelse gäller

om vi t.ex har ett homogent grav. potential

$$\frac{d}{dt}\bar{P} = \bar{F} = \sum_i \bar{F}_i = -\sum_i \nabla U_i(\bar{r}_i) = -\nabla U(\bar{r}_s)$$

Om $\bar{F}_i$ är potentialkrafter

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} M \dot{\bar{r}}_s^{\,2} + T_{rot} - U(\bar{r}_s)$$

Där vi t.ex kan välja

$$\begin{cases} \bar{r}_s = (x_s, y_s, z_s) & \text{– masscentrums läge} \\ (\phi, \theta, \psi) & \text{– Eulervinklarna} \end{cases}$$

som generaliserade koordinater

T_{rot} ges av

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\bar{\omega}$$

där $\bar{\omega}$ uttrycks m.h.a. $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$

Observera att i systemet K (inertialsystem) fås

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_i(t) \underbrace{I_{ij}(t)}_{} \omega_j(t)$$

Tidsberoende!

Om vi istället räknar ut T_{rot} i det roterande systemet $\bar{K}$ erhålles.

prim = i det roterande systemet

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_i'(t) \underbrace{I_{ij}}_{} \omega_j'(t)$$

Tids<u>o</u>beroende!

Spec. om K' är ett <u>principalsystem</u> (x-, y- och z-axlarna är principalaxlar).

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i} I_i \omega_i'^2(t)$$

med I_1, I_2, I_3 = tröghetsmomenten.

Vidare gäller momentlagen m.a.p. en fix punkt O eller masscentrum:

$$\bar{N}_0 = \dot{\bar{L}}_0$$

där

$$\bar{N}_0 = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i$$

är summan av alla yttre krafters moment.

För en godtycklig vektor $\bar{G}$ kan man visa att

$$\left[\frac{d}{dt}(\bar{G})\right]_{\text{inertialsystem}} = \left[\frac{d}{dt}(\bar{G})\right]_{\substack{\text{roterande}\\ \text{system}\\ \text{med vinkel-}\\ \text{hast. } \bar{\omega}}} + \bar{\omega} \times \bar{G}$$

Applicera på $\bar{L}_0 \Rightarrow$

$$\dot{\bar{L}}_0 = \underbrace{\left[\frac{d}{dt}(\bar{\bar{I}}_0 \cdot \bar{\omega})\right]_{\bar{K}}}_{\substack{\bar{\bar{I}}_0 \cdot \dot{\bar{\omega}} \\ \text{ty } \bar{\bar{I}}_0 \text{ tidsober.} \\ \text{i } \bar{K}}} + \bar{\omega} \times (\bar{\bar{I}}_0 \cdot \bar{\omega})$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\bar{L}}_0 = \bar{\bar{I}}_0 \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \bar{L}_0 = \bar{\bar{I}}_0 \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \bar{\bar{I}} \cdot \bar{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{N}_0 = \bar{\bar{I}}_0 \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \bar{\bar{I}}_0 \cdot \bar{\omega}}$$

$\bar{\bar{I}}_0$ & $\bar{\omega}$ i det roterande systemet.

Detta är

<u>Eulers dynamiska ekvationer.</u>

Om K' är ett <u>principalsystem</u> gäller att

$\bar{\bar{I}}$ är diagonal

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{N}_x = I_{xx}\dot{\omega}_x' + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y'\omega_z' \\ \bar{N}_y = I_{yy}\dot{\omega}_y' + (I_{xx} - I_{zz})\omega_z'\omega_x' \\ \bar{N}_z = I_{zz}\dot{\omega}_z' + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x'\omega_y' \end{cases} \qquad \begin{cases} I_{xx} = I_1 \\ I_{yy} = I_2 \\ I_{zz} = I_3 \end{cases}$$

— x —

Man kan visa (se boken) att

$$\begin{cases} \omega_1' = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\ \omega_2' = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ \omega_3' = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

Detta ger (fortfarande principalsystem)

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}I_2(-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2$$

Använd nu Lagrangianen för att ta fram Eulers ekvationer istället. Vi nöjer oss med att betrakta det kraftfria fallet, dvs. $U = 0$. Låt oss också välja ett inertialsystem K så att $\dot{\bar{r}}_c = 0$.