Generaliserade potentialer

Betrakta följande exempel med en laddad partikel i ett elektromagnetiskt fält.

Låt generaliserade koordinaterna vara $\bar{r} = (x, y, z)$

Vi vet sedan tidigare att

$$m\ddot{\bar{r}} = q\bar{E}(\bar{r},t) + \frac{q}{c}\bar{v}(t) \times \bar{B}(\bar{r},t) \quad = \text{Lorentzkraften}$$

↑ laddningen

Notera att

$$\begin{cases} \bar{E}(\bar{r},t) = -\nabla\phi(\bar{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\bar{A}(\bar{r},t) \\ \bar{B}(\bar{r},t) = \bar{\nabla} \times \bar{A}(\bar{r},t) \end{cases}$$

där ϕ är skalärpotentialen och $\bar{A}$ är vektorpotentialen.

<u>Def</u>: Den <u>generaliserade</u> potentialen ges av

$$U(\bar{r},\dot{\bar{r}},t) = q\phi(\bar{r},t) - \frac{q}{c}\dot{\bar{r}}\cdot\bar{A}(\bar{r},t)$$

$$\Rightarrow \quad L(\bar{r},\dot{\bar{r}},t) = \frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - q\phi(\bar{r},t) + \frac{q}{c}\dot{\bar{r}}\cdot\bar{A}(\bar{r},t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r_i} = -q\frac{\partial\phi}{\partial r_i} + \frac{q}{c}\sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k\frac{\partial A_k}{\partial r_i} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) = m\ddot{r}_i + \frac{q}{c}\frac{dA_i}{dt} = m\ddot{r}_i + \frac{q}{c}\left[\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial r_k}\dot{r}_k + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right] \end{cases}$$

L.E. $\Rightarrow$

$$m\ddot{r}_i + \frac{q}{c}\left[\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial r_k}\dot{r}_k + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right] + q\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} - \frac{q}{c}\sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k\frac{\partial A_k}{\partial r_i} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{r}_i = q\underbrace{\left[-\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right]}_{E_i} + \frac{q}{c}\underbrace{\sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k\left[\frac{\partial A_k}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_k}\right]}_{(\bar{v}\times\bar{B})_i} \qquad (*)$$

Att sista summan är lika med $(\bar{v}\times\bar{B})_i$ visas enkelt.
Med Einsteins summakonvention (summera över lika index) har vi

$$(\bar{v}\times\bar{B})_i = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Levi-Civita-symbolen}}}{\varepsilon_{ijk}} v_j B_k = \varepsilon_{ijk} v_j (\bar{\nabla}\times\bar{A})_k =$$

$$= \varepsilon_{ijk} v_j \varepsilon_{klm}\partial_l A_m = \underbrace{\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}} v_j \partial_l A_m =$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) v_j \partial_l A_m = v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i$$

Åter inför Σ och byt $j \to k$ $\Rightarrow$

$$(\bar{v}\times\bar{B})_i = \sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k\left(\frac{\partial A_k}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_k}\right)$$ vilket är precis sista summan i ekv. (*).

$$\Rightarrow m\ddot{r}_i = qE_i + \frac{q}{c}(\bar{v}\times\bar{B})_i$$ dvs rörelseekvationerna vi startade med.

Trots att vi antog att V ej beror av $\dot{q}$ när vi härledde L.E. kan vi alltså låta $V \to U(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$ och återfå våra rörelseekv.
Notera att kraften kan skrivas

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$$ ($\underset{\sim}{q} = \bar{r}$ i detta exempel)

Variationskalkyl

Ex
Fermats princip för ljusstrålar

$\sum_i (\bar{F}_i - \dot{\bar{p}}_i)\delta r_i = 0$ enl. d'Alemberts princip $\Rightarrow$
ett fysikaliskt system befinner sig i någon mening vid ett extremvärde. Utveckla denna idé!

Sök funktion $y = y(x)$ med $\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$ så att

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y(x), y'(x), x)$$

antar ett extremvärde. (has a stationary value)

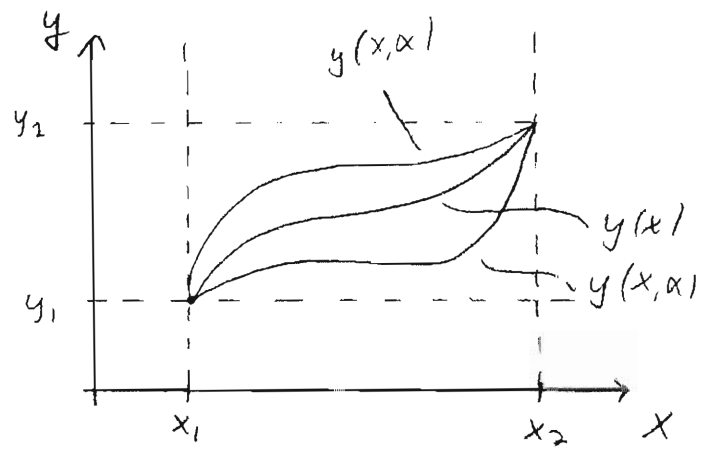
$\begin{cases} J[y] \text{ är en } \underline{\text{funktional}} \text{ av } y(x) \\ f, x_1, x_2, y_1 \text{ och } y_2 \text{ är givna} \end{cases}$

Variera nu $y(x)$ lite runt den kurva som gör att $J[y]$ är extrem.

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\, \eta(x)$$

$\eta(x)$ är en godtycklig funktion som uppfyller

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$



Def $\delta J = \frac{dJ}{d\alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right\} d\alpha$ — första variationen av J

Men $\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)$

Integrera andra termen i δJ partiellt

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{x_1}^{x_2}}_{\substack{=0 \\ \text{ty } \eta(x_1)=\eta(x_2)=0}} - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

Alltså

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right\} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}_{\eta(x)} d\alpha$$

Def
$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} & \text{– variationsderivatan av } f \text{ med avseende på } y \\ \delta y = \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha & \text{– variationen av } y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \delta J = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\delta f}{\delta y}\delta y$$

Vi vill att J ska anta ett extremvärden, dvs $\delta J = 0$
Måste gälla för godtyckliga δy (alt godtyckliga $\eta(x)$)

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta f}{\delta y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0}$$

Variationsproblemets Eulerekvation.

Ersätt nu $f(y, y', x)$ med $L(q, \dot{q}, t)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

dvs Lagranges ekvationer !!!

Hamiltons princip (1834)

Till ett mekaniskt system med f frihetsgrader och generaliserade koordinater $\underset{\sim}{q} = (q_1, \ldots, q_f)$ associeras en Lagrangefunktion

$$L = L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$$

Låt

$$\underset{\sim}{\rho} = (\rho_1(t), \ldots, \rho_f(t)) \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

vara en rörelse hos systemet med $\underset{\sim}{\rho}(t_1) = \underset{\sim}{a}$ och $\underset{\sim}{\rho}(t_2) = \underset{\sim}{b}$.

Då gäller att verkansintegralen ("action")

$$J[\underset{\sim}{q}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$$

antager ett extremvärde för $\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{\rho}$

Om krafterna kan härledas från en generaliserad potential $U = U(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$ kallas systemet monogent (monogenic). Man kan då skriva

$$L = T - U$$

Euler-Lagranges ekvationer

$$J[\underset{\sim}{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \underset{\sim}{\dot{q}}(t), t)\, dt$$

Vi har

$$0 = \delta J = \frac{dJ}{d\alpha} d\alpha = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \alpha} \right) d\alpha =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} + \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} d\alpha \right]_{t_1}^{t_2}}_{0 \text{ ty } \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} = 0 \text{ vid ändpunkterna}}$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} d\alpha =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\} \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial \alpha} d\alpha}_{\delta q_k}$$

Gäller för alla δq_k

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Notera att vi kan skriva detta som

$$\frac{\delta L}{\delta q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \qquad k = 1 .. f$$

dvs variationsderivatan av L m.a.p. q_k är noll.