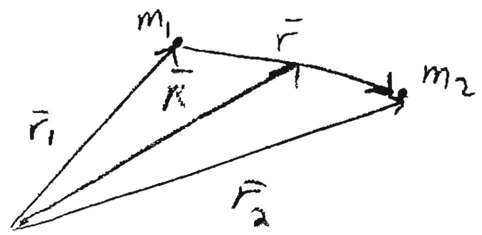
Centralkrafter och tvåkropparsproblemet

Betrakta två massor m_1 och m_2 med endast inre krafter.



Antag att potentialen U endast beror på $\bar{r}, \dot{\bar{r}}$, och ej på $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ direkt.

$$\Rightarrow \quad L = T - U = T(\dot{\bar{R}}, \dot{\bar{r}}) - U(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, \ldots)$$

Masscentrum ges av

$$\bar{R} = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Relativa koordinaten ges av

$$\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{r}_1 = \bar{R} + \bar{r}_1' \quad ; & \bar{r}_1' = -\dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \bar{r} \\ \bar{r}_2 = \bar{R} + \bar{r}_2' \quad ; & \bar{r}_2' = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} \bar{r} \end{cases}$$

Den kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\bar{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\bar{r}}_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left[\dot{\bar{R}}^2 + \dot{\bar{r}}_1'^2 + \cancel{2 \dot{\bar{R}} \cdot \dot{\bar{r}}_1'} \right] + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{\bar{R}}^2 + \dot{\bar{r}}_2'^2 + \cancel{2 \dot{\bar{R}} \cdot \dot{\bar{r}}_2'} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\bar{r}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\bar{r}}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 \cancel{(m_2 + m_1)}}{(m_1 + m_2)^{\cancel{2}}} \dot{\bar{r}}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\bar{r}}^2$$

Def: Reducerade massan ges av

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu \dot{\bar{r}}^2$$

Lagrangianen ges nu av ($\bar{R}$ och $\bar{r}$ är våra gen. koordinater)

$$L(\bar{R}, \dot{\bar{R}}, \bar{r}, \dot{\bar{r}}) = T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu \dot{\bar{r}}^2 - U(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, \ldots) \quad (1)$$

$\bar{R}$ är cyklisk $\Rightarrow$ rörelseekvationen för $\bar{R}$ är trivial:

$$\frac{d}{dt}\left((m_1 + m_2)\dot{\bar{R}}\right) = 0$$

Stryk första termen i (1) och koncentrera oss på den relativa rörelsen

$$\Rightarrow L(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2}\mu \dot{\bar{r}}^2 - U(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, \ldots) \quad (2)$$

Vi har således reducerat problemet till ett enkroppsproblem för en partikel med massan μ i potentialen U

Betrakta nu centralkrafter där

$$U(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, \ldots) = V(r)$$

$$\Rightarrow \bar{F}(\bar{r}) = -\nabla V(r) = -\frac{dV}{dr}\nabla r = -\frac{dV}{dr}\underbrace{\frac{\bar{r}}{r}}_{\hat{r}} = f(r)\hat{r}$$

dvs kraften beror av $r = |\bar{r}|$ enbart och ej av $\bar{r}$.

L.E. ger oss nu

$$\frac{d}{dt}(\mu \dot{r}_i) + \frac{\partial V}{\partial r_i} = 0$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{\bar{r}} = -\bar{\nabla} V \quad = \bar{F}(r) = f(r)\,\hat{r} = f(r)\frac{\bar{r}}{r}$$

Rörelsemängdsmomentet ges av

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \mu \bar{r} \times \dot{\bar{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{L}}{dt} = \mu(\underbrace{\dot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}}}_{0 \text{ ty } \dot{\bar{r}} \parallel \dot{\bar{r}}}) + \mu(\underbrace{\bar{r} \times \ddot{\bar{r}}}_{0 \text{ ty } \ddot{\bar{r}} = \frac{f(r)}{\mu r}\bar{r} \parallel \bar{r}}) = 0$$

$\bar{L}$ är en konstant vektor (till storlek och riktning)

Både $\bar{r}$ och $\dot{\bar{r}}$ $\perp$ $\bar{L}$ $\Rightarrow$ Rörelsen sker i ett plan!

Orientera vårt koordinatsystem så att detta plan är i xy-planet med origo i kraftcentrum. Rörelseekvationen för polarvinkeln är trivial ($\varphi = \pi/2 =$ konst). Välj planpolära koordinater för de resterande två frihetsgraderna.

(r, θ) - våra gen. koordinater

Lagrangianen (2) kan nu skrivas

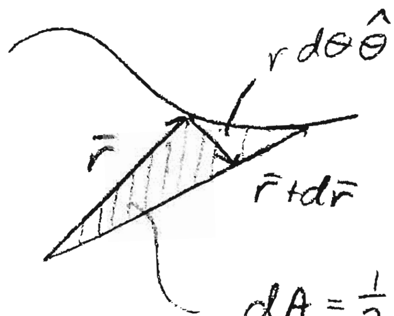
$$L = T - V = L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \qquad (3)$$

Notera att θ är cyklisk

$$\Rightarrow \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = l = \text{konst.} \qquad (4)$$

OBS! l är beloppet av rörelsemängdsmomentet, $l = |\bar{L}|$

Anm



$$dA = \frac{1}{2} r\, r\, d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{2\mu} = \text{konst.}$$

Keplers andra lag

Ortsvektorn från solen till en planet sveper över lika stora areor på lika långa tider.

Gäller allmänt för centralpotential, ej bara för grav. pot.

Den resterade rörelseekvationen (för r) fås ur (3) med L.E.

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r}$$

$$\text{L.E.} \Rightarrow \mu \ddot{r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

Sätt in ekv. (4) $\Rightarrow$

$$\mu \ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \qquad (5)$$

Enligt tidigare skrev vi $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ $\quad (\bar{F} = f(r)\hat{r})$

$$\Rightarrow \mu \ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} + f(r) \qquad (6)$$

Ekv. (6) kan förenklas ytterligare genom att multiplicera med $\dot{r}$ och integrera. Alternativt kan vi utgå från totala energin

$$E = T + V = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$

E är bevarad, ty vi har inga yttre krafter.

Ekv. (4) ger

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{\mu r^2} + V(r) \quad = \text{konst.}$$

Lös ut $\dot{r}$

$$\dot{r} = (\pm)\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)} \tag{7}$$

Vi kan betrakta

$$V'(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} \tag{8}$$

som en effektiv potential och vi har reducerat problemet till ett endimensionellt problem med rörelse i pot. V'.

Ekv. (7) kan formellt integreras då den är separabel:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V'(r))}}$$

$$\Rightarrow \quad t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V'(r))}} \qquad \text{ger } r(t)$$

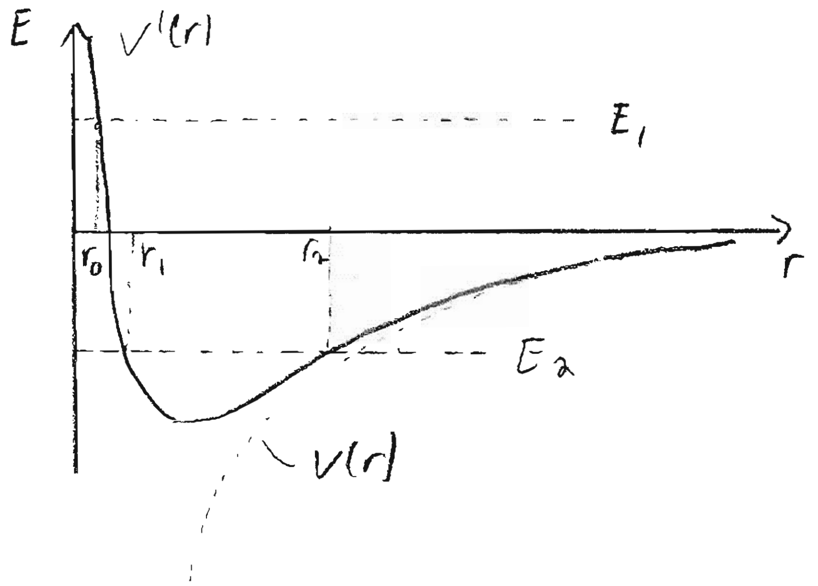
θ fås sedan genom att sätta in $r(t)$ i ekv. (4) och integrera

$$d\theta = \frac{\ell\, dt}{\mu r^2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \int_0^t \frac{\ell\, dt}{\mu r^2(t)} + \theta_0$$

Lösn ingen ovan är formellt korrekt, men inte alltid så praktisk eller enkel i praktiken.

Betrakta nu en gravitationspotential, $V(r) = -\frac{k}{r}$; $k > 0$

$$\Rightarrow \quad V'(r) = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$



$E_1 > 0 \Rightarrow$ obunden rörelse, alltid utanför r_0

$E_2 < 0 \Rightarrow$ bunden rörelse mellan r_1 och r_2

För fler exempel (för andra potentialer), se Goldstein, kap. 3.3.

Bankurvorna

Ekv. (4) ger att

$$l\,dt = \mu r^2 d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}$$

Ekv. (6) kan då skrivas

$$\frac{l}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{l^2}{\mu r^3} = f(r) \qquad (9)$$

ger $r(\theta)$

Lättare att lösa än $r(t)$!

Byt variabel till $u = \frac{1}{r}$

$$\Rightarrow \quad du = -\frac{1}{r^2}\,dr \qquad \Rightarrow \quad dr = -r^2\,du$$

(9) blir nu

$$lu^2 \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}\right) - \frac{l^2}{\mu}u^3 = f\left(\tfrac{1}{u}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2u^2} f\left(\tfrac{1}{u}\right) \qquad (10)$$

Man kan också utgå från energirelationen (7)

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}$$

Enligt ovan blir

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2\mu}{l^2}\left(E - V\left(\tfrac{1}{u}\right) - \frac{l^2}{2\mu}u^2\right)} \qquad (11)$$

För gravitationspotentialen, $V(r) = -\frac{k}{r} \Rightarrow V\left(\frac{1}{u}\right) = -ku$

får vi

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2\mu}{l^2}(E + ku) - u^2}$$

Kvadrera!

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2\mu}{l^2}(E + ku) - u^2$$

Kvadratkomplettera! $\Rightarrow$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left[u - \frac{\mu k}{l^2}\right]^2 = \frac{2\mu}{l^2}E + \left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^2 = \left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^2\left(1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}\right)$$

<u>Def:</u> $p = \frac{l^2}{k\mu}$; $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}$ (12)

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(u - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{e^2}{p^2} \qquad (13)$$

Detta ser ju ut som ekv. för en ellips $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right]$

Man kan gissa en lösning och se att

$$u - \frac{1}{p} = \frac{e}{p}\cos\theta \qquad (14)$$

satisfiera ekv (12). Ekv. (13) är då vår lösning $u = u(\theta)$.

Återgång till r ger

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = \frac{e}{p}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{e}{p}\cos\theta + \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad (15)}$$

Detta är våra bankurvor för Keplerproblemet

För alternativ härledning, se Goldstein, kap 3.7.

Analys av banorna

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\Theta} \quad \Rightarrow \quad r = p - er\cos\Theta$$

Byt till kartesiska koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\Theta \\ y = r\sin\Theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2 = (p - ex)^2 = p^2 - 2epx + e^2x^2$$

$$\Rightarrow \quad (1-e^2)\left[x^2 + 2\frac{ep}{1-e^2}x + \left(\frac{ep}{1-e^2}\right)^2\right] + y^2 = p^2 + \frac{(ep)^2}{(1-e^2)^2} = \frac{p^2}{1-e^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{(1-e^2)^2}$$

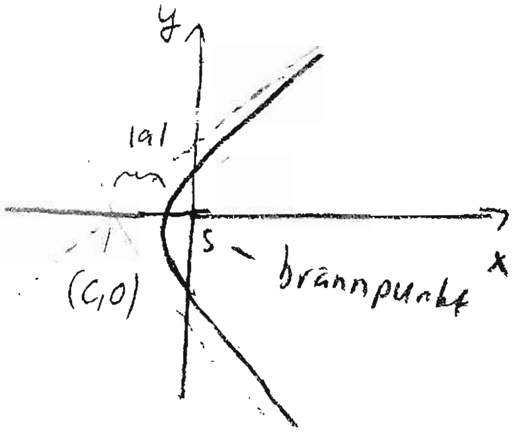
<u>Def</u>: $a = \frac{p}{1-e^2}$; $c = \frac{ep}{1-e^2}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1} \quad (16) \quad \text{Kägelsnitt!}$$

Tre fall

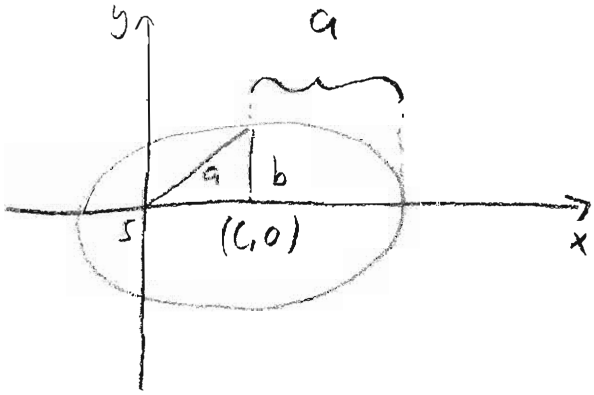
(i) $e > 1$ dvs $E > 0$ $\Rightarrow$ $|c| > |a|$

$\Rightarrow$ Hyperbel



(ii) $e < 1$ dvs $E < 0$ $\Rightarrow$ $|c| < |a|$

$\Rightarrow$ Ellips



$$b^2 = a^2 - c^2 = \frac{p^2}{1-e^2} = ap$$

a – halva storaxeln

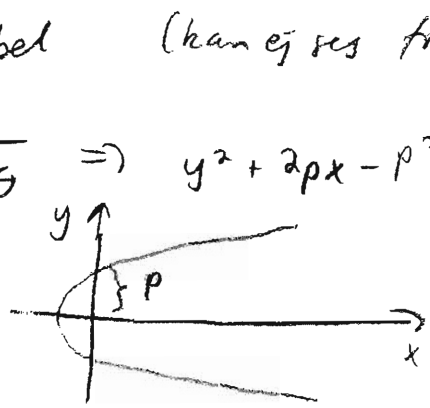
b – halva lillaxeln

Specialfall $e = 0$ $\Rightarrow$ cirkel

(iii) $e = 1$ dvs $E = 0$

$\Rightarrow$ Parabel (kan ej ses från (16) som gäller då $e \neq 1$

$$r = \frac{p}{1+\cos\theta} \Rightarrow y^2 + 2px - p^2 = 0$$



Keplers första lag:

Planeterna rör sig i ellipsbanor med solen i ena brännpunkten

Not 2-kroppsapproximation

Ytan som orbsvektorn sveper över är

$$A = \pi ab = \pi a\sqrt{ap} = \pi a^{3/2}\sqrt{p}$$

Kepler II $\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\ell}{\mu} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\frac{\ell}{\mu}T$; T = perioden

$$\Rightarrow \pi a^{3/2}\sqrt{p} = \frac{1}{2}\frac{\ell}{\mu}T$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{1}{\pi^2 \underbrace{p}_{\ell^2/k\mu}}\frac{\ell^2}{(2\mu)^2} = \frac{k\mu}{\pi^2\ell^2}\frac{\ell^2}{4\mu^2} = \frac{k}{4\pi^2\mu}$$

$k = Gm_1m_2$; $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{Gm_1m_2}{4\pi^2 m_1m_2}\cdot(m_1+m_2) = \frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2}$$

Om $m_1 \gg m_2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a^3}{T^2} \simeq \frac{Gm_1}{4\pi^2} = \text{konst}}$$

Keplers tredje lag:

För alla planeter i ett planetsystem är förhållandet mellan kuben på storaxeln och kvadraten på perioden konstant.

Exempel: Solsystemet

Planet	a (AU)	T (år)	a^3/T^2
Merkurius	0.39	0.24	1.00
Venus	0.72	0.62	0.99
Jorden	1.00	1.00	1.00
Mars	1.52	1.9	0.97
Jupiter	5.2	11.9	0.99
Saturnus	9.5	29.5	0.99
Uranus	19.1	84.0	0.97
Neptunus	30.1	164,8	1,00
Pluto	39,3	247,7	0,99