Kanoniska transformationer (kap. 9: Goldstein)

Anm. Att en generaliserad koordinat Q_k är cyklisk innebär (per definition) att den saknas i Lagrange-funktionen $L = L(\underset{\sim}{Q}, \dot{\underset{\sim}{Q}}, t)$. Men då saknas Q_k även i Hamiltonfunktionen $H = H(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t)$ ty H är legendretransformen av L map de generaliserade hastigheterna $\dot{\underset{\sim}{Q}}$ enbart, dvs $\underset{\sim}{Q}$ är variable som ej byts ut

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial Q_k} = -\frac{\partial L}{\partial Q_k} = 0 \qquad \text{för } Q_k \text{ cyklisk}$$

Vi kan alltså avgöra om Q_k är cyklisk genom att inspektera H.

Antag att Q_k är cyklisk. Enligt Hamiltons ekvationer gäller då

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k} = 0 \qquad \text{dvs} \quad P_k = \alpha_k = \text{konst}$$

Alltså kan H skrivas

$$H = H(Q_1, \ldots, Q_{k-1}, Q_{k+1}, P_1, \ldots, P_{k-1}, \alpha_k, P_{k+1}, \ldots, P_f, t)$$

Formellt har antalet frihetsgrader minskat från f till $f-1$, vilket gör ekvationerna lättare att lösa!

Antag att <u>alla</u> Q_k är cykliska. Då gäller

$$H = H(\underset{\sim}{P}, t) \quad \text{och}$$

$$\dot{P}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad P_i = \alpha_i = \text{konst} \qquad i = 1, \ldots, f$$

Dessutom blir

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} = v_i(t) = \text{fkn av } t \qquad i = 1, \ldots, f$$

dvs

$$Q_i = \int v_i(t)\, dt + \beta_i \qquad i = 1, \ldots, f$$

Systemets rörelse beskrivs alltså av funktionerna

$\{Q_i(t)\}$ med $\{\alpha_i, \beta_i\}$ som integrationskonstanter.

<u>Fråga</u> Kan man systematiskt hitta nya uppsättningar kanoniska variabler $\{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}\}$ så att alla variabler blir cykliska

<u>Svar</u> Använd <u>kanoniska transformationer</u>!

Def: En transformation

$$\begin{cases} \{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}\} \to \{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}\} \\ H(q,p,t) \to K(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) \end{cases}$$

kallas kanonisk om den bevarar strukturen på de kanoniska ekvationerna, dvs

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{Q}_i = \dfrac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_i} \end{cases}$$

Anm. Både variabler och Hamiltonfunktion transformeras!

Ett sätt att garantera detta är att kräva att variationsprincipen ($\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}$ oberoende)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) \right] dt = 0$$

skall gälla i de nya variablerna

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{f} P_i \dot{Q}_i - K(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) \right] dt = 0$$

(ty då följer Hamiltons kanoniska ekvationer)

Enklaste sättet att garantera att variationsprincipen gäller även i de nya variablerna är att kräva att

$$\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) = \sum_{j=1}^{f} P_j \dot{Q}_j - K(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) + \frac{d}{dt} F \qquad (*)$$

där

$$F = F(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t)$$

ty då gäller

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F \, dt = \delta \left[F \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

eftersom variationen är noll i ändpunkterna.

Anm: • F beror av gamla och nya variabler, men ej av tidsderivatorna av dessa dessa koordinater. F kan dock bero explicit av tiden.

• Om man uttrycker F som funktion av f gamla och f nya variabler fungerar F som en genererande funktion till den kanoniska transformationen.

• Vi kan identifiera fyra olika former av F

A/ Antag att

$$F = F(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t) = F_1(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$$

Då gäller

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{f} \left[\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right]$$

Insättning i (*) ger

$$\sum_{j=1}^{f} \left(p_j - \frac{\partial F_1}{\partial q_j}\right) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{f} \left(P_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j}\right) \dot{Q}_j + \left[H - K + \frac{\partial F_1}{\partial t}\right]$$

$\underset{\sim}{q}$ och $\underset{\sim}{Q}$ kan betraktas som oberoende variabler

$\Rightarrow$ De olika termerna måste vara 0 oberoende av varandra

$$\Rightarrow \begin{cases} p_j = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_j} & (a) \\ P_j = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_j} & (b) \\ K = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t} & (c) \end{cases}$$

Ur ekv. (a) löser vi ut

$$Q_i = Q_i(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) \qquad i = 1, \ldots, f$$

Detta är möjligt då $\det\left(\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j}\right) \neq 0$

Ur ekv. (b) löser vi ut P_i. Insättning av $Q_i(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$ ger

$$P_i = P_i(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$$

Detta är möjligt om $\det\left(\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial Q_i \partial Q_j}\right) \neq 0$

Alternativt kan vi ur ekv. (6) lösa ut

$$q_j = q_j(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t)$$

Detta insatt i ekv. (9) ger

$$p_i = p_i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t)$$

<u>Sammanfattning</u>

Funktionen

$$F_1 = F_1(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$$

genererar en kanonisk transformation genom sambanden

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

<u>Exempel</u>: Harmonisk oscillator

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

Prova den kanoniska transformationen som genereras av

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot Q$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q & (1) \\[2ex] P = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q} = \dfrac{1}{2} m\omega q^2 \dfrac{1}{\sin^2 Q} & (2) \end{cases}$$

Ekv. (2) ger

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

Insättning i ekv. (1) ger

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$$

Slutligen gäller

$$K = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q + 0 = \omega P$$

I de nya variablerna (Q, P) gäller de kanoniska ekvationerna

$$\begin{cases} \dot{P} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \alpha = \text{konst.} & (Q \text{ cyklisk}) \\ \dot{Q} = \dfrac{\partial K}{\partial P} = \omega \quad \Rightarrow \quad Q = \omega t + \beta \end{cases}$$

Lösningen blir alltså

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta)$$

Anm: Vi har transformerat oss till nya variabler där lösningen är trivial. Problemet är nu istället att hitta bästa transformationen.

B/ Antag att $F = F(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$

Eftersom

$$-P_j = \frac{\partial F_1}{\partial Q_j}$$

kan vi byta ut $\underset{\sim}{Q}$ mot $-\underset{\sim}{P}$ genom en Legendretransform av $F_1(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ m.a.p. $\underset{\sim}{Q}$:

$$(\mathcal{L}F_1)(\underset{\sim}{Q}) = \sum_k Q_k \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial Q_k}}_{-P_k} - F_1 = \mathcal{L}F_1(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$$

Obs! Skrivsättet

$$(\mathcal{L}F_1)(Q) = \underbrace{\mathcal{L}F_1(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)}$$

Legendretransformen av F_1 m.a.p. Q

Här är transformen som funktion av $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$.

Låt oss kalla transformationen $-F_2$:

$$F_2(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t) = \sum_k Q_k P_k + F_1$$

att uppfatta som funktion av $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$

Vi kan nu göra på två sätt

1) Sätt in F_2 i (*) och härled uttrycken för variabelsambanden som i A!

eller

2) Utnyttja egenskaperna hos Legendretransformer

Vi väljer alt. 2) : (Alt 1, se rel. uppgift 4.4)

Vi vet att

$$\frac{\overbrace{\partial(-F_2)}^{\text{transformer}}}{\underbrace{\partial(-P_k)}_{\text{nya variabel}}} = Q_k \quad - \text{ gamla variabel}$$

$$\frac{\partial(-F_2)}{\partial q_i} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \qquad (= -p_i \text{ enl. } (A))$$

variabel som ej ändras

$$\frac{\partial(-F_2)}{\partial t} = -\frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}}$$

Ur $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ kan vi lösa ut $\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{q}, p, t)$

Insättning i $Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}$ ger $\underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{q}, p, t)$

Exempel/ $\quad F_2(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}) = \sum_{i=1}^{f} q_i P_i$

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i \\ Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = q_k \\ K = H \end{cases}$$

Identitetstransformen!

c/ Antag $F = F(\underset{\sim}{Q}, p, t)$

Eftersom

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$$

kan vi byta ut $\underset{\sim}{q}$ mot p genom

$$(\mathcal{L}F_1)(\underset{\sim}{q}) = \sum_{i=1}^{f} q_i \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial q_i}}_{p_i} - F_1 = \underbrace{\mathcal{L}F_1(\underset{\sim}{Q}, p, t)}_{-F_3(\underset{\sim}{Q}, p, t)}$$

Enligt egenskaper hos Legendretransformen har vi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(-F_3)}{\partial p_k} = q_k \\ \dfrac{\partial(-F_3)}{\partial Q_k} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_k} - \quad P_k \\ \dfrac{\partial(-F_3)}{\partial t} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$$

Alltså gäller

$$\boxed{q_k = -\frac{\partial F_3}{\partial p_k} \quad ; \quad P_k = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_k} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}}$$

D) Antag att $F = F(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$

Eftersom

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$

kan vi byta $\underset{\sim}{q}$ mot $\underset{\sim}{p}$ genom en Legendretransform av F_2.
Vi kan också utgå från F_1 och göra en Legendretransform m.a.p både $\underset{\sim}{q}$ och $\underset{\sim}{Q}$. Välj det senare!

$$(\mathcal{L}F_1)(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}) = \sum_i q_i \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial q_i}}_{p_i} + \sum_j Q_j \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}}_{-P_j} - \quad = \underbrace{\mathcal{L}F_1(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)}_{-F_4(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)}$$

Egenskaper hos L-transformengen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(-F_4)}{\partial(-P_k)} = Q_k \\[2ex] \dfrac{\partial(-F_4)}{\partial p_k} = q_k \\[2ex] \dfrac{\partial(-F_4)}{\partial t} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$$

Alltså har vi

$$\boxed{q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial p_k} \quad ; \quad Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}}$$

Kanoniska transformationer (sammanfattning)

Typ A $\quad F_1 = F_1(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ - gen funktion

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Typ B $\quad F_2 = F_2(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ - gen funktion

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Typ C $\quad F_3 = F_3(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ - gen. funktion

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

Typ D $\quad F_4 = F_4(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$ - gen. funktion

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

Exempel på kanoniska transformationer

i/ Identitetstransformationen

$$\begin{cases} Q_i = q_i \\ P_i = p_i \end{cases}$$

Denna måste vara en kanonisk transformation, ty med $K(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) = H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$ gäller de kanoniska ekvationerna.

Finns det en genererande funktion för denna transformation?

Typ A: $F_1(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ — Går ej, ty $\underset{\sim}{q}$ och $\underset{\sim}{Q}$ kan inte väljas oberoende!

Typ B: $F_2(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ — Går bra, ty $\underset{\sim}{q}$ och $\underset{\sim}{P}$ kan väljas oberoende!

Typ C: $F_3(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ — Går bra, ty $\underset{\sim}{Q}$ och $\underset{\sim}{p}$ kan väljas oberoende!

Typ D: $F_4(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$ — Går ej, ty $\underset{\sim}{P}$ och $\underset{\sim}{p}$ kan inte väljas oberoende!

Alt: Se att $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \neq$ fkn. av P_i etc

Typ B

$$F_2 = \sum_{k=1}^{f} q_k P_k$$

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i \\ Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i \end{cases}$$

Typ C

$$F_3 = -\sum_{k=1}^{f} p_k Q_k$$

$$\begin{cases} q_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_i} = Q_i \\ P_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_i} = p_i \end{cases}$$

ii/ $\begin{cases} Q_i = p_i \\ P_i = -q_i \end{cases}$ kasta om q & p

Finns det en genererande funktion till denna transformation?

Typ A: $F_1(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ Går bra!

Typ B: $F_2(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ Går ej!

Typ C: $F_3(\underset{\sim}{Q}, p, t)$ Går ej!

Typ D: $F_4(\underset{\sim}{P}, p, t)$ Går bra!

Typ A

$$F_1 = \sum_{k=1}^{f} q_k Q_k$$

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i \\ P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i \end{cases}$$

Typ D

$$F_4 = \sum_{1}^{f} P_k p_k$$

$$\begin{cases} q_i = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_i} = -P_i \\ Q_i = \dfrac{\partial F_4}{\partial P_i} = p_i \end{cases}$$

Alltså är transformationen kanonisk!

(om K sätts till H såklart!)