Hamilton - Jacobis ekvation

Hamiltons kanoniska ekvationer,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad ; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad k = 1, \dots, f$$

är speciellt enkla att lösa om alla q_k är cykliska. Ett tillfälle då detta inträffar är då $H \equiv 0$

$$H \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_k = 0 \\ \dot{p}_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_k = \beta_k = \text{konst} \\ p_k = \alpha_k = \text{konst.} \end{cases}$$

Kan vi hitta en sådan kanonisk transformation att $K = 0$?
Prova med en kanonisk transformation av typ B:

$$\{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)\} \longrightarrow \{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, K(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\}$$

$F_2 = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ - genererande funktion av typ B.

Variabelsambanden är

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j}$$

Ur de kanoniska ekvationerna följer

$$\begin{cases} \dot{Q}_k = \frac{\partial K}{\partial P_k} = 0 \\ \dot{P}_k = -\frac{\partial K}{\partial Q_k} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_k = \beta_k = \text{konst} \\ P_k = \alpha_k = \text{konst.} \end{cases}$$

Funktionen S kan alltså uppfattas som en lösning $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}, t)$ till <u>Hamilton-Jacobis ekvation</u>.

$$H\left(q_i, p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Partiell differentialekvation i $\underset{\sim}{q}$ och t.

S kallas <u>verkansfunktionen</u> (eller <u>Hamiltons principalfunktion</u>).

Om $S = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}, t)$ är en lösning sådan att

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_k \partial q_l}\right) \neq 0$$

kan man ur relationerna

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} = \beta_k$$

lösa ut

$$q_k = q_k(\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta}, t)$$

Därmed är rörelseproblemet löst och S sägs vara en <u>fullständig lösning</u>.

Exempel: Fri partikel i 1 dimension

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad , \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad , \quad H = \dot{q}p - L = \frac{p^2}{2m}$$

Hamilton-Jacobis ekvationen blir

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Den är separabel: $S = S_1(q) + S_2(t)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial q}\right)^2}_{\text{Konst} = E} + \underbrace{\frac{\partial S_2}{\partial t}}_{\text{Konst} = -E} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial q}\right)^2 = E \\ \frac{\partial S_2}{\partial t} = -E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = \pm\sqrt{2mE}\, q + \text{konst.} \\ S_2 = -Et + \text{konst.} \end{cases}$$

Def: $P = \pm\sqrt{2mE}$

Då blir

$$S(q, P, t) = Pq - \frac{P^2}{2m}t + C^{\text{konst.}}$$

Alltså gäller

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = P \quad ; \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P} = q - \frac{P}{m}t$$

Eftersom $K = 0$ gäller att Q & P är konstanter

Alltså erhåller vi

$$\begin{cases} q(t) = Q + \frac{P}{m}t \\ p(t) = P \end{cases} \quad \text{med } Q \,\&\, P \text{ konstanter.}$$

Om H ej beror explicit av tiden blir Hamilton - Jacobis ekvation

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Vi kan då göra separationsansatsen

$$S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}, t) = W(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}) - Et$$

som ger

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = E$$

Detta är Hamilton- Jacobis karakteristiska (eller tidsoberoende) ekvation

Funktionen $W = W(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha})$ kallas för <u>den reducerade verkansfunktionen</u> (eller <u>Hamiltons karakteristiska funktion</u>).

1) Känner vi $W = W(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha})$ kan vi sätta in den i

$$S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}, t) = W(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}) - Et$$

Obs! $E = E(\underset{\sim}{\alpha})$

Sedan kan $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}, t)$ användas för att generera en kanonisk transformation (med $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{\alpha}$) så att $K = 0$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad \underbrace{Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j}}_{\text{Lös ut } q_i = q_i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t)} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Sätt in

Därmed har vi

$$\begin{cases} q_i = q_i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) \\ p_i = p_i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) \end{cases} \qquad \begin{cases} P_j = \alpha_j = \text{konst} \\ Q_j = \beta_j = \text{konst} \end{cases} \quad \text{ty } \tilde{H} = 0$$

Rörelseproblemet har den allmänna lösningen

$$\begin{cases} q_i(t) = q_i(\underset{\sim}{\beta}, \underset{\sim}{\alpha}, t) \\ p_i(t) = p_i(\underset{\sim}{\beta}, \underset{\sim}{\alpha}, t) \end{cases}$$

$\underset{\sim}{\alpha}$ och $\underset{\sim}{\beta}$ bestäms av begynnelsevillkoren

2/ Vi kan även använda $W(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha})$ direkt som genererande funktion.

Som tidigare sätter vi

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{\alpha}$$

$W(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P})$ är av typ B och därmed gäller

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad ; \quad \underbrace{Q_j = \frac{\partial W}{\partial P_j}}_{\text{lös ut } \underset{\sim}{q}} \quad ; \quad K = H = E(\underset{\sim}{P})$$

Sätt in

$$\Rightarrow \begin{cases} q_i = q_i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}) \\ p_i = p_i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}) \end{cases} \qquad \text{inget explicit tidsberoende!}$$

Hamiltons ekvationer ger nu

$$\begin{cases} \dot{P}_j = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_j} = 0 \\ \dot{Q}_j = \dfrac{\partial K}{\partial P_j} = \dfrac{\partial E}{\partial P_j} = \dfrac{\partial E}{\partial \alpha_j} = \nu_j = \text{konst} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_j = \alpha_j = \text{konst} \\ Q_j = \nu_j t + \beta_j \end{cases}$$

Rörelseproblemet har alltså den allmänna lösningen

$$\begin{cases} q_i(t) = q_i(\underset{\sim}{v}t + \underset{\sim}{\beta}, \underset{\sim}{\alpha}) \\ p_i(t) = p_i(\underset{\sim}{v}t + \underset{\sim}{\beta}, \underset{\sim}{\alpha}) \end{cases} \qquad \text{med } v_j = \frac{\partial E}{\partial \alpha_j}$$

$\underset{\sim}{\alpha}$ och $\underset{\sim}{\beta}$ ges ur begynnelsevillkoren

Exempel: Harmonisk oscillator i 1 dimension

$$L = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 \quad ; \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

$$H = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$$

Inget tidsberoende $\Rightarrow$ Hamilton-Jacobis tidsoberoende ekvation för den reducerade verkansfunktionen:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 = E$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = 2m\left(E - \frac{1}{2} k q^2\right) = mk\Big(\underbrace{\frac{2E}{k}}_{a^2} - q^2\Big)$$

$$= mk\left(a^2 - q^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{mk}\sqrt{a^2 - q^2}$$

$$\Rightarrow W = \sqrt{mk}\int \sqrt{a^2 - q^2}\, dq$$

Metod 1 Bilda $S = W - Et$

Välj $P = \alpha = E$ (ett möjligt val)

$$S(q, P, t) = \sqrt{mk}\int \sqrt{\frac{2P}{k} - q^2}\, dq - Pt$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} p = \dfrac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{mk}\sqrt{\dfrac{2P}{k} - q^2} & (1) \\[2ex] Q = \dfrac{\partial S}{\partial P} = \sqrt{mk}\ \dfrac{2}{k}\ \dfrac{1}{2} \underbrace{\displaystyle\int \dfrac{dq}{\sqrt{\dfrac{2P}{k} - q^2}}}_{\arcsin\left(\dfrac{q}{\sqrt{\frac{2P}{k}}}\right)} - t & (2) \end{cases}$$

Ekv. (2) $\Rightarrow$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{k}}\ \sin(\omega(t+Q)) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ekv. (1) $\Rightarrow$

$$p = \sqrt{2Pm}\ \cos(\omega(t+Q))$$

Tillsammans med $K = H + \dfrac{\partial S}{\partial t}$ 0 är detta den kanoniska transformationen

Hamiltons ekvationer ger (med $K=0$)
$P = E = \text{konst}$ och $Q = \beta = \text{konst}$
Alltså erhålles rörelserna som

$$\begin{cases} q(t) = a \sin(\omega t + \theta_0) \\ p(t) = m\omega a \cos(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

med

$$\begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{2E}{m\omega^2}} \\[2ex] \theta_0 = \omega\beta \end{cases}$$

Metod II

Vi har

$$W = \sqrt{mk}\int\sqrt{a^2-q^2}\,dq \quad , \quad a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

Välj $P = \alpha = E$

$$\Rightarrow \quad W = \sqrt{mk}\int\sqrt{\frac{2P}{k} - q^2}\,dq$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} p = \dfrac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{mk}\,\sqrt{\dfrac{2P}{k} - q^2} \\ Q = \dfrac{\partial W}{\partial P} = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\arcsin\left(\dfrac{q}{\sqrt{\frac{2P}{k}}}\right) \end{cases}$$

Detta ger

$$\begin{cases} q = \sqrt{\dfrac{2P}{k}}\sin(\omega Q) \\ p = \sqrt{2Pm}\cos(\omega Q) \end{cases} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Hamiltons ekvationer ger (med $K = E = P$)

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad ; \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} P = \alpha \\ Q = t + \beta \end{cases} \quad \leftarrow \text{ ej konstant med metod II}$$

Rörelsen erhålles alltså som

$$\begin{cases} q(t) = a\sin(\omega t + \theta_0) \\ p(t) = m\omega a\cos(\omega t + \theta_0) \end{cases} \quad \text{med} \quad \begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{2E}{m\omega^2}} \\ \theta_0 = \omega\beta \end{cases}$$

Dvs samma rörelse som tidigare!

Anmärkning:

1) Notera att om $S = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}, t)$ så har vi

$$\frac{dS}{dt} = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{} \sum_{i=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_i}}_{p_i} \dot{q}_i = \left[-H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) + \sum_i p_i \dot{q}_i \right]_{\underset{\sim}{p} = \frac{\partial S}{\partial \underset{\sim}{q}}}$$

$$-H\left(q_i, p_i = \frac{\partial S}{\partial q_k}, t\right)$$

ty $K = 0$

Men $-H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) + \sum_i p_i \dot{q}_i = L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$. Integrera från t_0 till t

$$\Rightarrow \quad S(\underset{\sim}{q}(t), \underset{\sim}{\alpha}, t) = \int_{t_0}^{t} dt' \, L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t') \Big|_{\underset{\sim}{q}(t) \text{ lösn till rörelse-ekv}}$$

Detta är ju precis Hamiltons verkansintegral

$$I[\underset{\sim}{q}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(\underset{\sim}{q}(t), \dot{\underset{\sim}{q}}(t), t)$$

men med $\underset{\sim}{q}(t)$ som lösning till rörelseekvationerna insatt.

Med andra ord: Sätter vi in vår lösning $\underset{\sim}{q}(t)$ i verkansintegralen får vi den genererande funktion som "booster" systemet från t_0 till t

2) Låt $\bar{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$

$$\Rightarrow \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial r_i} \qquad \left(\dot{r}_i = \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial r_i} \right)$$

$\Rightarrow$ Rörelsen är vinkelrät mot $S = \text{konst}$

$\Rightarrow$ $S = \text{konst}$ kan tolkas som en vågfront i kvantmekaniken

Vinkel-verkansvariabler

Exempel: Harmonisk oscillator i en dimension. $L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$

Sedan tidigare har vi att

$$\begin{cases} q(t) = a\sin(\omega t + \theta_0) \\ p(t) = m\omega a\cos(\omega t + \theta_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ a = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \\ \theta_0 = \omega\beta \end{cases}$$

Fasrummet för harmoniska oscillatorn är 2-dimensionellt: (q, p)

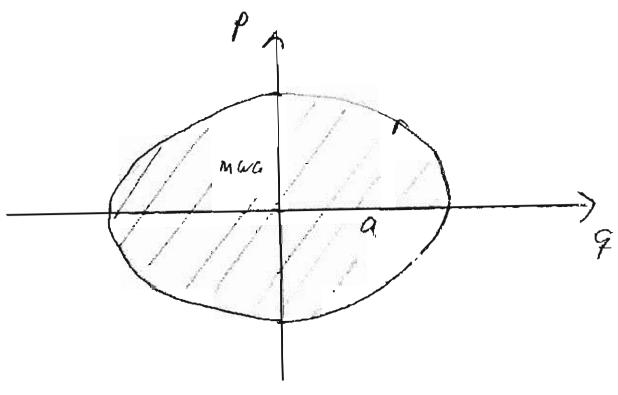
Systempunkten $(q(t), p(t))$ genomlöper en ellips

$$\left(\frac{q}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{m\omega a}\right)^2 = 1$$

Då $t \to t + \frac{2\pi}{\omega} = t + T = t + \frac{1}{\nu}$

vinkelfrekvens / period / frekvens

har vi löpt igenom ett varv



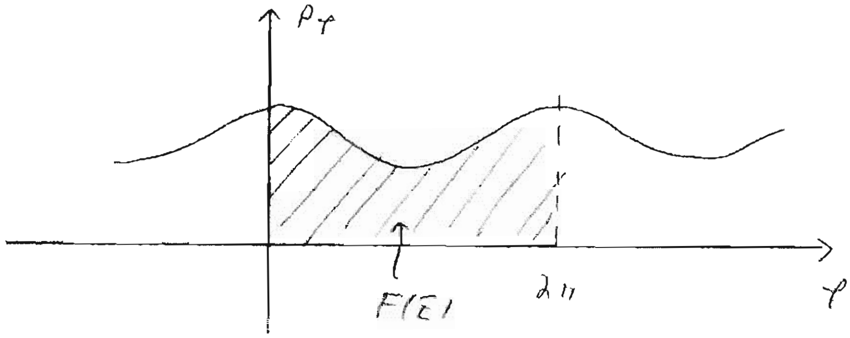
Ellipsens yta $= \pi a(m\omega a) = \pi m\omega a^2 = 2\pi \frac{E}{\omega} = F(E)$

Då gäller

$$\boxed{\frac{dF}{dE} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} = T = \text{perioden}}$$

Anm: Allmänt gäller för en periodisk rörelse att derivatan av ytan i fasrummet m.a.p. energin är lika med perioden T

I vissa fall blir den kurva som systempunkten genomlöper ej sluten.



Definieras $F(E)$ som i figuren gäller fortfarande att

$$\frac{dF(E)}{dE} = T = \text{perioden}$$

$$\boxed{\text{Ytan } F(E) \text{ kan skrivas} \quad F(E) = \oint p\,dq = \oint \frac{\partial S}{\partial q}\,dq \quad \text{eller } \frac{\partial W}{\partial q}}$$

För vår 1-dim harmoniska oscillator har vi sedan tidigare

$$W = \pm\sqrt{mk}\int\sqrt{\frac{2E}{k}-q^2}\,dq$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{mk}\sqrt{\frac{2E}{k}-q^2} \qquad a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$F(E) = \oint \pm\sqrt{mk}\sqrt{\frac{2E}{k}-q^2}\,dq = 2\int_{-a}^{a}\sqrt{mk}\sqrt{\frac{2E}{k}-q^2}\,dq = 2\int_{-a}^{a}\sqrt{mk}\sqrt{a^2-q^2}\,dq$$

$$= 2\sqrt{mk}\left[\frac{q}{2}\sqrt{a^2-q^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{q}{a}\right] = 2\sqrt{mk}\,\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{mk}\cdot a^2\cdot\pi = \sqrt{mk}\cdot\frac{2E}{k}\pi = 2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{dF}{dE} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} \quad \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{vår vinkelfrekvens!}$$

Tidigare valde vi den nya generaliserade impulsen $P = E$.

Låt oss istället välja

$$P = F(E) = \oint p\, dq \equiv J = \text{verkansvariabel}$$

Dessutom kallar vi Q för w = vinkelvariabel

Då gäller

ty $J = F(E) = \frac{2\pi}{\omega} E$

$$p = \frac{\partial S(q,J)}{\partial q} \quad ; \quad w = \frac{\partial S(q,J)}{\partial J} \quad ; \quad K = E(J) \overset{\checkmark}{=} \frac{\omega J}{2\pi}$$

Hamiltons ekvationer i vinkel-verkansvariablerna (w, J) blir

$$\begin{cases} \dot{J} = -\dfrac{\partial K}{\partial w} = 0 \quad \Rightarrow \quad J = \text{konst} \\ \dot{w} = \dfrac{\partial K}{\partial J} \quad \dfrac{\omega}{2\pi} = \text{frekvensen för den periodiska rörelsen!} \end{cases}$$

<u>Exempel</u>: 1-dim harmonisk oscillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$$

Hamiltons karakteristiska ekvation (ty inget explicit t-beroende)

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 = E$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial q} = \pm \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2} k q^2\right)} \qquad (= p)$$

<u>Def</u> $\quad P = J = \oint \frac{\partial S}{\partial q} dq = \ldots = \frac{2\pi E}{\sqrt{k/m}} \quad \Rightarrow \quad E = \sqrt{\frac{k}{m}}\, J / 2\pi$

Alltså gäller $K = H = E \quad \sqrt{\frac{k}{m}}\, J \frac{1}{2\pi}$

Hamiltons ekvationer:

$$\begin{cases} \dot{J} = -\dfrac{\partial K}{\partial w} = 0 \quad \Rightarrow \quad J = \text{konst} \\ \dot{w} = \dfrac{\partial K}{\partial J} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \dfrac{1}{2\pi} \leftarrow \text{vår frekvens } \nu = \dfrac{\omega}{2\pi} ! \end{cases}$$

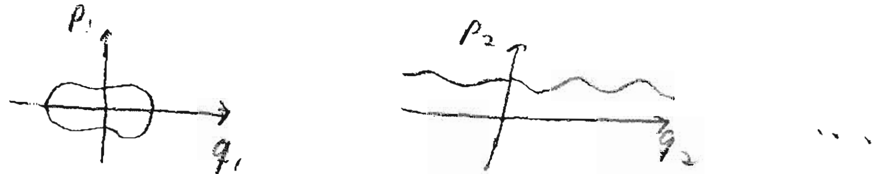
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

OBS! Den andra ekvationen ger vinkelfrekvensen för den periodiska rörelsen <u>utan att vi tagit fram var sig den kanoniska transformationen eller rörelsen explicit</u>!

Man kan visa att motsvarande gäller även mer komplicerade system, s.k. <u>separabla multipelperiodiska</u> system (t.ex. Keplerproblemet)

Antag att $S = \sum_i S_i(q_i, \alpha_i)$ (separabel)

Antag att rörelsen i varje (q_i, p_i) är periodisk, dock inte nödvändigtvis med samma period:



(multipelperiodisk)

<u>Def</u> $J_i = \oint \frac{\partial S_i}{\partial q_i} dq_i$

Gör en kanonisk transformation till (w_i, J_i)

Då gäller

$$\boxed{\frac{\partial K}{\partial J_i} = \frac{\omega_i}{2\pi}}$$

<u>Exempel Keplerproblemet</u>

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2} m v^2 - U(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{A}{r} \\ p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \\ H = \dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{A}{r} \end{cases}$$

Hamilton Jacobis tidsoberoende ekvation

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{A}{r} = E$$

Ansätt

$$S = S_1(r) + S_2(\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\left\{ \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 - \frac{A}{r} - E \right\} 2mr^2}_{\substack{\text{endast fkn av } r \\ = -\ell^2}} + \underbrace{\left(\frac{\partial S_2}{\partial \varphi}\right)^2}_{\substack{\text{endast fkn av } \varphi \\ = \ell^2}} = 0$$

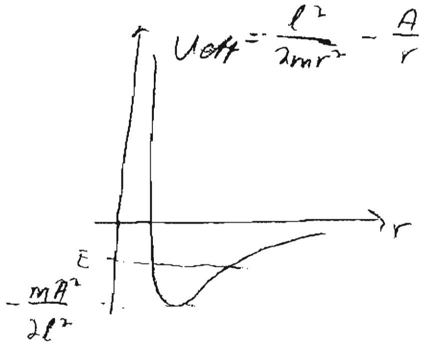
$\Rightarrow$ Båda termerna konstanter

Välj $\left(\frac{\partial S_2}{\partial \varphi}\right)^2 = \ell^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial S_1}{\partial r} = \sqrt{2m\left(E + \dfrac{A}{r} - \dfrac{\ell^2}{2mr^2}\right)} & (= p_r) \\ \dfrac{\partial S_2}{\partial \varphi} = \ell & (= p_\varphi) \end{cases}$$

Vi vill ha slutna banor $\Rightarrow$ 2 rötter till $p_r = 0$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad -\frac{mA^2}{2\ell^2} < E < 0$$



Def. Verkansvariabeln i r-led:

$$J_r = \oint p_r \, dr =$$

$$= \oint \sqrt{2m\left(E + \frac{A}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)} \, dr =$$

$$= \ldots = \left(-\ell + \frac{A}{2}\sqrt{\frac{2m}{-E}}\right) 2\pi$$

Not. Gränserna till integralen ges av $r = \frac{A}{-2E}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{mA^2}}\right)$

Fås genom att kontrollera när $\sqrt{\cdot} = 0$.

I (φ, p_φ) gäller att φ går från 0 till 2π och att vi kräver $l \neq 0$:

$$J_\varphi = \oint p_\varphi \, d\varphi = l \, 2\pi$$

Ur dessa uttryck för J_r och J_φ följer

$$K = E = -\frac{1}{4\pi} \frac{mA^2}{(J_r + J_\varphi)^2}$$

Vi får nu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K}{\partial J_r} = \dfrac{mA^2}{2\pi (I_r + I_\varphi)^3} = \dfrac{1}{\pi A}\sqrt{\dfrac{-2E^3}{m}} = \nu_r = \dfrac{\omega_r}{2\pi} \\[2ex] \dfrac{\partial K}{\partial J_\varphi} = \dfrac{mA^2}{2\pi (I_r + I_\varphi)^3} = \dfrac{1}{\pi A}\sqrt{\dfrac{-2E^3}{m}} = \nu_\varphi = \dfrac{\omega_\varphi}{2\pi} \end{cases}$$

$\omega_r = \omega_\varphi \Rightarrow$ enkelt periodisk rörelse

$\Rightarrow$ Sluten bankurva

Anm • $\omega_r \neq \omega_\varphi$ inträffar t.ex för andra $U(r)$

$\Rightarrow$ Bankurvan är inte nödvändigtvis sluten!

• Om vi sätter in $a = -\dfrac{A}{2E}$ - halva storaxeln får vi

$$T^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{4} A^2 \frac{m}{-2E^3} = \pi^2 A^2 \frac{m 8 a^3}{2A^3} = \frac{4\pi^2 m}{A} \cdot a^3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{A}{4\pi^2 m} \qquad \text{Keplers 3:e lag!}$$