Poissonparenteser

Def: Om u och v är två funktioner av de kanoniska variablerna $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p})$ så är deras **Poissonparentes** given av

$$[u, v]_{q,p} = \sum_i \left[\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right]$$

Från definitionen följer att

$$[q_k, q_l] = 0 \quad ; \quad [p_k, p_l] = 0 \qquad \forall \; k, l = 1, \ldots, f$$

$$[q_k, p_l] = \delta_{kl} = -[p_l, q_k]$$

Man kan också visa följande egenskaper

$$[u, u] = 0$$

$$[u, v] = -[v, u]$$

$$[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w] \qquad a, b \text{ - konstanter}$$

$$[uv, w] = u[v, w] + [u, w]v$$

Samt den något mer invecklade Jacobis identitet

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$$

Man kan också visa att Poissonparenteser är invarianta under kanoniska transformationer.

Från detta kan man visa följande teorem:

Teorem: Transformationen $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}) \to (\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P})$ är kanonisk om och endast om

$$[Q_i, Q_j] = 0$$
$$[P_i, P_j] = 0 \qquad \forall \; i,j = 1,\dots,f$$
$$[Q_i, P_j] = \delta_{ij}$$

Ex/
$$\begin{cases} Q = \sqrt{m\omega}\, q \\ P = \dfrac{1}{\sqrt{m\omega}}\, p \end{cases}$$

$$[Q, Q] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = 0$$

$$[P, P] = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 0$$

$$[Q, P] = \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial q}}_{\sqrt{m\omega}}\underbrace{\frac{\partial P}{\partial p}}_{\frac{1}{\sqrt{m\omega}}} - \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial p}}_{0}\underbrace{\frac{\partial P}{\partial q}}_{0} = 1$$

OK! Transformationen är kanonisk!

Ex/
$$\begin{cases} q = \sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}}\sin Q \\ p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q \end{cases}$$

$$[q, q] = [p, p] = 0$$

$$[q, p]_{Q,P} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\cos Q \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\cos Q$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2m\omega P}}\sin Q \cdot (-1)\sqrt{2m\omega P}\sin Q = \cos^2 Q + \sin^2 Q = 1$$

OK!

Rörelseekvationer och Poissonparenteser

Betrakta $u(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$ som är en funktion av de kanoniska variablerna $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p})$. Vi kan då skriva

$$\frac{du}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial u}{\partial q_i}\underbrace{\dot{q}_i}_{\frac{\partial H}{\partial p_i}} + \frac{\partial u}{\partial p_i}\underbrace{\dot{p}_i}_{-\frac{\partial H}{\partial q_i}}\right] + \frac{\partial u}{\partial t} =$$

$$= \underbrace{\sum_i \left[\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right]}_{[u, H]} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Dvs, tidsutvecklingen av u ges av

$$\frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (*)$$

Sätt $u = q_i$ och $u = p_i$ $\Rightarrow$

$$\dot{q}_i = [q_i, H] \quad ; \quad \dot{p}_i = [p_i, H]$$

dvs ett bekvämt sätt att uttrycka Hamiltons ekvationer. Ekv. (*) gäller dock allmänt och är ett mycket praktiskt sätt att undersöka om en funktion $u(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$ är en rörelsekonstant.

Exempel

Betrakta en Hamiltonian för ett system med två frihetsgrader

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 \qquad ; a_1, a_2 \text{ -konstanter}$$

Bestäm ett villkor på a_1 och a_2 så att $f(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}) = q_1 p_2 - q_2 p_1$

är en rörelsekonstant.

— × —

Detta kan göras med Poissonparenteser. f är en rörelsekonstant om

$$0 = \frac{df}{dt} = [f, H] + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{=0} = \left[q_1 p_2 - q_2 p_1, \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2\right] \quad (*)$$

Notera nu att alla Poissonparenteser är noll förutom

$$[q_i, p_j] = 1 \text{ om } i = j \qquad ; \qquad [p_i, q_j] = -1 \text{ om } i = j$$

Använd reglerna för Poissonparenteser och förenkla $(*)$:

$$0 = [f, H] = \left[q_1 p_2 - q_2 p_1, \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2\right] =$$

$$= \frac{p_2}{2m} \underbrace{[q_1, p_1^2]}_{p_1[q_1,p_1] + [q_1,p_1]p_1 = 2p_1} + q_1 a_2 \underbrace{[p_2, q_2^2]}_{-2q_2} - \frac{p_1}{2m} \underbrace{[q_2, p_2^2]}_{2p_2} - q_2 a_1 \underbrace{[p_1, q_1^2]}_{-2q_1} =$$

$$= \frac{p_2}{\cancel{2m}} \cancel{2} p_1 - 2 q_1 q_2 a_2 - \frac{p_1}{\cancel{2m}} \cancel{2} p_2 + 2 q_1 q_2 a_1 = 2 q_1 q_2 (a_1 - a_2)$$

Detta är noll (för godtyckliga q_1, q_2) då

$$a_1 = a_2$$

Anm: $a_1 = a_2$ ger en Hamiltonian (och Lagrangian) som är symmetrisk för rotationer kring z-axeln (om q_1 tolkas som x och q_2 som y). Då vet vi end. Noethers teorem att L_z är bevarad. Vårt f ovan är precis L_z.

Fasrummet

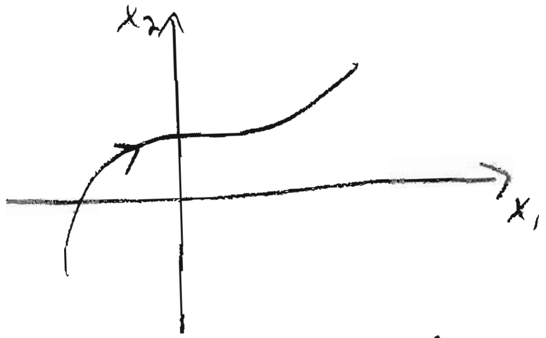
Def: Fasrummet $\mathbb{P}$ till ett kanoniskt system är rummet av punkter $\underset{\sim}{x} = \{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}\}$

Fasrummet har dimension $2f$.

Våra rörelseekvationer kan nu skrivas

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) \quad \text{där} \quad \underset{\sim}{F} = \left(\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right)$$

En lösning representerar en kurva i fasrummet



Denna representation kallas fasporträtt.

Exempel på endimensionell rörelse

1) Harmonisk oscillator. $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$

Vi har $\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = p \end{cases}$ $\quad F_1 = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m} p = \frac{1}{m} x_2$

$F_2 = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q = -m\omega^2 x_1$

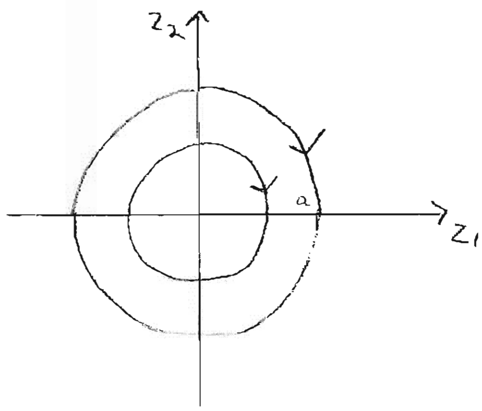
$\Rightarrow \quad \dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})$ dvs $\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{m} x_2 \\ \dot{x}_2 = -m\omega^2 x_1 \end{cases}$

Byt variabler: $\begin{cases} z_1(\tau) = \omega\sqrt{m}\, x_1(t) \\ z_2(\tau) = \frac{1}{\sqrt{m}}\, x_2(t) \\ \tau = \omega t \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dz_1}{d\tau} = z_2 \\ \frac{dz_2}{d\tau} = -z_1 \end{cases}$$

Lösning: $\begin{cases} z_1(\tau) = a \sin(\tau - \tau_0) \\ z_2(\tau) = a \cos(\tau - \tau_0) \end{cases}$ med $a = \sqrt{(z_1^0)^2 + (z_2^0)^2}$

$\Rightarrow$ Fasporträtten är cirklar med radien a



Cirkla med radie a

$z_1^2 + z_2^2 = a^2 = \text{konst}$

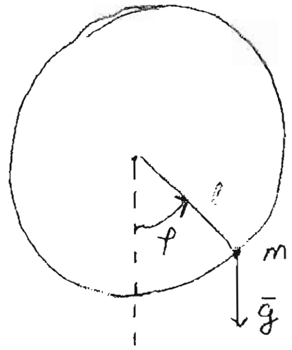
$\Rightarrow \omega^2 m x_1^2 + \frac{1}{m} x_2^2 =$

$= 2\left(U(q) + \frac{1}{2m} p^2\right) = 2E = \text{konst.}$

Not: $E = \text{konst}$ gäller allmänt om $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}, t) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})$,

dvs om vi har ett autonomt system.

a/ Plan matematisk pendel



Välj $q = l\varphi$ som gen. koord

$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + mgl \cos \frac{q}{l} \Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$

$\Rightarrow H = \dot{q}p - L = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} - mgl \cos \frac{q}{l} =$

$= \frac{p^2}{2m} - mgl \cos \frac{q}{l}$

Sätt $\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = p = m\dot{q} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} F_1 = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = \frac{x_2}{m} \\ F_2 = -\frac{\partial H}{\partial q} = -mg \sin \frac{q}{l} = -mg \sin \frac{x_1}{l} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{m} x_2 \\ \dot{x}_2 = -mg \sin \left(\frac{x_1}{l}\right) \end{cases}$

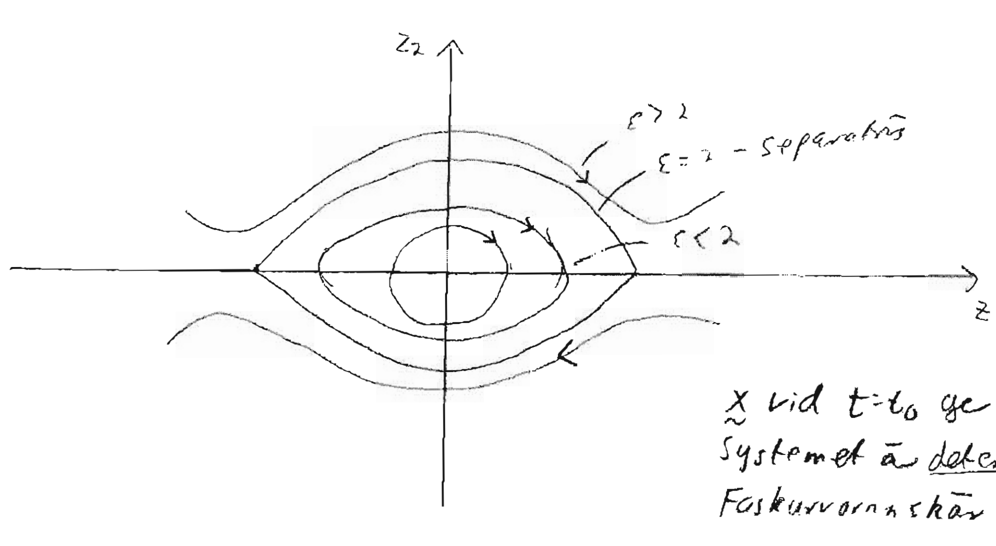
Def $\begin{cases} z_1 = \frac{x_1}{l} \\ z_2 = \frac{x_2}{m\sqrt{gl}} \\ \tau = \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dz_1}{d\tau} = z_2 \\ \frac{dz_2}{d\tau} = -\sin z_1 \end{cases}$

Def: $\varepsilon = \frac{1}{2} z_2^2 + 1 - \cos z_1 = \frac{E}{mgl} = \text{konst}$ (ty inget explicit tidsberoende i H.)

$\varepsilon \ll 1 \Rightarrow \sin z_1 \simeq z_1 \Rightarrow$ harmonisk oscillator

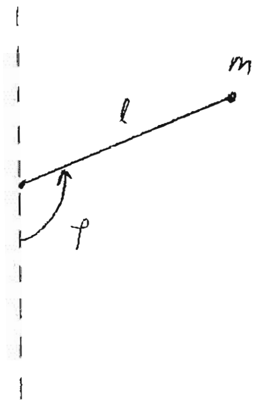
$0 < \varepsilon < 2 \Rightarrow$ ung oscillator

$\varepsilon > 2 \Rightarrow z_2^2 > 0 \ \forall t \Rightarrow$ svänger alltid åt samma håll (medurs eller moturs)



$\underset{\sim}{x}$ vid $t = t_0$ ger entydigt faspolitväg
Systemet är deterministiskt
Faskurvorna skär ej varandra.

Exempel: den plana pendeln i mer detalj



Max utslag $\varphi_0 < \pi$

$U(\varphi) = mgl(1-\cos\varphi)$

$E = T + U$

Vid φ_0 är $T = 0 \Rightarrow E = mgl(1-\cos\varphi_0)$

Vid allm φ är $E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1-\cos\varphi)$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

$$\Rightarrow dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$$

perioden ges av

$$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} \overset{\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{=} 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

Def

$$\sin\alpha = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \longrightarrow \alpha = 0 \\ \varphi = \varphi_0 \longrightarrow \alpha = \pi/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha\, d\alpha = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} \cdot \frac{1}{2} d\varphi$$

$$\Rightarrow d\varphi = 2\sin\frac{\varphi_0}{2} \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\alpha}} d\alpha$$

$$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\alpha}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, K\left[\sin\frac{\varphi_0}{2}\right]$$

$$K(z) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-z^2\sin^2\alpha}}$$

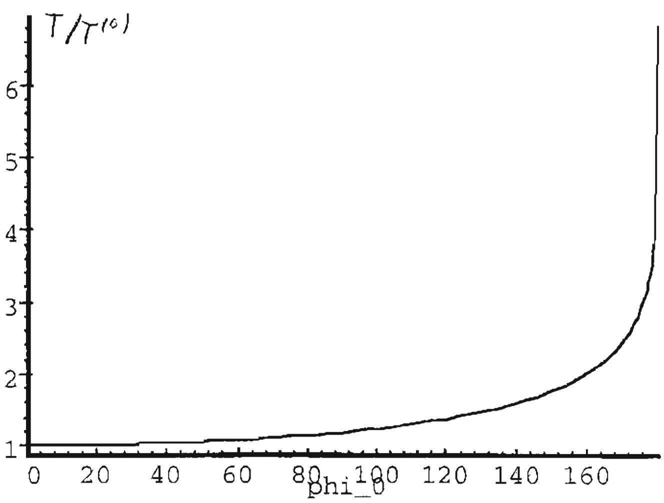
Fullständig elliptisk integral av första slaget.

Utveckla kring $z=0$

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2\sin^2\alpha}} \simeq 1 + \frac{1}{2} z^2 \sin^2\alpha + \frac{3}{8} z^4 \sin^4\alpha + \dots$$

$$\Rightarrow \quad T \simeq \underbrace{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}_{T^{(0)}} \left[1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \frac{11}{3072}\varphi_0^4 + \dots \right]$$

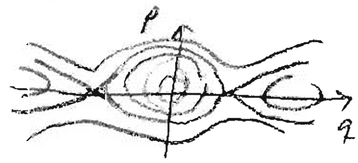
φ_0	$T/T^{(0)}$
$10°$	1,0019
$20°$	1,0077
$45°$	1,040
$90°$	1,18
$135°$	1,53
$175°$	2,88
$179°$	3,90
$179,9°$	5,37
$179,99°$	6,83



Obs! $\varphi_0 \to \pi \Rightarrow z \to 1 \Rightarrow K(z) \to \infty$

Det tar oändlig tid att nå det övre (instabila) jämviktsläget.

Dvs. även om separatrisen verkar ha faskurvor som skär varandra så gör de det p.g.a. att det tar så lång tid att nå dit

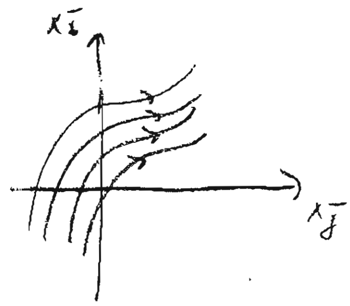


Liouvilles teorem

Def: Fasrummet $\mathbb{P}$ till ett kanoniskt system är rummet av punkter $\underset{\sim}{x} = \{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}\}$

Fasrummet har dimension $2f$.

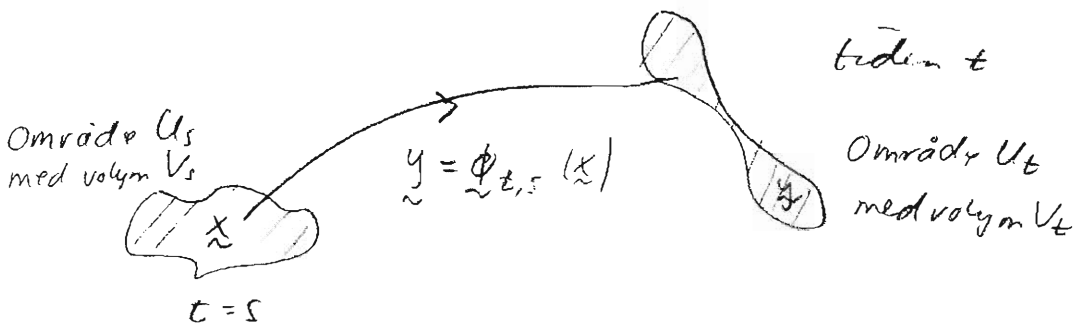
Om vi startar systemet vid tiden $t=s$ i en punkt $\underset{\sim}{x}$ kommer lösningen till Hamiltons ekvationer att representeras av en kurva i fasrummet:



Allmänt kallas lösningen

$$\underset{\sim}{\phi}_{t,s}(\underset{\sim}{x}) = (\varphi^1_{t,s}(\underset{\sim}{x}), \ldots, \varphi^{2f}_{t,s}(\underset{\sim}{x}))$$

ett <u>flöde</u> i fasrummet. Vi skall se att detta kan ses som rörelsen hos en inkompressibel vätska, dvs om vi har en <u>uppsättning av</u> begynnelsepunkter $\{\underset{\sim}{x}\}$ som fyller en volym vid $t=s$ kommer punkterna $\{\underset{\sim}{y}\}$ vid tiden t att fylla en lika stor volym (och med samma orientering)



<u>Liouvilles teorem</u>. $\boxed{V_s = V_t}$

<u>Bevis</u>:

Vi har att

$$V_s = \int_{U_s} d\underset{\sim}{x} \quad ; \quad V_t = \int_{U_t} d\underset{\sim}{y}$$

Utnyttja nu att $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{\phi}_{t,s}(\underset{\sim}{x})$ för att byta integrations variabel i det andra uttrycket.

$$V_t = \int_{U_t} d\underset{\sim}{y} = \int_{U_s} \underbrace{\det\left(\frac{\partial \underset{\sim}{\phi}}{\partial \underset{\sim}{x}}\right)} d\underset{\sim}{x}$$

Jacobianen för transformationen (flödet $\underset{\sim}{\phi}$)

Taylorutveckla nu $\underset{\sim}{\phi}(\underset{\sim}{x})$ i närheten av $t = s$.

$$\underset{\sim}{\phi}_{t,s}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{x} + \underbrace{\left.\frac{d\underset{\sim}{\phi}}{dt}\right|_{t=s}}_{\left\{\dot{\underset{\sim}{q}}(s),\, \dot{\underset{\sim}{p}}(s)\right\} = \left.\left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}},\, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right\}\right|_{t=s}} (t-s) + \ldots$$

$$= \underset{\sim}{x} + \left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}(s),\, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}(s)\right\}(t-s) + \ldots$$

Tag nu derivatan av ϕ_i m.a.p. x_k

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ x_i + \dot{x}_i (t-s) + \ldots \right\} =$$

$$= \delta_{ik} + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} + \ldots =$$

$$= \delta_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}} \right\}_i (t-s) + \ldots$$

Tag nu determinanten av $\frac{\partial \underset{\sim}{\phi}}{\partial \underset{\sim}{x}} = \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} \right\}$

vektoranalys

$$\det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}\right) = \det\left(\delta_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}} \right\}_i (t-s) + \ldots \right) =$$

$$= 1 + (t-s)\, Sp\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}} \right\}_i\right) + O((t-s)^2)$$

$$= 1 + (t-s) \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}} \right\}_i + O((t-s)^2)$$

$$= 1 + (t-s) \sum_{i=1}^{f} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{0} + O((t-s)^2) = 1 + O((t-s)^2)$$

Alltså gäller

$$\det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$V_t = \int_{U_s} \det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}\right) d\underset{\sim}{x} = \int_{U_s} d\underset{\sim}{x} = V_s$$

V.S.V.

<u>Not:</u> termen $O((t-s)^2)$ kan försummas ty

$$\frac{d\Delta V}{d\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{U_s} \left[\det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}\right) d\underset{\sim}{x} - 1\right] d\underset{\sim}{x} = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{U_s} O(\Delta t)\, d\underset{\sim}{x} = 0$$

Anm

Notera att vi kan betrakta $\left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right\}$ som ett "hastighetsfält":

$$\left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right\} = \left\{\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_f}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial q_f}\right\}$$

Men i härledningen ovan såg vi att

$$\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right\}_i = 0$$

Detta är ju inget annat än divergensen av hastighetsfältet.

$$\nabla \cdot \left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right\} = 0$$

Jämför med kontinuitetsekvationen:

$$\frac{d\rho}{dt} + \underbrace{\nabla \cdot \bar{v}}_{=0} = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Inkompressibelt flöde!

Ex/ Harmonisk oscillator

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = \frac{\omega}{2}\left\{\left(\frac{p}{\sqrt{m\omega}}\right)^2 + \left(\sqrt{m\omega}\, q\right)^2\right\}$$

Inför $\begin{cases} Q = \sqrt{m\omega}\, q \\ P = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\, p \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad K = H = \frac{\omega}{2}\left\{P^2 + Q^2\right\}$$

Detta är en kanonisk transformation. (visa!)

Hamiltons kanoniska ekvationer ger

$$\begin{cases} \dot{P} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q} = -\omega Q \\ \dot{Q} = \dfrac{\partial K}{\partial P} = \omega P \end{cases}$$

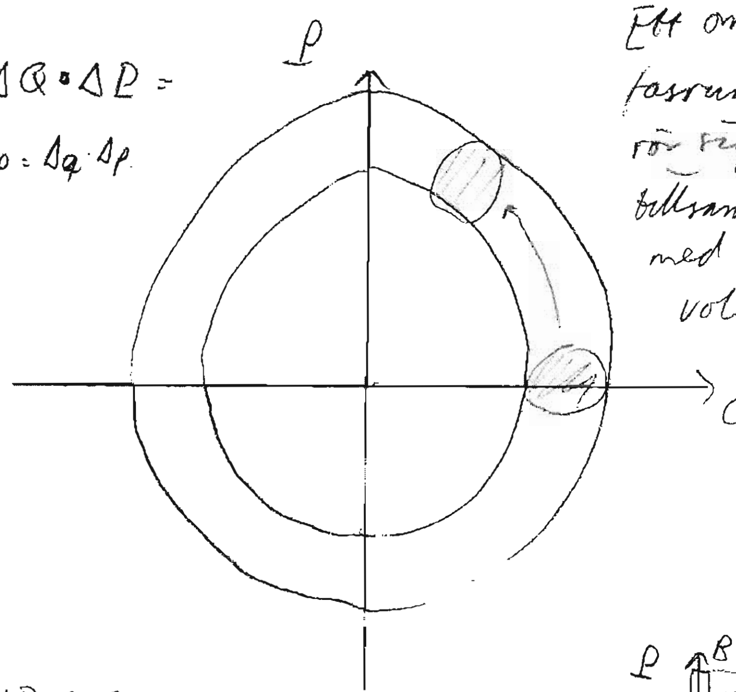
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\omega}\ddot{Q} = -\omega Q \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q} + \omega^2 Q = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} Q = \alpha \sin(\omega t + \beta) \\ P = \alpha \cos(\omega t + \beta) \end{cases}$$

I detta fall är $K = H = E = \frac{\omega}{2}\alpha^2 \quad \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2E}{\omega}}$

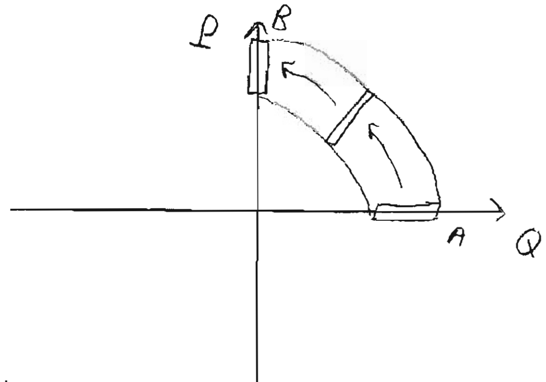
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} Q = \sqrt{\dfrac{2E}{\omega}} \sin(\omega t + \beta) \\ P = \sqrt{\dfrac{2E}{\omega}} \cos(\omega t + \beta) \end{cases}$$

Volymen: $V = \Delta Q \cdot \Delta P =$
$= \sqrt{m\omega}\, \Delta q \cdot \frac{1}{\sqrt{m\omega}} \Delta p = \Delta q \cdot \Delta p$



Ett område i fasrummet rör sig runt tillsammans med bibehållen volym

Ex: Starta med $\Delta P = \varepsilon \simeq 0$, $\Delta Q = a$
$V_A = \varepsilon a$



Vid B gäller

$$V_B = V_A = \underbrace{\varepsilon}_{\Delta Q}\underbrace{a}_{\Delta P}$$

"Spridningen" i Q har konverterats till "spridning" i P.