Lagrangefunktionen är ej unik

För exemplet med en laddad partikel i ett elektromagnetiskt fält, gör följande substitution

$$\begin{cases} \bar{A}(\bar{r},t) \longrightarrow \bar{A}'(\bar{r},t) = \bar{A}(\bar{r},t) + \bar{\nabla}\chi(\bar{r},t) \\ \phi(\bar{r},t) \longrightarrow \phi'(\bar{r},t) = \phi(\bar{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(\bar{r},t) \end{cases}$$

Gen potentialen blir då $U \to U' = q\phi' - \frac{q}{c}\dot{\bar{r}}\cdot\bar{A}'$

Lagrangianen blir nu

$$L' = T - U' = \frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - q\phi' + \frac{q}{c}\dot{\bar{r}}\cdot\bar{A}' =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\dot{\bar{r}}\cdot\bar{A}}_{L = \text{ursprungliga Lagrangianen}} + \underbrace{\frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(\bar{r},t) + \frac{q}{c}\dot{\bar{r}}\cdot\bar{\nabla}\chi}_{\frac{q}{c}\frac{d}{dt}\chi(\bar{r},t)}$$

$$= L + \frac{q}{c}\frac{d}{dt}\chi(\bar{r},t)$$

Sätt in $\frac{d}{dt}\chi(\bar{r},t)$ i L.E., $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}\frac{d\chi}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\frac{d\chi}{dt} = 0$

$$VL = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}\left[\dot{\bar{r}}\cdot\nabla\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right]\right) - \frac{\partial}{\partial r_i}\left[\dot{\bar{r}}\cdot\nabla\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial\chi}{\partial r_i} - \sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r_k}\chi - \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial t}\chi =$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\chi}{\partial r_k\partial r_i}\dot{r}_k + \cancel{\frac{\partial^2\chi}{\partial t\partial r_i}} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\chi}{\partial r_i\partial r_k}\dot{r}_k - \cancel{\frac{\partial^2\chi}{\partial r_i\partial t}} = 0$$

Dvs. $\frac{d}{dt}\chi(\bar{r},t)$ uppfyller L.E. $\Rightarrow$ L' ger samma rörelseekvationer som L. Detta gäller allmänt, vi kan alltid lägga till $\frac{dM(\bar{q},t)}{dt}$ utan att rörelseekvationerna ändras.

Hamiltonfunktionen (energifunktionen)

Def: $h(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t) = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$

Då gäller

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \left\{ \ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \overbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}^{\frac{\partial L}{\partial q_k} \text{ enl. LE}} \right\} -$$

$$- \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right\} - \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Om Lagrangefunktionen ej beror explicit av t gäller

$$\frac{dh}{dt} = 0 \quad \text{dvs} \quad h(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t) = \text{konstant}$$

Ex. $L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}^2 - V(\bar{r})$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\Rightarrow h = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = m\dot{\bar{r}}^2 - \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}^2 + V(\bar{r}) =$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}^2 + V(\bar{r}) = T + V = E$$

I detta specialfall gäller alltså: $h = E$

Obs! Detta gäller ej alltid!

$$\boxed{\text{Def: } p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{rörelsemängd som är } \underline{\text{kanoniskt}} \text{ } \underline{\text{konjugerad}} \text{ till } q_k \text{ (eller kort och gott den kanoniska rörelsemängden)}}$$

Obs!

Om $L = L(q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_f, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$

$\llcorner$ q_k är cykliskt (saknas)

gäller

$$\frac{\delta L}{\delta q_k} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{0} - \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{\dot{p}_k} = 0$$

dvs

$$\boxed{p_k = \text{konstant för cykliskt } q_k}$$

Ex/ Laddad partikel i elektromagnetiskt fält

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \underbrace{m\dot{q}_k}_{\text{kinetiska impulsen}} + \frac{e}{c} A_k(\underset{\sim}{q}, t) \quad \text{- kanoniska impulsen}$$

Symmetrier och bevarandelagar

Antag att

$$L = L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot q}) = T(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot q}) - V(\underset{\sim}{q})$$ – inget explicit tidsberoende.

där

$$T = \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}\, \dot q_j \dot q_k$$ – homogen fkn av grad 2 i $\underset{\sim}{\dot q}$

Utnyttja nu Eulers teorem (sid. 26) på T

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{f} \dot q_i \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} = 2T$$

[Eulers teorem visas enkelt:

Antag $F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^N F(x_1, \ldots, x_n)$

Derivera m.a.p. λ och sätt $\lambda = 1$

$$\text{V.L.} = \frac{d}{d\lambda} F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\Big|_{\lambda=1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{d\lambda x_i}{d\lambda}\Big|_{\lambda=1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot x_i$$

$$\text{H.L.} = \frac{d}{d\lambda}\left(\lambda^N \cdot F(x_1, \ldots, x_n)\right)\Big|_{\lambda=1} = N \cdot \lambda^{N-1} \cdot F\Big|_{\lambda=1} = N \cdot F$$]

Alltså gäller

$$h = \underbrace{\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \dot q_i}_{2T} - L = 2T - T + U = T + U = E$$

$h = E$ är i detta fall en rörelsekonstant, ty

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dh}{dt} \underset{\text{enl. tidigare (s30)}}{=} -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Pga att vi har ett autonomt och skleronomt system.

$\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0$ [sic]

T homogen fkn av grad 2 i $\dot q_i$

Noethers teorem

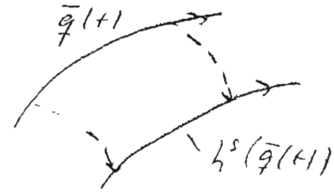
Antag att $L = L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}})$ beskriver ett autonomt system som är invariant under transformationen

$$\underset{\sim}{q} \longrightarrow \underset{\sim}{h}^s(\underset{\sim}{q})$$

där s är en reell, kontinuerlig parameter och $\underset{\sim}{h}^{s=0}(\underset{\sim}{q}) = \underset{\sim}{q}$ är identitetstransformationen. Det existerar då en rörelsekonstant given av

$$I(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}) = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} h_i^s(\underset{\sim}{q}) \Big|_{s=0}$$

Bevis: Låt $\underset{\sim}{q} = \bar{\underset{\sim}{q}}$ vara en lösning till Lagranges ekvationer. Enligt vårt antagande är då $\underset{\sim}{q}(s,t) = \underset{\sim}{\phi}(s,t) = \underset{\sim}{h}^s(\bar{\underset{\sim}{q}}(t))$ också en lösning.



$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\underset{\sim}{\phi}(s,t), \dot{\underset{\sim}{\phi}}(s,t))\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}(\underset{\sim}{\phi}(s,t), \dot{\underset{\sim}{\phi}}(s,t)) \qquad i = 1, \ldots, f \qquad (1)$$

Vidare är L invariant

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} L(\underset{\sim}{\phi}(s,t), \dot{\underset{\sim}{\phi}}(s,t)) = \sum_{i=1}^{f}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{d\phi_i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{\phi}_i}{ds}\right] = 0 \qquad (2)$$

$$(1) \,\&\, (2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{d\phi_i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\frac{d\phi_i}{ds}\right] = 0 = \frac{d}{dt} I$$

∇.

Exempel

Betrakta $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i^2 - U(r_1, \dots, r_n)$

i/ Antag att systemet ä invariant under translation längs med x-axeln:

$$h^s \cdot \bar{r}_i \to \bar{r}_i + s\hat{x} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} h^s(\bar{r}_i)\Big|_{s=0} = \hat{x}$$

$$\Rightarrow I = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_f} \frac{d}{ds} h^s(q_f)\Big|_{s=0} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i \cdot \hat{x} = \sum_{i=1}^{n} p_x^{(i)} = P_x$$

$\Rightarrow$ Invarians för translation i riktning $\hat{n}$ $\Rightarrow$ P_n är bevarat!

ii/ Invarians under rotation kring z-axeln

$$\bar{r}_i = (x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}) \longrightarrow \bar{r}_i' = (x'^{(i)}, y'^{(i)}, z'^{(i)}) =$$

$$= (x^{(i)}\cos s + y^{(i)}\sin s, -x^{(i)}\sin s + y^{(i)}\cos s, z^{(i)})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \bar{r}_i'\Big|_{s=0} = (y^{(i)}, -x^{(i)}, 0) = \bar{r}_i \times \hat{z}$$

$$\Rightarrow I = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i \cdot (\bar{r}_i \times \hat{z}) \overset{\text{vektoranalys}}{=} \sum_{i=1}^{n} \hat{z} \cdot (m_i \dot{\bar{r}}_i \times \bar{r}_i) = -\hat{z} \cdot \bar{L} = -L_z$$

$\Rightarrow$ Invarians under rotation kring $\hat{n}$-axeln

$\Rightarrow$ $L_n = \bar{L} \cdot \hat{n}$ är bevarad!

Not. Pss. ger invarians under translation i t ~~att~~ totala energin är bevarad (kan ej ses från denna version av Noethers teorem) Se övningsexempel 2.17.