Hamiltons ekvationer (kap 8 i Goldstein)

För ett system med n frihetsgrader ger Lagranges ekvation n st 2:a ordningens differentialekvationer för $q(t)$. Vi vet att ett sådant system alltid kan skrivas om som ett system av $2n$ st 1:a ordningens differentialekvationer genom att införa n nya variabler, t ex $y_k = \dot{q}_k$. Vi har dock redan infört sådana variabler,

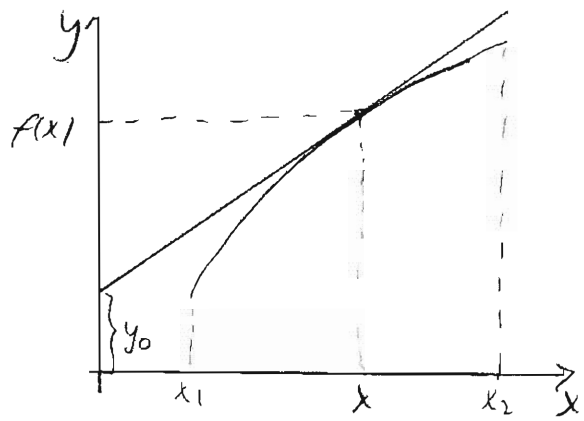
$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

dvs våra kanoniska rörelsemängder. Vi vill således byta variabler från $(q(t), \dot{q}(t))$ $(q(t), p(t))$ och söka de $2n$ ekvationer som ger $q(t), p(t)$.

Denna typ av transformation $(\dot{q}_k \to p_k)$ kallas för Legendretransformation. Låt oss studera dessa närmare.

Frågeställningen är: När kan vi transformera oss från $L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$ till $H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$ och hur ser rörelseekvationerna ut?

Legendretransformer



Allmänt

Betrakta kurvan

$$y = f(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$$

Vi kan skriva

$$y - y_0 = x \cdot \frac{df}{dx}(x)$$

Def en ny variabel

$$z = \frac{df}{dx} \quad \Rightarrow \quad x = x(z) \quad \text{genom inversion}$$

Uttryck $-y_0$ som funktion av z

$$-y_0 = xz - y = x(z) \cdot z - f(x(z))$$

Def: Legendretransformen $\mathcal{L}f$ av f ges av

$$\boxed{\mathcal{L}f(z) = x(z) \cdot z - f(x(z))}$$

Jfr. övn. 214!

Vi har med andra ord transformerat oss från en funktion av x till en ny funktion av z.

Notera

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}f(z) = \frac{d}{dz}\Big(x(z)\cdot z - f(x(z))\Big) =$$

$$= \frac{dx}{dz}\cdot z + x\cdot 1 - \underbrace{\frac{df}{dx}}_{z}\frac{dx}{dz} = x$$

$\Rightarrow$ Den gamla variabeln erhålles som derivatan av Legendretransforman m.a.p. den nya variabeln.

P.s.s. som den nya variabeln definierades som derivatan av f.

Ex/ $f(x) = \frac{1}{2}mx^2$

$$\Rightarrow z = \frac{df}{dx} = mx \Rightarrow x = \frac{z}{m}$$

$$\mathcal{L}f(z) = x(z)\cdot z - f(x(z)) = \frac{z}{m}\cdot z - \frac{1}{2}m\left(\frac{z}{m}\right)^2 = \frac{1}{2m}z^2$$

Obs. att $\frac{d\mathcal{L}f}{dz} = \frac{1}{m}z = x$!

Betrakta nu

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

$\dot{q}$ – gamla variabeln

Def. $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ – nya variabeln

$$\Rightarrow \mathcal{L}L = \dot{q}(p)\cdot p - L(q, \dot{q}(p), t) = \underbrace{H(q,p,t)}$$

$\dot{q}(p)$ – fkn. av p

Hamiltonfunktionen med kanoniska rörelsemängden som variabel!

Anm

Sätt $\phi(z) = \mathcal{L}f(z) = xz - f(x(z))$

Betrakta

$$\mathcal{L}\phi(x) = z \cdot \underbrace{\frac{d\phi}{dz}}_{x} - \phi(z(x)) = zx - xz + f = f$$

OK så länge alla delar uppför sig bra, speciellt då

$$x = \frac{d\phi}{dz} = \underbrace{\frac{dx}{dz}}_{\frac{1}{dz/dx} = \frac{1}{d^2f/dx^2}} \cdot z + x \cdot 1 - \frac{df}{dz} \qquad \text{är snäll}$$

← måste vara snäll.

$\Rightarrow \quad f \to \mathcal{L}f$ är entydig då $\dfrac{d^2f}{dx^2} \neq 0$

Detta är också kravet på f för att $x = x(z)$ ska finnas.

Legendretransformationen i fler variabler

Betrakta

$$F(x_1, .., x_m; u_1, ..., u_n) \qquad \text{med} \quad \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i}\right) \neq 0 \qquad (*)$$

Def.

$$y_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_1, .., x_m; u_1, .., u_m) \qquad k = 1, .., m$$

Vi har nu (pga (*))

$$x_i = \varphi_i(y_1, .., y_m; u_1, .. u_n) \qquad i = 1, .., m$$

Def. Legendretransformen av F är

$$G \equiv \mathcal{L}F = \sum_{k=1}^{m} y_k \varphi_k - F \qquad \text{med} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial y_h} = \varphi_h \\ \dfrac{\partial G}{\partial u_i} = -\dfrac{\partial F}{\partial u_i} \end{cases}$$

Betrakta nu

$$L = L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t) = L(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t)$$

Def: $p_k = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ $\qquad$ $\dot{q}_k$ - gamla variable
$\qquad$ p_k - nya variable

Antag att $\det\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_\ell}\right) \neq 0$ så att $\dot{\underset{\sim}{q}} = \dot{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$

Legendretransformationen av L m.a.p variablerna $\dot{\underset{\sim}{q}}$ är

$$\mathcal{L}\, L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) = H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) = \sum_{k=1}^{f} \underbrace{\dot{q}_k p_k - L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)}_{\text{fkn av } (\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)}$$

Beräkna differentialen av H på två sätt

$$\begin{cases} dH = \displaystyle\sum_{k=1}^{f} \left[\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k\right] + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ dH = \displaystyle\sum_{k=1}^{f} \Big[d\dot{q}_k p_k + \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} d\dot{q}_k\Big] - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \\ \dfrac{\partial H}{\partial q_k} = -\dfrac{\partial L}{\partial q_k} \\ \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} \end{cases}$$

Obs! Derivatorna i V.L. tas med $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$ som variable medan de i H.L tas med $(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$ som variable. Allt uöinytoja regler för Legendretransformen

Lagranges ekvationer ger nu

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt} p_k = \dot{p}_k \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Hamiltons kanoniska ekvationer}} \\[1em] \dfrac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad ; \quad \dfrac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \quad k = 1, \ldots, f \end{array}}$$

Not: f 2:a ordningens d.e $\rightarrow$ $2f$ 1:a ordningens d.e.

Exempel: Harmonisk oscillator

$$L = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2$$

$$\Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

$$H = \dot{q}p - L = \underbrace{\dot{q}}_{\frac{p}{m}} p - \frac{1}{2} m \underbrace{\dot{q}^2}_{\left(\frac{p}{m}\right)^2} + \frac{1}{2} k q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$$

Hamiltons ekv. ger

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad (1)$$

$$-\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} = kq \qquad (2)$$

(1) ger $\quad \ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} \overset{(2)}{=} -\frac{k}{m} q \qquad$ OK!

Kanoniska system

> Def: Ett mekaniskt system är kanoniskt om det kan beskrivas av en Hamiltonfunktion $H = H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$ så att Hamiltons ekvationer gäller.

När gäller detta? Jo, ett tillräckligt villkor är att systemet kan beskrivas av en Lagrangian och att

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l}\right) \neq 0$$

Exempel

i) partikel i centralkraftfält ($\Rightarrow$ plan rörelse)

$$L = T - U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = p_r \\ p_2 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = p_\varphi \end{cases}$$

Not: $\det\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) = \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{vmatrix} = m^2 r^2 \neq 0$ för $r \neq 0$

$$\Rightarrow H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}) = \dot{r}p_r + \dot{\varphi}p_\varphi - L =$$

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} - \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r^2\left(\frac{p_\varphi}{mr^2}\right)^2\right) + U(r) =$$

$$= \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{1}{2mr^2}p_\varphi^2 + U(r)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{1}{m}p_r \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{1}{mr^2}p_\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial r} = -\dfrac{1}{mr^3}p_\varphi^2 + \dfrac{\partial U}{\partial r} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

Hamiltons ekvationer $\dfrac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$, $\dfrac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$ ger

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m}p_r = \dot{r} \\ \dfrac{1}{mr^2}p_\varphi = \dot{\varphi} \\ -\dfrac{1}{mr^3}p_\varphi^2 + \dfrac{\partial U}{\partial r} = -\dot{p}_r \\ 0 = -\dot{p}_\varphi \end{cases}$$

φ cyklisk koordinat

$\Downarrow$

$p_\varphi = \text{konst} = l =$

rörelsemängdsmomentet bevaras!

ii/ Laddad partikel i elektromagnetiskt fält

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\bar{q}}^2 - e\phi(\bar{q},t) + \frac{e}{c}\dot{\bar{q}} \cdot \bar{A}(\bar{q},t)$$

$$\Rightarrow \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i + \frac{e}{c} A_i(\bar{q},t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{q}_i = \frac{1}{m} p_i - \frac{e}{mc} A_i(\bar{q},t)$$

sätt in $\dot{q}_i(p_i, q_i, t)$ i L

$$H = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i p_i - L = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{m} p_i - \frac{e}{mc} A_i\right) p_i - L = \ldots =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}\right)^2 + e\phi(\bar{q},t)$$

Notera att

$$m\dot{\bar{q}} = \bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}$$

är den kinetiska rörelsemängden medan $\bar{p}$ är den kanoniska rörelsemängden (kanoniskt konjugerad till $\bar{q}$).

Anm: Det är den kanoniska rörelsemängden $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ som ersätts med $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$ i kvantmekaniken!

Anm 2:
$$H = \frac{1}{2m}\bar{p}^2 - \underbrace{\frac{e}{mc}\bar{p}\cdot\bar{A}}_{\text{linjära Zeeman-effekten}} + \underbrace{\frac{e^2}{2mc^2}\bar{A}^2}_{\text{kvadratiska Zeeman-effekten}} + \underbrace{e\phi}_{\text{Stark-effekten}}$$

Variationsprincipen för Hamiltonfunktionen

Tidigare såg vi att

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)\, dt = 0$$

ger Lagranges ekvationer $\quad \dfrac{\delta L}{\delta q_k} = 0 .$

Bilda nu

$$F(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, \dot{\underset{\sim}{q}}, \dot{\underset{\sim}{p}}, t) = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$$

och studera variationsproblemet

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F\, dt = 0$$

med oberoende variation av $q(t)$ och $p(t)$ (med variation 0 i ändpunkterna). Då följer

$$\frac{\delta F}{\delta q_k} = 0 \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \\[2em] \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \end{array} \right.$$

$$\frac{\delta F}{\delta p_k} = 0 \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} = 0 \iff$$

Dvs vi får Hamiltons ekvationer.