Repetition av Newtonmekanik

Newtons lagar (1687)

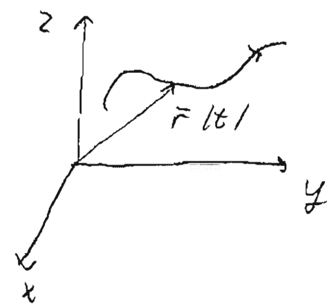
I. Varje kropp fortsätter i sitt tillstånd av vila eller likformig rätlinjig rörelse om den inte av krafter tvingas att ändra tillstånd

II. Rörelseförändringen är proportionell mot de applicerade krafterna och äger rum i den riktning som krafterna verkar.

III. För varje kraft finns det alltid en lika stor motkraft; de ömsesidiga kraftverkningarna mellan två kroppar är alltid lika stora och motsatt riktade

kropp = partikel med massa m (t.ex. punktmassa eller masscentrum för en utbredd massfördelning)

rörelse = $\bar{r}(t)$ - ortsvektorn



Rummet är homogent och isotropt. $\mathbb{E}^3$ (punkter)

Definieras en referenspunkt (origo) $\Rightarrow$ vektorrum $\mathbb{R}^3$ (vektorer)

Likformig rätlinjig rörelse i tröghetssystem

$$\ddot{\bar{r}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{r}(t) = \bar{r}^0 + \bar{v}^0 t$$

där $\begin{cases} \bar{r}^0 = \bar{r}\,(t=0) \\ \bar{v}^0 = \bar{v}\,(t=0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{v}(t) = \bar{v}^0 \\ \bar{a}(t) = \bar{0} \end{cases}$$

Vi har ett långsamt homogent system av differentialekvationer med begynnelsevillkoren $\bar{r}(0) = \bar{r}^0$, $\bar{v}(0) = \bar{v}^0$

__Def__: Referenssystem i vilka Newtons första lag kan skrivas $\ddot{\bar{r}}(t) = 0$ kallas __tröghetssystem__.

- I tröghetssystem gäller Newtons andra lag på formen

$$m\ddot{\bar{r}}(t) = \bar{F}$$

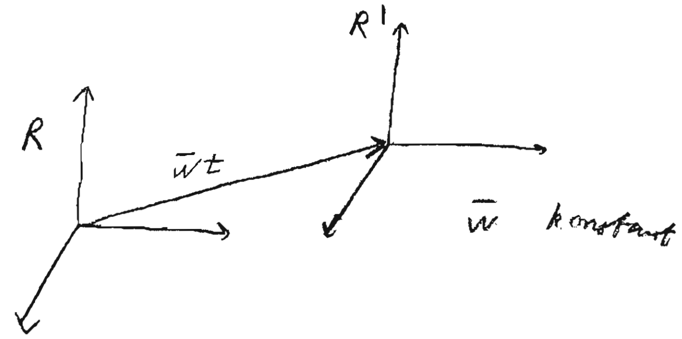
↑ Resultanten av alla krafter som appliceras på kroppen

- I andra referenssystem blir Newtons andra lag mer komplicerad:

$$m\ddot{\bar{r}}(t) = \bar{F} + \bar{F}_{\text{tröghet}}$$

↑ ex centrifugalkraft, Coriolis-kraft

Tröghetssystem i relativ rörelse



Om R är ett tröghetssystem så är varje system R' som rör sig med konstant hastighet relativt R också ett tröghetssystem.

$$\bar{r}'(t) = \bar{r}(t) - \bar{w}t$$

$$\Rightarrow \ddot{\bar{r}}' = \ddot{\bar{r}} \quad \Rightarrow R' \text{ också tröghetssystem}$$

Övn. ex 1.5!

Rörelsemängd och kraft

Def.: $\bar{p}(t) = m\dot{\bar{r}}(t)$ m - tröga massa

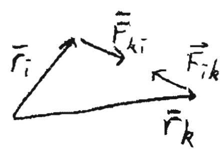
Newtons andra lag:

$$\frac{d}{dt}\bar{p}(t) = \bar{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t)$$

eller

$$m\ddot{\bar{r}}(t) = \bar{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \quad \text{om } m \text{ är tidsoberoende}$$

Newtons tredje lag:



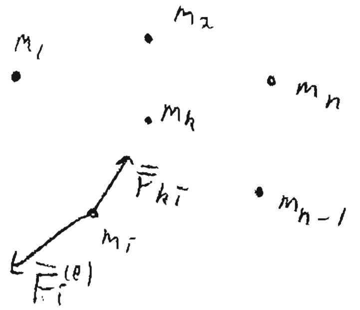
$\bar{r}_i(t)$ $i = 1, \dots, n$

$\bar{F}_{ik}$ = kraft från partikel i på partikel k

$$\bar{F}_{ik} = -\bar{F}_{ki}$$

Ändliga partikelsystem

Betrakta n massor, $m_1, m_2, \ldots, m_n$



Interna centralkrafter.

$$\bar{F}_{ki} = F_{ki}(r_{ki}) \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_k}{r_{ik}}$$

från på

$$= F_{ik}(r_{ik})$$

Externa krafter: $\bar{F}_i^{(e)}$

Potential:

$$V_{ki}(r) = -\int_{r_0}^{r} F_{ki}(r')\,dr'$$

$$\bar{F}_{ki} = -\nabla_i V_{ki}(r)$$

från på gradienten m.a.p i

$$r = \sqrt{(x^{(k)} - x^{(i)})^2 + (y^{(k)} - y^{(i)})^2 + (z^{(k)} - z^{(i)})^2}$$

$$\nabla_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}}, \frac{\partial}{\partial y^{(i)}}, \frac{\partial}{\partial z^{(i)}}\right)$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\bar{r}}_1 = \bar{F}_{21} + \bar{F}_{31} + \cdots + \bar{F}_{n1} + \bar{F}_1^{(e)} \\ m_n \ddot{\bar{r}}_n = \bar{F}_{1n} + \bar{F}_{2n} + \ldots + \bar{F}_{n-1\,n} + \bar{F}_n^{(e)} \end{cases}$$

eller

$$\boxed{m_i \ddot{\bar{r}}_i = \sum_{k \neq i} \bar{F}_{ki} + \bar{F}_i^{(e)} \quad ; \quad \bar{F}_{ki} = -\bar{F}_{ik}}$$

Masscentrums rörelse

Masscentrum S rör sig som en partikel med massa $M = \sum_i m_i$ påverkad av resultanten av de externa krafterna:

$$M\ddot{\bar{R}} = \sum_i \bar{F}_i^{(e)} \quad ; \quad \bar{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \bar{r}_i$$

Bevis:

$$M\ddot{\bar{R}} = \sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i = \underbrace{\sum_i \sum_{k \neq i} \bar{F}_{ki}}_{0} + \sum_i \bar{F}_i^{(e)} = \sum_i \bar{F}_i^{(e)} \qquad \square$$

ty $\bar{F}_{ki} = -\bar{F}_{ik}$ Newton III

Rörelsemängdsmomentet

Tidsderivatan av totala rörelsemängdsmomentet är lika med summan av alla externa kraftmoment.

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \bar{l}_i\right) = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{(e)}$$

Bevis:

$$\frac{d}{dt}(\bar{l}_i) = m_i \frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times \dot{\bar{r}}_i) = m_i \bar{r}_i \times \ddot{\bar{r}}_i = \sum_{k \neq i} \bar{r}_i \times \bar{F}_{ki} + \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{(e)}$$

$$\sum_{k \neq i} \bar{r}_i \times \bar{F}_{ki} = \sum_{k \neq i} F_{ki} \frac{\bar{r}_i \times (\bar{r}_i - \bar{r}_k)}{r_{ik}} = -\sum_{k \neq i} F_{ki} \underbrace{\frac{\bar{r}_i \times \bar{r}_k}{r_{ik}}}_{\text{antisymmetrisk}} = \sum_{k \neq i} F_{ik} \frac{\bar{r}_k \times \bar{r}_i}{r_{ki}}$$

Summera över i $\Rightarrow$ alla termer med $\bar{F}_{ki}$ tar ut varandra.

$\square$

Energi

Tidsderivatan av totala inre energin är lika med totala effekten av de yttre krafterna:

$$\frac{d}{dt}(T+V) = \sum_i \bar{v}_i \cdot \bar{F}_i^{(e)}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i^{\,2} \equiv \sum_i T_i$$

$$V = \sum_i \sum_{k=i+1} V_{ik}(r_{ik}) \equiv V(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n)$$

Bevis:

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \underbrace{\sum_{k\neq i} \bar{F}_{ki}}_{-\nabla_i \sum_{k\neq i} V_{ki}(r_{ki})} + \bar{F}_i^{(e)}$$

$$\Rightarrow m_i \ddot{\bar{r}}_i \cdot \dot{\bar{r}}_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\bar{r}}_i^{\,2}\right) = -\dot{\bar{r}}_i \cdot \nabla_i \sum_{k\neq i} V_{ki}(r_{ki}) + \dot{\bar{r}}_i \cdot \bar{F}_i^{(e)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{r}}_i^{\,2}\right) = -\sum_i \sum_{k\neq i} \dot{\bar{r}}_i \cdot \nabla_i V_{ki}(r_{ki}) + \sum_i \dot{\bar{r}}_i \cdot \bar{F}_i^{(e)}$$

Notera att

$$\dot{\bar{r}}_a \cdot \nabla_a \underset{V_{ab}}{\underset{\parallel}{V_{ba}}} + \dot{\bar{r}}_b \nabla_b V_{ab} = (\dot{\bar{r}}_a \cdot \nabla_a + \dot{\bar{r}}_b \cdot \nabla_b) V_{ab} = \frac{d}{dt} V_{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{r}}_i^{\,2}\right) + \frac{d}{dt}\Big(\sum_i \sum_{\underset{\uparrow\ \text{OBS!}}{k=i+1}} V_{ik}(r_{ik})\Big) = \sum_i \dot{\bar{r}}_i \cdot \bar{F}_i^{(e)}$$

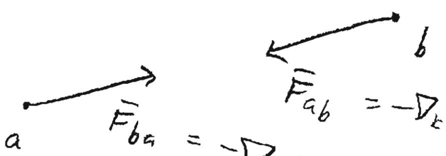
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(T+V) = \sum_i \dot{\bar{r}}_i \cdot \bar{F}_i^{(e)} \qquad \square$$

Notera

$$V(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} V_{ik}(r_{ik}) = \sum_{k>i} V_{ik}(r_{ik})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} U_{ik}(r_{ik})$$

∴ En potential per partikelpar.

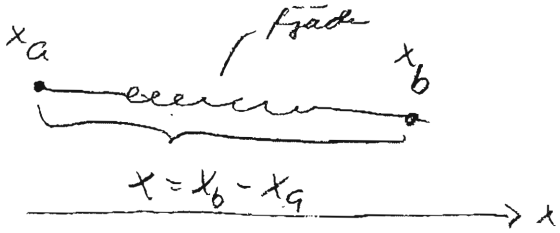


$$\bar{F}_{ab} = -\nabla_b V_{ab}$$

$$\bar{F}_{ba} = -\nabla_a V_{ab}$$

Exempel

1)



$$V = \frac{1}{2} k (x-L)^2$$

$$\bar{F}_{ba} = -\nabla_a V = -\hat{x}\,(\overbrace{x_b - x_a}^{x} - L)(-1) = \hat{x}\, k(x-L)$$

$$\bar{F}_{ab} = -\nabla_b V = -\hat{x}\,(x_b - x_a - L)(+1) = -\hat{x}\, k(x-L)$$

$$x > L \Rightarrow \begin{cases} \bar{F}_{ba} \parallel \hat{x} \\ \bar{F}_{ab} \parallel -\hat{x} \end{cases}$$

elektrostatiskt fall

2/

$+ \quad \bar{r}_a \qquad\qquad + \quad \bar{r}_b \qquad\qquad V = \dfrac{A}{r_{ab}}$

$$\bar{F}_{ba} = -\nabla_a V = \underbrace{-\frac{dV}{dr_{ab}}}_{\frac{A}{r_{ab}^2} > 0} \underbrace{\nabla_a r_{ab}}_{\frac{\bar{r}_a - \bar{r}_b}{r_{ab}}} = \frac{A}{r_{ab}^3}(\bar{r}_a - \bar{r}_b)$$

*) Se nedan!

$$\bar{F}_{ab} = -\nabla_b V = -\frac{dV}{dr_{ab}} \nabla_b r_{ab} = \frac{A}{r_{ab}^3}(\bar{r}_b - \bar{r}_a)$$

$\Rightarrow$

OK.

*) Nob

$$\nabla_a r_{ab} = \left(\frac{\partial}{\partial x_a}, \frac{\partial}{\partial y_a}, \frac{\partial}{\partial z_a}\right)\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}}\left(2(x_a - x_b),\ 2(y_a - y_b),\ 2(z_a - z_b)\right) =$$

$$= \frac{\bar{r}_a - \bar{r}_b}{r_{ab}}$$

1.12 Det (slutna) isolerade n-partikelsystemet

Slutet: alla yttre krafter = 0

a/ $M\ddot{\bar{R}} = 0 \Rightarrow M\dot{\bar{R}} = \bar{P} = \text{konst}$

$$\bar{R}(t) = \frac{1}{M}\bar{P}t + \bar{R}(0)$$

$\boxed{\text{Rörelsemängden bevaras}}$ (3 rörelsekonstanter)

b/ $\sum \bar{r}_i \times \bar{p}_i = \sum \bar{l}_i = \bar{L} = \text{konst.}$

$\boxed{\text{Rörelsemängdsmomentet bevaras}}$ (3 rörelsekonstanter)

c/ $T + V = \sum \frac{1}{2m_i} p_i^2 + \sum_{k>i} V_{ik}(r_{ik}) \equiv E = \text{konst}$

$\boxed{\text{Totala energin bevaras}}$ (1 rörelsekonstant)

Jfr. övn. ex 1.7, 13 !

1.15 Konservativa kraftfält

För konservativa krafter gäller

$$\bar{F} = -\nabla V(\bar{r})$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} (\bar{F}\cdot d\bar{s}) = -\left[V(\bar{r}) - V(\bar{r}_0)\right]$$ – arbetet beror ~~ej~~ på vägen

$$\Rightarrow \oint_{\bar{r}} (\bar{F}\cdot d\bar{s}) = 0$$

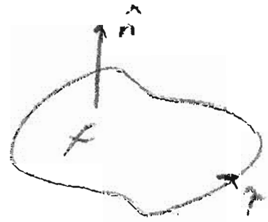
$$V \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\bar{\nabla} \times \bar{F} = 0}$

* Nödvändigt villkor för kons kraft
* Tillräckligt —— " ——
i enkelt sammanhängande område

Visas mha Stokes sats:

$$\oint_{C} (\bar{F}\cdot d\bar{s}) = \iint_S (\bar{\nabla}\times\bar{F})\cdot\hat{n}\, df$$



Exempel

i) Centralkraft $\bar{F}(\bar{r}) = f(r)\bar{r}$

$$\left[\bar{\nabla}\times(f(r)\bar{r})\right]_x = \frac{\partial}{\partial y}(f(r)z) - \frac{\partial}{\partial z}(f(r)y) = z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z} = z\frac{\partial f}{\partial r}\underbrace{\frac{\partial r}{\partial y}}_{\frac{y}{r}} - y\frac{\partial f}{\partial r}\underbrace{\frac{\partial r}{\partial z}}_{\frac{z}{r}} =$$

$$= \frac{1}{r}(zy - yz)\frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad \text{p.s.s. för } y \,\&\, z.$$

ii) Magnetfält från rak ledare

$$F_x = -B\frac{y}{\rho^2} \quad ; \quad F_y = B\frac{x}{\rho^2} \quad ; \quad F_z = 0$$

$$(\bar{\nabla}\times\bar{F})_x = (\bar{\nabla}\times\bar{F})_y = 0$$

$$(\bar{\nabla}\times\bar{F})_z = B\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{2x^2}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2y^2}{\rho^4}\right) = 0 \quad \forall \rho \neq 0$$

Kanonisk mekanik

1. Formulera mekaniken m.h.a kinetisk och potentiell energi:

$$\begin{cases} L = T - V = L(q, \dot{q}, t) \\ H = T + V = H(q, p, t) \end{cases}$$

2 Utveckla formalism för variabelbyten:

$$(q, p) \longrightarrow (Q, P)$$
$$\uparrow$$
Φ genererande funktion

3 Härled ekvation för sådan genererande funktion så att rörelseproblemet blir trivialt:

$$\begin{cases} H\left(q, \dfrac{\partial S^K}{\partial q}, t\right) = -\dfrac{\partial S^K}{\partial t} \\ H\left(q, \dfrac{\partial S}{\partial q}\right) = E \end{cases}$$

$\swarrow$ $\downarrow$ $\searrow$

Kvantmekanik   Kvalitativ mekanik   Relativistisk mekanik

Den kanoniska mekanikens principer

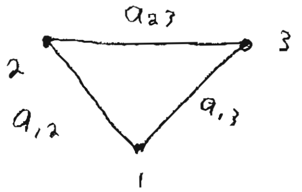
Tvångsvillkor och generaliserade koordinater

Def: (i) Holonoma tvångsvillkor

$$f_\lambda(\bar r_1, \bar r_2, \dots, \bar r_n, t) = 0 \qquad \lambda = 1, \dots, \Lambda$$

Oberoende. Matrisen $\left\{ \frac{\partial f_\lambda}{\partial \bar r_k} \right\}$ $\left\{ (\nabla_k f_\lambda)_\cdot \right\}$ har rang Λ

Ex: 3 partiklar med konstanta avstånd



$$\begin{cases} f_1 = |\bar r_1 - \bar r_2| - a_{12} = 0 \\ f_2 = |\bar r_1 - \bar r_3| - a_{13} = 0 \\ f_3 = |\bar r_2 - \bar r_3| - a_{23} = 0 \end{cases} \qquad \Lambda = 3$$

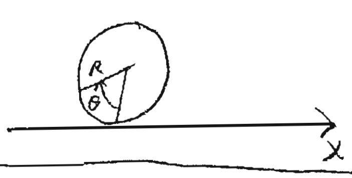
Antal frihetsgrader $f = 3n - \Lambda = 9 - 3 = 6$

Def: (ii) Icke-holonoma tvångsvillkor

$$\sum_{k=1}^{n} \bar\omega_k^\lambda(\bar r_1, \dots, \bar r_n, t) \cdot d\bar r_k = 0 \qquad \lambda = 1, \dots, \Lambda \qquad (*)$$

Ibland kan uttrycket (*) integreras till holonoma tvång. Icke-holonoma tvång är ej integrerbara, dvs det finns inga funktioner f_λ så att villkoren (*) kan skrivas $df_\lambda = 0$.

Ex på integrerbart system: Cylinder som rullar



$dx = R\,d\theta$ ← ser ut som icke-holonomt, med vi kan istället skriva

$f_1 = x - R\theta = 0 \Rightarrow$ Holonomt

$\Rightarrow \sum_k \nabla_k f_1 \cdot d\bar r_k = dx - R\,d\theta = 0$

Ex på icke-integrerbart: mynt som rullar på xy-planet.

Def: <u>reonoma</u> tvång beror explicit av tiden

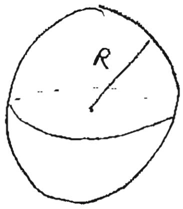
<u>skleronoma</u> tvång beror ej explicit av tiden

<u>Anm</u>. Det finns även andra typer av tvångsvillkor (t ex olikheter)

Not Vi kommer bara att behandla holonoma tvång.

<u>Generaliserade koordinater</u> En uppsättning oberoende koordinater som tar hänsyn till tvångsvillkoren.

<u>Ex</u>. Partikel på ytan av en sfär



$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 = R$$

$$f = 3n - 1 = 3 - 1 = 2$$

$\{x, y, z\}$ beroende $\qquad \{\theta, \varphi\}$ oberoende

Generaliserade koordinater $\begin{cases} q_1 = \theta \\ q_2 = \varphi \end{cases}$

<u>Allm</u>: $\{\bar{r}_1, \bar{r}_2, .., \bar{r}_n\} \rightarrow \{q_1, \dots, q_f\}$; $f = 3n - 1$

D'Alemberts princip

Betrakta ett system av n partiklar med massor $\{m_i\}$ och koordinater $\{\bar{r}_i\}$ som utsätts för tvångsvillkoren

$$f_\lambda(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n, t) = 0 \quad , \quad \lambda = 1, \ldots, \Lambda$$

> **Def:** En <u>virtuell</u> förflyttning $\{\delta \bar{r}_i\}$ är en godtycklig infinitesimal ändring av koordinaterna vilka uppfyller tvångsvillkoren.

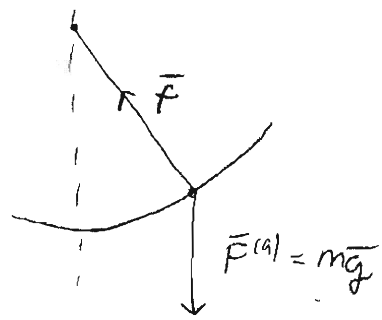
Obs! Beteckning: $\begin{cases} \delta \bar{r} & \text{- virtuell förflyttning} \\ d\bar{r} & \text{- reell förflyttning} \end{cases}$

Den virtuella förflyttningen berör endast koordinaterna, <u>ej tiden</u>!

Totala kraften: $\bar{F}_i = \bar{F}_i^{(a)} + \bar{f}_i$

$$\begin{cases} \bar{F}_i^{(a)} = \text{dynamiska (applicerade) kraften} \\ \bar{f}_i = \text{tvångskraften} \end{cases}$$

<u>Ex</u> Pendel



Def: Det virtuella arbetet ges av

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_i^{(a)} + \bar{f}_i) \cdot \delta \bar{r}_i$$

"Normalt" uträttar tvångskrafterna inget arbete vid en virtuell förflyttning.

Antag att

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

Statiska fallet

Om systemet är i jämvikt gäller

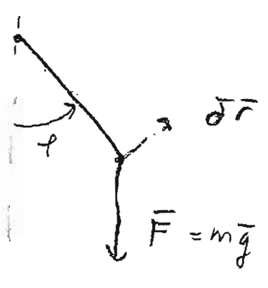
$$\bar{F}_i = 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \sum_i \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0 \Rightarrow \sum_i (\bar{F}_i^{(a)} + \bar{f}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{(a)} \cdot \delta \bar{r}_i = 0}$$

Detta kallas virtuella arbetets princip

Tolkning: Ett jämviktsvillkor är att de applicerade krafternas virtuella arbete skall vara noll.

Ex: Pendel



$\bar{F} \cdot \delta \bar{r} = 0$ då $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$

dvs vid jämvikt.

Dynamiska fallet

Om systemet rör sig gäller

$$\bar{F}_i - \dot{\bar{p}}_i = 0 \Rightarrow \sum_i (\bar{F}_i - \dot{\bar{p}}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

$$\sum_i \bar{f}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_i (\bar{F}_i^{(a)} - \dot{\bar{p}}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0} \qquad (1)$$

Detta är <u>d'Alemberts princip</u>. Jfr. övn ex. 22 – 24!

Obs! Vi kan ej dra slutsatsen $\bar{F}_i^{(a)} = \dot{\bar{p}}_i$ pga att $\delta \bar{r}_i$ ej är oberoende koordinater. Eftersom tvångskrafterna nu är borta stryk $^{(a)}$ för att få mindre att skriva: $\bar{F}^{(a)} \rightarrow \bar{F}$

Inför nu generaliserade koordinater $q_1, \ldots, q_f$, $f = 3n - \Lambda$, dvs oberoende koordinater som tar hänsyn till tvångsvillkoren

$$f_\lambda(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n, t) = 0 \qquad \lambda = 1, \ldots, \Lambda$$

Uttryck nu $\bar{r}_i$ som funktion av q_j

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(\underbrace{q_1, q_2, \ldots, q_f}_{\text{Oberoende}}, t) \qquad i = 1, \ldots, n$$

Då följer

$$\bar{v}_i = \dot{\bar{r}}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}} \qquad (2)$$

Vi får också

$$\delta \bar{r}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Anm. Ingen tidsderivata eftersom virtuella förflyttningar sker vid fix tid.

Vi kan nu skriva

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{F} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right)}_{Q_k} \delta q_k$$

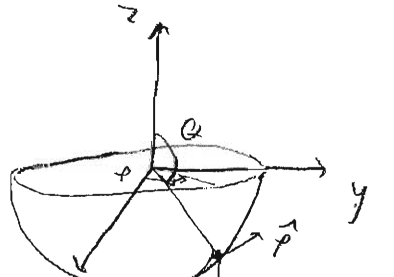
Kom ihåg $\bar{F}$ är egentligen den applicerade kraften $\bar{F}^{(a)}$

Def: $$\boxed{Q_k = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \text{generaliserade kraften}}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{k=1}^{f} Q_k \delta q_k \qquad (3)$$

Anm: Q_k behöver ej vara av dimension kraft.

Ex Partikel på ytan av en skål i ett gravitationsfält



$$\begin{cases} q_1 = \theta \\ q_2 = \varphi \end{cases} \qquad \bar{r} = R\hat{r}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = R\hat{\theta} \\[2ex] \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = R\sin\theta\,\hat{\varphi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \bar{F} \cdot \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = -Rmg\,\hat{z}\cdot\hat{\theta} = Rmg\sin\theta \\[2ex] Q_2 = \bar{F} \cdot \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} = -Rmg\sin\theta\,\hat{z}\cdot\hat{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Betrakta nu den andra termen i ekv. (1)

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\bar{p}}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\bar{r}}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\bar{r}}_i \cdot \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Men vi kan skriva

$$\ddot{\bar{r}}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\dot{\bar{r}}_i}_{=\bar{v}_i} \cdot \underbrace{\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}}_{=\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\ (\text{ekv}(2))}\Big) - \underbrace{\dot{\bar{r}}_i}_{=\bar{v}_i} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}}_{= \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{d}{dt}\bar{r}_i = \frac{\partial}{\partial q_k}\dot{\bar{r}}_i = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k}}$$

$$\Rightarrow \ddot{\bar{r}}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\bar{r}}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n} \Big\{ m_i \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_i^2}{\partial \dot{q}_k}\right)} - m_i \underbrace{\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k}}_{\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}\bar{v}_i^2\right)} \Big\} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2\right)}_{T} - \frac{\partial}{\partial q_k}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2\right)}_{T}$$

kinetisk energi

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \dot{\bar{p}}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) \delta q_k} \qquad (4)$$

Nu följer att

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{F} - \dot{\bar{p}}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

$$\Downarrow \quad \text{ekv. (3) och (4)}$$

$$\sum_{k=1}^{f} \left[Q_k - \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right\} \right] \delta q_k = 0 \qquad (5)$$

Men nu är q_k oberoende $\Rightarrow$ Ekv. (5) måste gälla för godtyckliga δq_k (sätt tex alla δq_k utom ett till 0)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad k = 1, \dots, f}$$

Detta är Lagranges ekvationer i generell form.

Ex partikel på ytan av en sfär (enligt tidigare)

$$\begin{cases} q_1 = \theta \\ q_2 = \varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_1 = Rmg \sin\theta \\ Q_2 = 0 \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m (v_\theta^2 + v_\varphi^2) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \left\{ \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1 \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(m R^2 \dot{q}_1\right) - m R^2 \dot{q}_2^2 \sin q_1 \cos q_1 = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{d}{dt}\left(m R^2 \dot{q}_2 \sin^2 q_1\right) - 0 = Q_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 - \left[\dot{q}_2^2 \cos q_1 + \frac{g}{R} \right] \sin q_1 = 0 \\ \frac{d}{dt} \left[\dot{q}_2 \sin^2 q_1 \right] = 0 \end{cases}$$

Våra rörelseekvationer!

Not: $\dot{q}_2 = 0 \Rightarrow$ vanlig plan pendel

ii/ ekv. (2) $\Rightarrow \dot{q}_2 = A / \sin^2 q_1 \Rightarrow$ Ekv. för q_1 är separabel.

Lagranges ekvationer

Antag att $\bar{F}_i$ kan härledas ur en potential V,

$$\bar{F}_i = -\nabla_i V(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n, t)$$

Då gäller

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_i V \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial}{\partial q_k} V(q_1, \ldots, q_f, t)$$

$\Rightarrow$ Q_k är också potentialkrafter!

Eftersom $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} V = 0$ kan vi nu skriva Lagranges ekv. som

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \ldots, f$$

<u>Def</u> <u>Lagrangefunktionen</u> $L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$ ges av

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k) - V(q_k, t)$$

och den uppfyller <u>Lagranges ekvationer</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \ldots, f$$

Jfr. övn ex 2.5, 6, 10-13 !

Anm: Den kinetiska energin ges av

$$T = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

$$= a + \sum_{k=1}^{f} b_k \dot{q}_k + \sum_{k,l}^{f} c_{kl}\dot{q}_k \dot{q}_l$$

med

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\right)^2 \\ b_k = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \\ c_{kl} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} \end{cases}$$

Skleronoma tvångsvillkor $\Rightarrow$ $a = 0$, $b_k = 0$

EX Partikel på ytan av sfär i gravitationsfält (enl. tidigare)

$$\begin{cases} q_1 = \theta \\ q_2 = \varphi \end{cases} \qquad T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$
$$V = mgz = mgR\cos\theta$$

Obs! θ är vinkeln från "nordpolen"

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - mgR\cos\theta$$

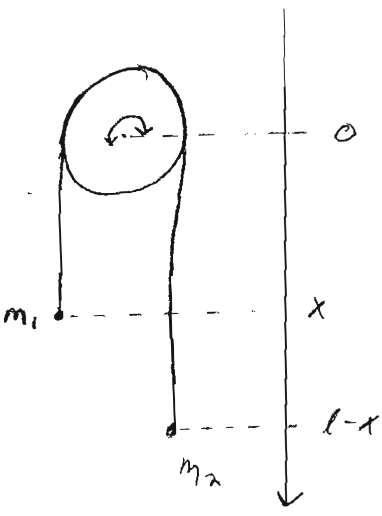
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi}\sin^2\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\theta}) - mR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta = 0 \\ \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\varphi}\sin^2\theta) = 0 \end{cases}$$

Samma ekv som tidigare!

Exempel

a) Atwoods maskin



$$T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2$$

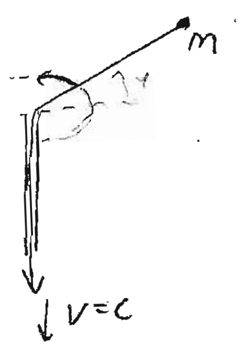
$$V = -m_1 g x - m_2 g(l-x)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + m_1 g x + m_2 g(l-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x} \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial x} = (m_1-m_2)g \end{cases} \qquad \Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{x} - (m_1-m_2)g = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\, g$$

b)



Generaliserad koordinat: φ

$$\begin{cases} x = (R_0 - ct)\cos\varphi \\ y = (R_0 - ct)\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -c\cos\varphi - (R_0-ct)\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{y} = -c\sin\varphi + (R_0-ct)\cos\varphi\,\dot{\varphi} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) =$$

$$= \frac{1}{2}m\Big[c^2\cos^2\varphi + (R_0-ct)^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + 2c(R_0-ct)\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$+ c^2\sin^2\varphi + (R_0-ct)^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 - 2c(R_0-ct)\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\dot{\varphi}^2(R_0-ct)^2 + c^2\right] \quad \leftarrow \text{Notera konstanten } \frac{1}{2}mc^2 \text{ pga. reonomt tvång!}$$

$$V = 0 \Rightarrow L = T - V = T$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{\varphi}(R_0-ct)^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow m\dot{\varphi}(R_0-ct)^2 = A = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \frac{A}{mc(R_0-ct)}$$