Repetition av Newtonmekanik

1 Newtons lagar (1687)

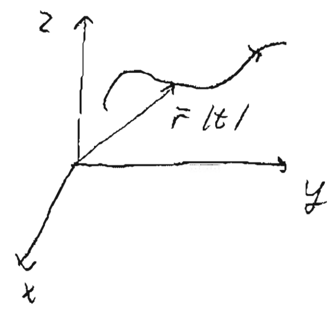
I. Varje kropp fortsätter i sitt tillstånd av vila eller likformig rätlinjig rörelse om den inte av krafter tvingas att ändra tillstånd

II. Rörelseförändringen är proportionell mot de applicerade krafterna och äger rum i den riktning som krafterna verkar.

III. För varje kraft finns det alltid en lika stor motkraft; de ömsesidiga kraftverkningarna mellan två kroppar är alltid lika stora och motsatt riktade

kropp = partikel med massa m (t.ex. punktmassa eller masscentrum för en utbredd massfördelning)

rörelse = $\bar{r}(t)$ - ortsvektorn



Rummet är homogent och isotropt. $\mathbb{E}^3$ (punkter)

Definieras en referenspunkt (origo) $\Rightarrow$ vektorrum $\mathbb{R}^3$ (vektorer)

Likformig rätlinjig rörelse i tröghetssystem

$$\ddot{\bar{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{r}(t) = \bar{r}^0 + \bar{v}^0 t$$

där $\begin{cases} \bar{r}^0 = \bar{r}\,(t=0) \\ \bar{v}^0 = \bar{v}\,(t=0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{v}(t) = \bar{v}^0 \\ \bar{a}(t) = \bar{0} \end{cases}$$

Vi har ett lösbart homogent system av differentialekvationer med begynnelsevillkoren $\bar{r}(0) = \bar{r}^0$, $\bar{v}(0) = \bar{v}^0$

<u>Def</u>: Referenssystem i vilka Newtons första lag kan skrivas $\ddot{\bar{r}}(t) = 0$ kallas <u>tröghetssystem</u>.

- I tröghetssystem gäller Newtons andra lag på formen

$$m\ddot{\bar{r}}\,(t) = \bar{F}$$

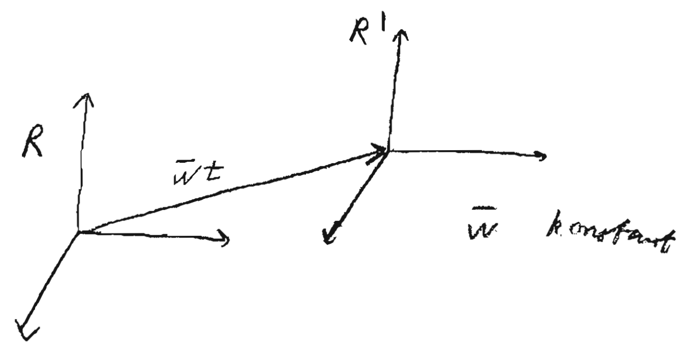
$\uparrow$ Resultanten av alla krafter som appliceras på kroppen

- I andra referenssystem blir Newtons andra lag mer komplicerad:

$$m\ddot{\bar{r}}\,(t) = \bar{F} + \bar{F}_{\text{tröghets}}$$

$\uparrow$ ex centrifugalkraft, Coriolis-kraft

Tröghetssystem i relativ rörelse



Om R är ett tröghetssystem så är varje system R' som rör sig med konstant hastighet relativt R också ett tröghetssystem.

$$\bar{r}'(t) = \bar{r}(t) - \bar{w}t$$

$\Rightarrow \ddot{\bar{r}}' = \ddot{\bar{r}} \quad \Rightarrow R'$ också tröghetssystem $\qquad$ Övn. ex 1.5!

Rörelsemängd och kraft

Def.: $\bar{p}(t) = m\dot{\bar{r}}(t)$ $\qquad$ m - trög massa

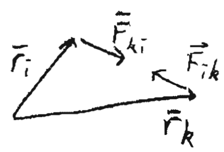
Newtons andra lag:

$$\frac{d}{dt}\bar{p}(t) = \bar{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t)$$

eller

$m\ddot{\bar{r}}(t) = \bar{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t)$ om m är tidsoberoende

Newtons tredje lag:



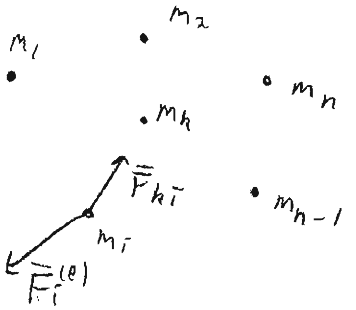
$\bar{r}_i(t)$ $\qquad i = 1, \dots, n$

$\bar{F}_{ik}$ = kraft från partikel i på partikel k

$$\bar{F}_{ik} = -\bar{F}_{ki}$$

Ändliga partikelsystem

Betrakta n massor, $m_1, m_2, \ldots, m_n$



Interna centralkrafter.

$$\bar{F}_{\underset{\text{från}}{k}\underset{\text{på}}{i}} = \underbrace{F_{ki}(r_{ki})}_{= F_{ik}(r_{ik})} \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_k}{r_{ik}}$$

Externa krafter: $\bar{F}_i^{(e)}$

Potential:

$$V_{ki}(r) = -\int_{r_0}^{r} F_{ki}(r')\,dr'$$

$$\bar{F}_{\underset{\text{från}}{k}\underset{\text{på}}{i}} = -\underbrace{\nabla_i}_{\text{gradienten m.a.p } i} V_{ki}(r)$$

$$r = \sqrt{(x^{(k)} - x^{(i)})^2 + (y^{(k)} - y^{(i)})^2 + (z^{(k)} - z^{(i)})^2}$$

$$\nabla_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}}, \frac{\partial}{\partial y^{(i)}}, \frac{\partial}{\partial z^{(i)}}\right)$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{\bar{r}}_1 = \bar{F}_{21} + \bar{F}_{31} + \cdots + \bar{F}_{n1} + \bar{F}_1^{(e)} \\ m_n\ddot{\bar{r}}_n = \bar{F}_{1n} + \bar{F}_{2n} + \ldots + \bar{F}_{n-1\,n} + \bar{F}_n^{(e)} \end{cases}$$

eller

$$\boxed{m_i\ddot{\bar{r}}_i = \sum_{k \neq i} \bar{F}_{ki} + \bar{F}_i^{(e)} \quad ; \quad \bar{F}_{ki} = -\bar{F}_{ik}}$$

Masscentrums rörelse

> Masscentrum S rör sig som en partikel med massa $M = \sum_i m_i$ påverkad av resultanten av de externa krafterna:
>
> $$M\ddot{\bar{R}} = \sum_i \bar{F}_i^{(e)} \quad ; \quad \bar{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \bar{r}_i$$

Bevis:

$$M\ddot{\bar{R}} = \sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i = \underbrace{\sum_i \sum_{k \neq i} \bar{F}_{ki}}_{0} + \sum_i \bar{F}_i^{(e)} = \sum_i \bar{F}_i^{(e)} \qquad \square$$

ty $\bar{F}_{ki} = -\bar{F}_{ik}$ Newton III

Rörelsemängdsmomentet

> Tidsderivatan av totala rörelsemängdsmomentet är lika med summan av alla externa kraftmoment.
>
> $$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \bar{l}_i\right) = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{(e)}$$

Bevis:

$$\frac{d}{dt}(\bar{l}_i) = m_i \frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times \dot{\bar{r}}_i) = m_i \bar{r}_i \times \ddot{\bar{r}}_i = \sum_{k \neq i} \bar{r}_i \times \bar{F}_{ki} + \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{(e)}$$

$$\sum_{k \neq i} \bar{r}_i \times \bar{F}_{ki} = \sum_{k \neq i} F_{ki} \frac{\bar{r}_i \times (\bar{r}_i - \bar{r}_k)}{r_{ik}} = -\sum_{k \neq i} F_{ki} \underbrace{\frac{\bar{r}_i \times \bar{r}_k}{r_{ik}}}_{\text{antisymmetrisk}} = \sum_{k \neq i} F_{ik} \frac{\bar{r}_k \times \bar{r}_i}{r_{ki}}$$

Summera över $i \Rightarrow$ alla termer med $\bar{F}_{ki}$ tar ut varandra.

$\square$

Energi

Tidsderivatan av totala inre energin är lika med totala effekten av de yttre krafterna:

$$\frac{d}{dt}(T+V) = \sum_i \bar{v}_i \cdot \bar{F}_i^{(e)}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i^{\,2} \equiv \sum_i T_i$$

$$V = \sum_i \sum_{k=i+1} V_{ik}(r_{ik}) \equiv V(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n)$$

Bevis:

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \underbrace{\sum_{k \neq i} \bar{F}_{ki}}_{-\nabla_i \sum_{k \neq i} V_{ki}(r_{ki})} + \bar{F}_i^{(e)}$$

$$\Rightarrow m_i \ddot{\bar{r}}_i \cdot \dot{\bar{r}}_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\bar{r}}_i^{\,2}\right) = -\dot{\bar{r}}_i \cdot \nabla_i \sum_{k \neq i} V_{ki}(r_{ki}) + \dot{\bar{r}}_i \cdot \bar{F}_i^{(e)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{r}}_i^{\,2}\right) = -\sum_i \sum_{k \neq i} \dot{\bar{r}}_i \cdot \nabla_i V_{ki}(r_{ki}) + \sum_i \dot{\bar{r}}_i \cdot \bar{F}_i^{(e)}$$

Notera att

$$\dot{\bar{r}}_a \cdot \nabla_a \underset{\substack{\parallel \\ V_{ab}}}{V_{ba}} + \dot{\bar{r}}_b \nabla_b V_{ab} = (\dot{\bar{r}}_a \cdot \nabla_a + \dot{\bar{r}}_b \cdot \nabla_b) V_{ab} = \frac{d}{dt} V_{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{r}}_i^{\,2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\sum_i \sum_{\underset{\text{OBS!}}{k=i+1}} V_{ik}(r_{ik})\right) = \sum_i \dot{\bar{r}}_i \cdot \bar{F}_i^{(e)}$$

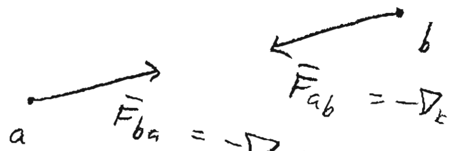
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(T+V) = \sum_i \dot{\bar{r}}_i \cdot \bar{F}_i^{(e)} \quad \square$$

Notera

$$V(\bar r_1, \bar r_2, \dots, \bar r_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} V_{ik}(r_{ik}) = \sum_{k>i} V_{ik}(r_{ik})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} U_{ik}(r_{ik})$$

$\therefore$ En potential per partikelpar.

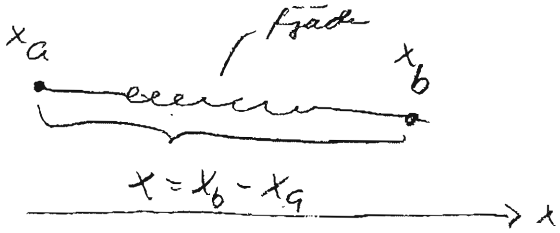


$$\bar F_{ab} = -\nabla_b V_{ab}$$

$$\bar F_{ba} = -\nabla_a V_{ab}$$

Exempel

1)



$$V = \frac{1}{2} k (x - L)^2$$

$$\bar F_{ba} = -\nabla_a V = -\hat x (\overbrace{x_b - x_a}^{x} - L)(-1) = \hat x\, k (x - L)$$

$$\bar F_{ab} = -\nabla_b V = -\hat x (x_b - x_a - L)(+1) = -\hat x\, k (x - L)$$

$$x > L \Rightarrow \begin{cases} \bar F_{ba} \parallel \hat x \\ \bar F_{ab} \parallel -\hat x \end{cases}$$

elektrostatiskt fall

2/

$\bar{r}_a$ $\bar{r}_b$ $V = \dfrac{A}{r_{ab}}$

$$\bar{F}_{ba} = -\nabla_a V = \underbrace{-\frac{dV}{dr_{ab}}}_{\frac{A}{r_{ab}^2} > 0} \underbrace{\nabla_a r_{ab}}_{\frac{\bar{r}_a - \bar{r}_b}{r_{ab}}} = \frac{A}{r_{ab}^3}(\bar{r}_a - \bar{r}_b)$$

*) Se nedan!

$$\bar{F}_{ab} = -\nabla_b V = -\frac{dV}{dr_{ab}} \nabla_b r_{ab} = \frac{A}{r_{ab}^3}(\bar{r}_b - \bar{r}_a)$$

$\Rightarrow$

OK.

*) Nob

$$\nabla_a r_{ab} = \left(\frac{\partial}{\partial x_a}, \frac{\partial}{\partial y_a}, \frac{\partial}{\partial z_a}\right)\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2+(z_a-z_b)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2+(z_a-z_b)^2}}\Big(2(x_a-x_b),\ 2(y_a-y_b),\ 2(z_a-z_b)\Big) =$$

$$= \frac{\bar{r}_a - \bar{r}_b}{r_{ab}}$$

1.12 Det (slutna) isolerade n-partikelsystemet

Slutet: alla yttre krafter = 0

a/ $M\ddot{\bar{R}} = 0 \Rightarrow M\dot{\bar{R}} = \bar{P} = \text{konst}$

$$\bar{R}(t) = \frac{1}{M}\bar{P}t + \bar{R}(0)$$

$\boxed{\text{Rörelsemängden bevaras}}$ (3 rörelsekonstanter)

b/ $\sum \bar{r}_i \times \bar{p}_i = \sum \bar{l}_i = \bar{L} = \text{konst.}$

$\boxed{\text{Rörelsemängdsmomentet bevaras}}$ (3 rörelsekonstanter)

c/ $T + V = \sum \frac{1}{2m_i} p_i^2 + \sum_{k>i} V_{ik}(r_{ik}) \equiv E = \text{konst}$

$\boxed{\text{Totala energin bevaras}}$ (1 rörelsekonstant)

Jfr. övn. ex 1.7, 13 !

1.15 Konservativa kraftfält

För konservativa krafter gäller

$$\bar{F} = -\nabla V(\bar{r})$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} (\bar{F}\cdot d\bar{s}) = -\left[V(\bar{r}) - V(\bar{r}_0)\right]$$ – arbetet beror ~~ej~~ på vägen

$$\Rightarrow \oint_{\bar{r}} (\bar{F}\cdot d\bar{s}) = 0$$

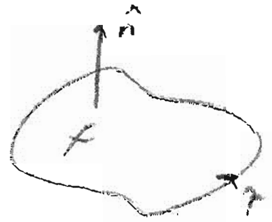
$$V \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\nabla} \times \bar{F} = 0}$$

* Nödvändigt villkor för kons kraft
* Tillräckligt ——— " ———
i enkelt sammanhängande område

Visas mha Stokes sats:

$$\oint_{\Gamma} (\bar{F}\cdot d\bar{s}) = \iint_S (\bar{\nabla}\times\bar{F})\cdot\hat{n}\, df$$



Exempel

i) Centralkraft $\bar{F}(\bar{r}) = f(r)\bar{r}$

$$\left[\bar{\nabla}\times(f(r)\bar{r})\right]_x = \frac{\partial}{\partial y}(f(r)z) - \frac{\partial}{\partial z}(f(r)y) = z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z} = z\frac{\partial f}{\partial r}\underbrace{\frac{\partial r}{\partial y}}_{\frac{y}{r}} - y\frac{\partial f}{\partial r}\underbrace{\frac{\partial r}{\partial z}}_{\frac{z}{r}} =$$

$$= \frac{1}{r}(zy - yz)\frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad \text{p.s.s. för } y \text{ \& } z.$$

ii) Magnetfält från rak ledare

$$F_x = -B\frac{y}{\rho^2} \quad ; \quad F_y = B\frac{x}{\rho^2} \quad ; \quad F_z = 0$$

$$(\bar{\nabla}\times\bar{F})_x = (\bar{\nabla}\times\bar{F})_y = 0$$

$$(\bar{\nabla}\times\bar{F})_z = B\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{2x^2}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2y^2}{\rho^4}\right) = 0 \quad \forall \rho \neq 0$$

Kanonisk mekanik

1. Formulera mekaniken m.h.a kinetisk och potentiell energi:

$$\begin{cases} L = T - V = L(q, \dot{q}, t) \\ H = T + V = H(q, p, t) \end{cases}$$

2 Utveckla formalism för variabelbyten:

$$(q, p) \longrightarrow (Q, P)$$
$$\uparrow$$
Φ genererande funktion

3 Härled ekvation för sådan genererande funktion så att rörelseproblemet blir trivialt:

$$\begin{cases} H\left(q, \dfrac{\partial S^{\kappa}}{\partial q}\, t\right) = -\dfrac{\partial S^{\kappa}}{\partial t} \\ H\left(q, \dfrac{\partial S}{\partial q}\right) = E \end{cases}$$

$$\swarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \searrow$$

Kvantmekanik — Kvalitativ mekanik — Relativistisk mekanik

Den kanoniska mekanikens principer

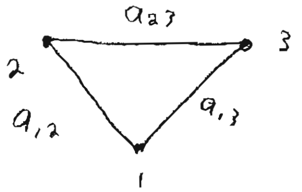
Tvångsvillkor och generaliserade koordinater

Def: (i) Holonoma tvångsvillkor

$$f_\lambda(\bar r_1, \bar r_2, \dots, \bar r_n, t) = 0 \qquad \lambda = 1, \dots, \Lambda$$

Oberoende. Matrisen $\left\{ \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial \bar r_k} \right\}$ har rang Λ — $\{(\nabla_k f_\lambda)\}$

Ex: 3 partiklar med konstanta avstånd



$$\begin{cases} f_1 = |\bar r_1 - \bar r_2| - a_{12} = 0 \\ f_2 = |\bar r_1 - \bar r_3| - a_{13} = 0 \\ f_3 = |\bar r_2 - \bar r_3| - a_{23} = 0 \end{cases} \qquad \Lambda = 3$$

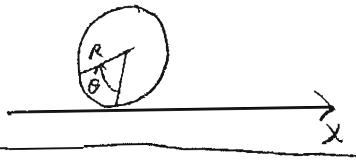
Antal frihetsgrader: $f = 3n - \Lambda = 9 - 3 = 6$

Def: (ii) Icke-holonoma tvångsvillkor

$$\sum_{k=1}^{n} \bar\omega_k^\lambda(\bar r_1, \dots, \bar r_n, t) \cdot d\bar r_k = 0 \qquad \lambda = 1, \dots, \Lambda \qquad (*)$$

Ibland kan uttrycket $(*)$ integreras till holonoma tvång. Icke-holonoma tvång är ej integrerbara, dvs det finns inga funktioner f_λ så att villkoren $(*)$ kan skrivas $df_\lambda = 0$.

Ex på integrerbart sorten: Cylinder som rullar



$dx = R\,d\theta$ ← ser ut som icke-holonomt, med vi kan istället skriva

$f_1 = x - R\theta = 0 \Rightarrow$ Holonomt

$\Rightarrow \sum_k \nabla_k f_1 \cdot d\bar r_k = dx - R\,d\theta = 0$

Ex på icke-integrerbart: mynt som rullar på xy-planet.

Def: reonoma tvång beror explicit av tiden

skleronoma tvång beror ej explicit av tiden

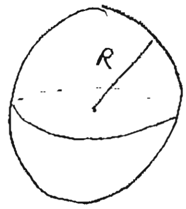
Anm. Det finns även andra typer av tvångsvillkor (t.ex olikheter)

Not Vi kommer bara att behandla holonoma tvång.

Generaliserade koordinater

En uppsättning oberoende koordinater som tar hänsyn till tvångsvillkoren.

Ex. Partikel på ytan av en sfär



$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 = R$$

$$f = 3n - 1 = 3 - 1 = 2$$

$\{x, y, z\}$ beroende $\qquad \{\theta, \varphi\}$ oberoende

Generaliserade koordinater: $\begin{cases} q_1 = \theta \\ q_2 = \varphi \end{cases}$

Allm: $\{\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n\} \to \{q_1, \ldots, q_f\}$; $f = 3n - 1$

D'Alemberts princip

Betrakta ett system av n partiklar med massor $\{m_i\}$ och koordinater $\{\bar{r}_i\}$ som utsätts för tvångsvillkoren

$$f_\lambda(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n, t) = 0 \quad , \quad \lambda = 1, \ldots, \Lambda$$

Def: En <u>virtuell</u> förflyttning $\{\delta \bar{r}_i\}$ är en godtycklig infinitesimal ändring av koordinaterna vilka uppfyller tvångsvillkoren.

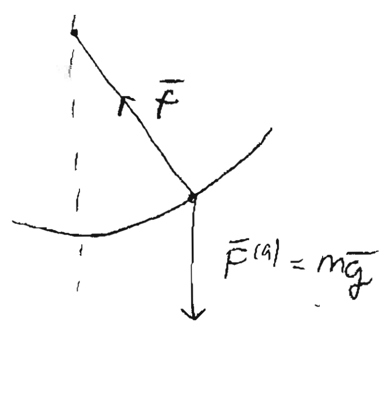
Obs! Beteckning: $\begin{cases} \delta \bar{r} & \text{- virtuell förflyttning} \\ d\bar{r} & \text{- reell förflyttning} \end{cases}$

Den virtuella förflyttningen beror endast koordinaterna, <u>ej tiden</u>!

Totala kraften: $\bar{F}_i = \bar{F}_i^{(a)} + \bar{f}_i$

$$\begin{cases} \bar{F}_i^{(a)} = \text{dynamiska (applicerade) kraften} \\ \bar{f}_i = \text{tvångskraften} \end{cases}$$

<u>Ex</u> Pendel



<u>Def</u>: Det virtuella arbetet ges av

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_i^{(a)} + \bar{f}_i) \cdot \delta \bar{r}_i$$

"Normalt" uträttar tvångskrafterna inget arbete vid en virtuell förflyttning.

Antag att

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

<u>Statiska fallet</u>

Om systemet är i jämvikt gäller

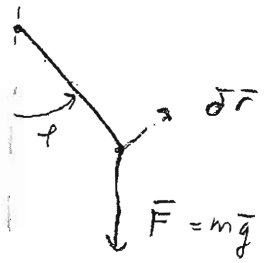
$$\bar{F}_i = 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \sum_i \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0 \Rightarrow \sum_i (\bar{F}_i^{(a)} + \bar{f}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{(a)} \delta \bar{r}_i = 0}$$

Brukar kallas <u>virtuella arbetets princip</u>

Tolkning: Ett jämviktsvillkor är att de applicerade krafternas virtuella arbete skall vara noll.

<u>Ex</u>: Pendel



$\bar{F} \cdot \delta \bar{r} = 0$ då $\varphi = 0, \varphi = \pi$

dvs vid jämvikt.

Dynamiska fallet

Om systemet rör sig gäller

$$\bar{F}_i - \dot{\bar{p}}_i = 0 \Rightarrow \sum_i (\bar{F}_i - \dot{\bar{p}}_i)\cdot\delta\bar{r}_i = 0$$

$$\sum_i \bar{f}_i \cdot \delta\bar{r}_i = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_i (\bar{F}_i^{(a)} - \dot{\bar{p}}_i)\cdot\delta\bar{r}_i = 0} \qquad (1)$$

Detta är d'Alemberts princip. Jfr. övn ex. 22 – 24!

Obs! Vi kan ej dra slutsatsen $\bar{F}_i^{(a)} = \dot{\bar{p}}_i$ pga att $\delta\bar{r}_i$ ej är oberoende koordinater. Eftersom tvångskrafterna nu är borta stryk $^{(a)}$ för att få mindre att skriva: $\bar{F}^{(a)} \rightarrow \bar{F}$

Inför nu generaliserade koordinater $q_1, \ldots, q_f$, $f = 3n - \Lambda$, dvs oberoende koordinater som tar hänsyn till tvångsvillkoren

$$f_\lambda(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n, t) = 0 \qquad \lambda = 1, \ldots, \Lambda$$

Uttryck nu $\bar{r}_i$ som funktion av q_j

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(\underbrace{q_1, q_2, \ldots, q_f}_{\text{Oberoende}}, t) \qquad i = 1, \ldots, n$$

Då följer

$$\bar{v}_i = \dot{\bar{r}}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}} \qquad (2)$$

Vi får också

$$\delta \bar{r}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Anm. Ingen tidsderivata eftersom virtuella förflyttningar sker vid fix tid.

Vi kan nu skriva

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{F} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right)}_{Q_k} \delta q_k$$

Kom ihåg $\bar{F}$ är egentligen den applicerade kraften $\bar{F}^{(a)}$

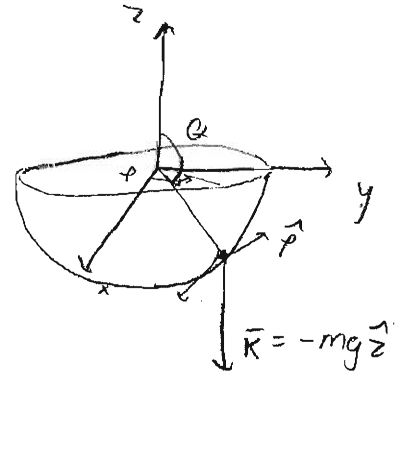
Def:

$$\boxed{Q_k = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \text{generaliserade kraften}}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{k=1}^{f} Q_k \delta q_k \qquad (3)$$

Anm: Q_k behöver ej vara av dimension kraft.

Ex Partikel på ytan av en skål i ett gravitationsfält



$$\begin{cases} q_1 = \theta \\ q_2 = \varphi \end{cases} \qquad \bar{r} = R\hat{r}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = R\hat{\theta} \\ \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = R\sin\theta\, \hat{\varphi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \bar{F} \cdot \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = -Rmg\,\hat{z}\cdot\hat{\theta} = Rmg\sin\theta \\ Q_2 = \bar{F} \cdot \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} = -Rmg\sin\theta\,\hat{z}\cdot\hat{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Betrakta nu den andra termen i ekv. (1)

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\bar{p}}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\bar{r}}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\bar{r}}_i \cdot \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Men vi kan skriva

$$\ddot{\bar{r}}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\dot{\bar{r}}_i}_{=\bar{v}_i} \cdot \underbrace{\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}}_{=\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\ (\text{ekv}(2))}\Big) - \underbrace{\dot{\bar{r}}_i}_{=\bar{v}_i} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}}_{= \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{d}{dt}\bar{r}_i = \frac{\partial}{\partial q_k}\dot{\bar{r}}_i = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k}}$$

$$\Rightarrow \ddot{\bar{r}}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\bar{r}}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ m_i \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_i^2}{\partial \dot{q}_k}\right)} - m_i \underbrace{\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k}}_{\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}\bar{v}_i^2\right)} \right\} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2\right)}_{T} - \frac{\partial}{\partial q_k}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2\right)}_{T}$$

kinetisk energi

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \dot{\bar{p}}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right) \delta q_k} \qquad (4)$$

Nu följer att

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{F} - \dot{\bar{p}}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

$$\Downarrow \quad \text{ekv. (3) och (4)}$$

$$\sum_{k=1}^{f} \left[Q_k - \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right\} \right] \delta q_k = 0 \qquad (5)$$

Men nu är q_k <u>oberoende</u> $\Rightarrow$ Ekv. (5) måste gälla för godtyckliga δq_k (sätt t.ex. alla δq_k utom ett till 0)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad k = 1, \dots, f}$$

Detta är <u>Lagranges ekvationer i generell form.</u>

<u>Ex</u> partikel på ytan av en sfär (enligt tidigare)

$$\begin{cases} q_1 = \theta \\ q_2 = \varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_1 = Rmg \sin\theta \\ Q_2 = 0 \end{cases}$$

$$T = \tfrac{1}{2} m (v_\theta^2 + v_\varphi^2) = \tfrac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} m R^2 \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2} m R^2 \left\{ \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1 \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(m R^2 \dot{q}_1\right) - m R^2 \dot{q}_2^2 \sin q_1 \cos q_1 = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{d}{dt}\left(m R^2 q_2 \sin^2 q_1\right) - 0 = Q_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 - \left[\dot{q}_2^2 \cos q_1 + \frac{g}{R} \right] \sin q_1 = 0 \\ \frac{d}{dt} \left[\dot{q}_2 \sin^2 q_1 \right] = 0 \end{cases}$$

Våra rörelseekvationer!

Not: i) $\dot{q}_2 = 0 \Rightarrow$ vanlig plan pendel.
ii) ekv. (2) $\Rightarrow \dot{q}_2 = A/\sin^2 q_1 \Rightarrow$ Ekv. för $\dot{q}_1$ är separabel.

Lagranges ekvationer

Antag att $\bar{F}_i$ kan härledas ur en potential V,

$$\bar{F}_i = -\nabla_i V(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n, t)$$

Då gäller

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_i V \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial}{\partial q_k} V(q_1, \ldots, q_f, t)$$

$\Rightarrow$ Q_k är också potentialkrafter!

Eftersom $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} V = 0$ kan vi nu skriva Lagranges ekv. som

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \ldots, f$$

<u>Def</u> <u>Lagrangefunktionen</u> $L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$ ges av

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k) - V(q_k, t)$$

och den uppfyller <u>Lagranges ekvationer</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \ldots, f$$

Jfr. övn ex 2.5, 6, 10-13!

Anm: Den kinetiska energin ges av

$$T = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

$$= a + \sum_{k=1}^{f} b_k \dot{q}_k + \sum_{k,l}^{f} c_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

med

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ b_k = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \\ c_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} \end{cases}$$

Skleronoma tvångsvillkor $\Rightarrow$ $a = 0$, $b_k = 0$

EX Partikel på ytan av sfär i gravitationsfält (enl. tidigare)

$$\begin{cases} q_1 = \theta \\ q_2 = \varphi \end{cases} \qquad \begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2) \\ V &= mgz = mg R \cos\theta \end{aligned}$$

Obs! θ är vinkeln från "nordpolen"

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - mgR\cos\theta$$

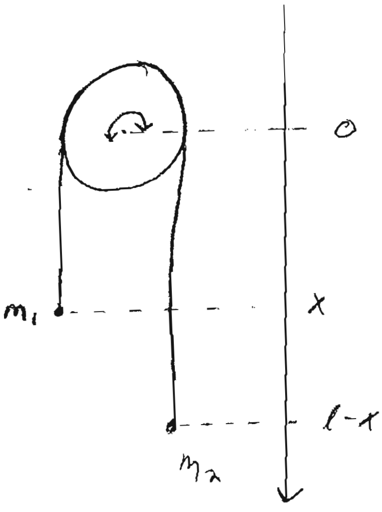
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \dot{\varphi} \sin^2\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2 \dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\theta}) - mR^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta = 0 \\ \frac{d}{dt}(mR^2 \dot{\varphi} \sin^2\theta) = 0 \end{cases}$$

Samma ekv som tidigare!

Exempel

a) Atwoods maskin



$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2$$

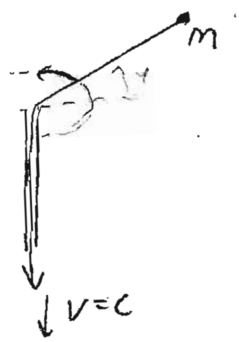
$$V=-m_1 g x - m_2 g(l-x)$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+m_1 g x + m_2 g(l-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x} \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial x} = (m_1-m_2)g \end{cases} \qquad \Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{x} - (m_1-m_2)g=0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$$

b)



Generaliserad koordinat: φ

$$\begin{cases} x=(R_0-ct)\cos\varphi \\ y=(R_0-ct)\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}=-c\cos\varphi-(R_0-ct)\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{y}=-c\sin\varphi+(R_0-ct)\cos\varphi\,\dot{\varphi} \end{cases}$$

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=$$

$$=\frac{1}{2}m\Big[c^2\cos^2\varphi+(R_0-ct)^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2+2c(R_0-ct)\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$+c^2\sin^2\varphi+(R_0-ct)^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2-2c(R_0-ct)\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2}m\left[\dot{\varphi}^2(R_0-ct)^2+c^2\right]$$ ← Notera konstanten $\frac{1}{2}mc^2$ pga. reonomt tvång!

$$V=0 \Rightarrow L=T-V=T$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=\frac{d}{dt}\left(m\dot{\varphi}(R_0-ct)^2\right)=0$$

$$\Rightarrow m\dot{\varphi}(R_0-ct)^2=A=\text{konst.}$$

$$\Rightarrow \varphi=\varphi_0+\frac{A}{mc(R_0-ct)}$$

Generaliserade potentialer

Betrakta följande exempel med en laddad partikel i ett elektromagnetiskt fält.

Låt generaliserade koordinaterna vara $\bar{r} = (x, y, z)$

Vi vet sedan tidigare att

$$m\ddot{\bar{r}} = q\bar{E}(\bar{r},t) + \frac{q}{c}\bar{v}(t) \times \bar{B}(\bar{r},t) \qquad = \text{Lorentzkraften}$$

↑ laddningen

Notera att

$$\begin{cases} \bar{E}(\bar{r},t) = -\nabla\phi(\bar{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\bar{A}(\bar{r},t) \\ \bar{B}(\bar{r},t) = \bar{\nabla} \times \bar{A}(\bar{r},t) \end{cases}$$

där ϕ är skalärpotentialen och $\bar{A}$ är vektorpotentialen.

Def: Den generaliserade potentialen ges av

$$U(\bar{r},\dot{\bar{r}},t) = q\phi(\bar{r},t) - \frac{q}{c}\dot{\bar{r}}\cdot\bar{A}(\bar{r},t)$$

$$\Rightarrow \quad L(\bar{r},\dot{\bar{r}},t) = \frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - q\phi(\bar{r},t) + \frac{q}{c}\dot{\bar{r}}\cdot\bar{A}(\bar{r},t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r_i} = -q\frac{\partial\phi}{\partial r_i} + \frac{q}{c}\sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k\frac{\partial A_k}{\partial r_i} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) = m\ddot{r}_i + \frac{q}{c}\frac{dA_i}{dt} = m\ddot{r}_i + \frac{q}{c}\left[\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial r_k}\dot{r}_k + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right] \end{cases}$$

L.E. $\Rightarrow$

$$m\ddot{r}_i + \frac{q}{c}\left[\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial r_k}\dot{r}_k + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right] + q\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} - \frac{q}{c}\sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k\frac{\partial A_k}{\partial r_i} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{r}_i = q\underbrace{\left[-\frac{\partial\Phi}{\partial r_i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right]}_{E_i} + \frac{q}{c}\underbrace{\sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k\left[\frac{\partial A_k}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_k}\right]}_{(\bar{v}\times\bar{B})_i} \qquad (*)$$

Att sista summan är lika med $(\bar{v}\times\bar{B})_i$ visas enkelt.
Med Einsteins summakonvention (summera över lika index) har vi

$$(\bar{v}\times\bar{B})_i = \varepsilon_{ijk} v_j B_k = \varepsilon_{ijk} v_j (\bar{\nabla}\times\bar{A})_k =$$

$\uparrow$ Levi-Civita-symbolen

$$= \varepsilon_{ijk} v_j \varepsilon_{klm}\partial_l A_m = \underbrace{\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}} v_j \partial_l A_m =$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) v_j \partial_l A_m = v_j\partial_i A_j - v_j \partial_j A_i$$

Åter inför Σ och byt $j\to k$ $\Rightarrow$

$$(\bar{v}\times\bar{B})_i = \sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k\left(\frac{\partial A_k}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_k}\right)$$

vilket är precis sista summan i ekv. (*).

$$\Rightarrow m\ddot{r}_i = qE_i + \frac{q}{c}(\bar{v}\times\bar{B})_i$$

dvs rörelseekvationerna vi startade med.

Trots att vi antog att V ej beror av $\dot{q}$ när vi härledde L.E. kan vi alltså låta $V \to U(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{\dot{q}},t)$ och återfå våra rörelseekv.

Notera att kraften kan skrivas

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$$

($\underset{\sim}{q} = \bar{r}$ i detta exempel)

Variationskalkyl

$\sum_i (\bar{F}_i - \dot{\bar{p}}_i)\delta r_i = 0$ enl. d'Alemberts princip $\Rightarrow$
ett fysikaliskt system befinner sig i någon mening vid ett extremvärde. Utveckla denna idé!

Ex
Fermats princip för ljusstrålar

Sök funktion $y = y(x)$ med $\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$ så att

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \, f(y(x), y'(x), x)$$

antar ett extremvärde. (has a stationary value)

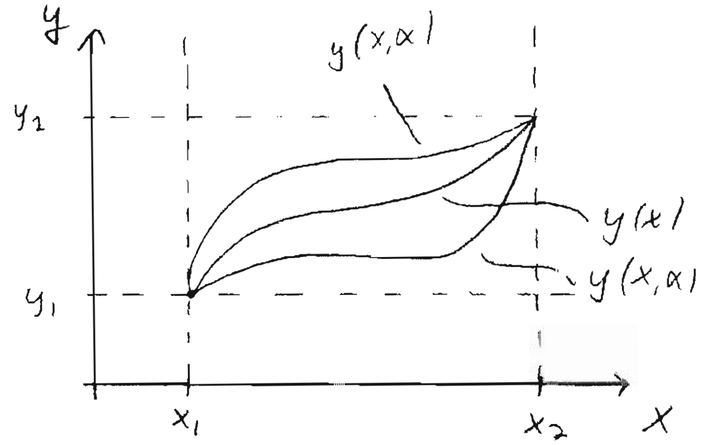
$\begin{cases} J[y] \text{ är en } \underline{\text{funktional}} \text{ av } y(x) \\ f, x_1, x_2, y_1 \text{ och } y_2 \text{ är givna} \end{cases}$

Variera nu $y(x)$ lite runt den kurva som gör att $J[y]$ är extrem.

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\,\eta(x)$$

$\eta(x)$ är en godtycklig funktion som uppfyller

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$



Def $\delta J = \frac{dJ}{d\alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right\} d\alpha$ — förstavariationen av J

Men $\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)$

Integrera andra termen i δJ partiellt

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{x_1}^{x_2}}_{\substack{=0 \\ \text{ty } \eta(x_1)=\eta(x_2)=0}} - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

Alltså

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \right\} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}_{\eta(x)} d\alpha$$

Def $\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} & \text{– variationsderivatan av } f \text{ med avseende på } y \\ \delta y = \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha & \text{– variationen av } y \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \delta J = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\delta f}{\delta y} \delta y$$

Vi vill att J ska anta ett extremvärden, dvs $\delta J = 0$
Måste gälla för godtyckliga δy (alt godtyckliga $\eta(x)$)

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta f}{\delta y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0}$$

Variationsproblemets Eulerekvation.

Ersätt nu $f(y, y', x)$ med $L(q, \dot{q}, t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

dvs Lagranges ekvationer !!!

Hamiltons princip (1834)

Till ett mekaniskt system med f frihetsgrader och generaliserade koordinater $\underset{\sim}{q} = (q_1, \ldots, q_f)$ associeras en Lagrangefunktion

$$L = L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$$

Låt

$$\underset{\sim}{\rho} = (\rho_1(t), \ldots, \rho_f(t)) \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

vara en rörelse hos systemet med $\underset{\sim}{\rho}(t_1) = \underset{\sim}{a}$ och $\underset{\sim}{\rho}(t_2) = \underset{\sim}{b}$.

Då gäller att verkansintegralen ("action")

$$J[\underset{\sim}{q}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$$

antager ett extremvärde för $\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{\rho}$

Om krafterna kan härledas från en generaliserad potential $U = U(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$ kallas systemet monogent (monogenic). Man kan då skriva

$$L = T - U$$

Euler-Lagranges ekvationer

$$J[\underset{\sim}{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \underset{\sim}{\dot{q}}(t), t)\, dt$$

Vi har

$$0 = \delta J = \frac{dJ}{d\alpha} d\alpha = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \alpha} \right) d\alpha =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} + \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} d\alpha \right]_{t_1}^{t_2}}_{0 \text{ ty } \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} = 0 \text{ vid ändpunkterna}}$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} d\alpha =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\} \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial \alpha} d\alpha}_{\delta q_k}$$

Gäller för alla δq_k

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Notera att vi kan skriva detta som

$$\frac{\delta L}{\delta q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \qquad k = 1 .., f$$

dvs variationsderivatan av L m.a.p. q_k är noll.

Lagrangefunktionen är ej unik

För exemplet med en laddad partikel i ett elektromagnetiskt fält, gör följande substitution

$$\begin{cases} \bar{A}(\bar{r},t) \longrightarrow \bar{A}'(\bar{r},t) = \bar{A}(\bar{r},t) + \bar{\nabla}\chi(\bar{r},t) \\ \phi(\bar{r},t) \longrightarrow \phi'(\bar{r},t) = \phi(\bar{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(\bar{r},t) \end{cases}$$

Gen potentialen blir då $U \to U' = q\phi' - \frac{q}{c}\dot{\bar{r}}\cdot\bar{A}'$

Lagrangianen blir nu

$$L' = T - U' = \frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - q\phi' + \frac{q}{c}\dot{\bar{r}}\cdot\bar{A}' =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\dot{\bar{r}}\cdot\bar{A}}_{L = \text{ursprungliga Lagrangianen}} + \underbrace{\frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(\bar{r},t) + \frac{q}{c}\dot{\bar{r}}\cdot\bar{\nabla}\chi}_{\frac{q}{c}\frac{d}{dt}\chi(\bar{r},t)}$$

$$= L + \frac{q}{c}\frac{d}{dt}\chi(\bar{r},t)$$

Sätt in $\frac{d}{dt}\chi(\bar{r},t)$ i L.E., $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}\frac{d\chi}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\frac{d\chi}{dt} = 0$

$$VL = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}\left[\dot{\bar{r}}\cdot\nabla\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right]\right) - \frac{\partial}{\partial r_i}\left[\dot{\bar{r}}\cdot\nabla\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial\chi}{\partial r_i} - \sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r_k}\chi - \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial t}\chi =$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\chi}{\partial r_k\partial r_i}\dot{r}_k + \cancel{\frac{\partial^2\chi}{\partial t\partial r_i}} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\chi}{\partial r_i\partial r_k}\dot{r}_k - \cancel{\frac{\partial^2\chi}{\partial r_i\partial t}} = 0$$

Dvs. $\frac{d}{dt}\chi(\bar{r},t)$ uppfyller L.E. $\Rightarrow$ L' ger samma rörelseekvationer som L. Detta gäller allmänt, vi kan alltid lägga till $\frac{dM(\bar{q},t)}{dt}$ utan att rörelseekvationerna ändras.

Hamiltonfunktionen (energifunktionen)

Def: $$h(\underset{\sim}{q},\dot{\underset{\sim}{q}},t) = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L(\underset{\sim}{q},\dot{\underset{\sim}{q}},t)$$

Då gäller

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{k=1}^{f}\left\{ \ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \overbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}^{\frac{\partial L}{\partial q_k} \text{ enl. LE}} \right\} -$$

$$- \sum_{k=1}^{f}\left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k \right\} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Om Lagrangefunktionen ej beror explicit av t gäller

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = 0 \quad \text{dvs} \quad h(\underset{\sim}{q},\dot{\underset{\sim}{q}},t) = \text{konstant}}$$

Ex. $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - V(\bar{r})$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\Rightarrow h = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = m\dot{\bar{r}}^2 - \frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 + V(\bar{r}) =$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 + V(\bar{r}) = T + V = E$$

I detta specialfall gäller alltså: $h = E$

Obs! Detta gäller ej alltid!

$$\boxed{\text{Def: } p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = \text{rörelsemängd som är kanoniskt konjugerad till } q_k \text{ (eller kort och gott den kanoniska rörelsemängden)}}$$

Obs!

Om $L = L(q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_f, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$

↳ q_k är cyklisk (saknas)

gäller

$$\frac{\delta L}{\delta q_k} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{0} - \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)}_{\dot p_k} = 0$$

dvs

$$\boxed{p_k = \text{konstant för cykliskt } q_k}$$

Ex/ Laddad partikel i elektromagnetiskt fält

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = \underbrace{m\dot q_k}_{\text{kinetiska impulsen}} + \frac{e}{c} A_k(\underset{\sim}{q}, t) \quad \text{- kanoniska impulsen}$$

Symmetrier och bevarandelagar

Antag att

$$L = L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot q}) = T(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot q}) - V(\underset{\sim}{q})$$ – inget explicit tidsberoende.

där

$$T = \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}\, \dot q_j \dot q_k$$ – homogen fkn av grad 2 i $\underset{\sim}{\dot q}$

Utnyttja nu Eulers teorem (s. 26) på T

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{f} \dot q_i \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} = 2T$$

[Eulers teorem visas enkelt:

Antag $F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^N F(x_1, \ldots, x_n)$

Derivera m.a.p. λ och sätt $\lambda = 1$

$$\text{V.L.} = \frac{d}{d\lambda} F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\Big|_{\lambda=1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{d\lambda x_i}{d\lambda}\Big|_{\lambda=1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot x_i$$

$$\text{H.L.} = \frac{d}{d\lambda}\left(\lambda^N \cdot F(x_1, \ldots, x_n)\right)\Big|_{\lambda=1} = N \cdot \lambda^{N-1} \cdot F\Big|_{\lambda=1} = N \cdot F$$]

Alltså gäller

$$h = \underbrace{\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \dot q_i}_{2T} - L = 2T - T + U = T + U = E$$

h = E är i detta fall en rörelsekonstant, ty

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

enl. tidigare (s. 30)

Pga att vi har ett autonomt och skleronomt system.

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ — T homogen fkn av grad 2 i $\dot q_i$

Noethers teorem

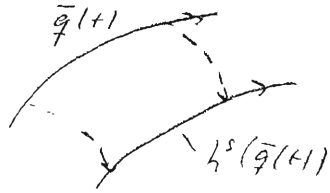
Antag att $L = L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}})$ beskriver ett autonomt system som är invariant under transformationen

$$\underset{\sim}{q} \longrightarrow \underset{\sim}{h}^s(\underset{\sim}{q})$$

där s är en reell, kontinuerlig parameter och $\underset{\sim}{h}^{s=0}(\underset{\sim}{q}) = \underset{\sim}{q}$ är identitetstransformationen. Det existerar då en rörelsekonstant given av

$$I(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}) = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} h_i^s(\underset{\sim}{q}) \Big|_{s=0}$$

<u>Bevis:</u> Låt $\underset{\sim}{q} = \bar{\underset{\sim}{q}}$ vara en lösning till Lagranges ekvationer. Enligt vårt antagande är då $\underset{\sim}{q}(s,t) = \underset{\sim}{\phi}(s,t) = \underset{\sim}{h}^s(\bar{\underset{\sim}{q}}(t))$ också en lösning.



$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\underset{\sim}{\phi}(s,t), \dot{\underset{\sim}{\phi}}(s,t))\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}(\underset{\sim}{\phi}(s,t), \dot{\underset{\sim}{\phi}}(s,t)) \qquad i = 1, \dots, f \qquad (1)$$

Vidare är L invariant

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} L(\underset{\sim}{\phi}(s,t), \dot{\underset{\sim}{\phi}}(s,t)) = \sum_{i=1}^{f} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{d\phi_i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{\phi}_i}{ds}\right] = 0 \qquad (2)$$

$$(1)\,\&\,(2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{d\phi_i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\frac{d\phi_i}{ds}\right] = 0 = \frac{d}{dt} I$$

∇.

Exempel

Betrakta $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i^2 - U(r_1, \dots, r_n)$

i/ Antag att systemet är invariant under translation längs med x-axeln:

$$h^s: \bar{r}_i \to \bar{r}_i + s\hat{x} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} h^s(\bar{r}_i)\Big|_{s=0} = \hat{x}$$

$$\Rightarrow I = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_f} \frac{d}{ds} h^s(q_f)\Big|_{s=0} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i \cdot \hat{x} = \sum_{i=1}^{n} p_x^{(i)} = P_x$$

$\Rightarrow$ Invarians för translation i riktning $\hat{n}$ $\Rightarrow$ P_n är bevarat!

ii/ Invarians under rotation kring z-axeln

$$\bar{r}_i = (x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}) \longrightarrow \bar{r}_i' = (x'^{(i)}, y'^{(i)}, z'^{(i)}) =$$

$$= (x^{(i)}\cos s + y^{(i)}\sin s, -x^{(i)}\sin s + y^{(i)}\cos s, z^{(i)})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \bar{r}_i'\Big|_{s=0} = (y^{(i)}, -x^{(i)}, 0) = \bar{r}_i \times \hat{z}$$

$$\Rightarrow I = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i \cdot (\bar{r}_i \times \hat{z}) \overset{\text{vektoranalys}}{=} \sum_{i=1}^{n} \hat{z} \cdot (m_i \dot{\bar{r}}_i \times \bar{r}_i) = -\hat{z} \cdot \bar{L} = -L_z$$

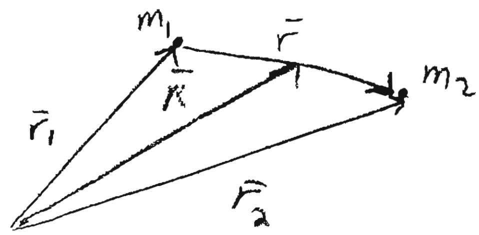
$\Rightarrow$ Invarians under rotation kring $\hat{n}$-axeln

$\Rightarrow L_n = \bar{L} \cdot \hat{n}$ är bevarad!

Not. P.s.s. ger invarians under translation i t ~~att~~ totala energin är bevarad (kan ej ses från denna version av Noethers teorem) Se övningsexempel 2.17.

Centralkrafter och tvåkropparsproblemet

Betrakta två massor m_1 och m_2 med endast inre krafter.



Antag att potentialen U endast beror på $\bar{r}$, $\dot{\bar{r}}$, och ej på $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ direkt.

$$\Rightarrow \quad L = T - U = T(\dot{\bar{R}}, \dot{\bar{r}}) - U(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, \dots)$$

Masscentrum ges av

$$\bar{R} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Relativa koordinaten ges av

$$\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{r}_1 = \bar{R} + \bar{r}_1{}' \ ; & \bar{r}_1{}' = -\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\bar{r} \\ \bar{r}_2 = \bar{R} + \bar{r}_2{}' \ ; & \bar{r}_2{}' = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\bar{r} \end{cases}$$

Den kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\bar{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\bar{r}}_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m_1\left[\dot{\bar{R}}^2 + \dot{\bar{r}}_1{}'^2 + \cancel{2\dot{\bar{R}}\cdot\dot{\bar{r}}_1{}'}\right] + \frac{1}{2}m_2\left[\dot{\bar{R}}^2 + \dot{\bar{r}}_2{}'^2 + \cancel{2\dot{\bar{R}}\cdot\dot{\bar{r}}_2{}'}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2}m_1\frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\bar{r}}^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\bar{r}}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2\cancel{(m_2+m_1)}}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\dot{\bar{r}}^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{\bar{r}}^2$$

Def: Reducerade massan ges av

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu \dot{\bar{r}}^2$$

Lagrangianen ges nu av ($\bar{R}$ och $\bar{r}$ är våra gen. koordinater)

$$L(\bar{R}, \dot{\bar{R}}, \bar{r}, \dot{\bar{r}}) = T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu \dot{\bar{r}}^2 - U(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, \dots) \quad (1)$$

$\bar{R}$ är cyklisk $\Rightarrow$ rörelseekvationen för $\bar{R}$ är trivial:

$$\frac{d}{dt}\left((m_1 + m_2)\dot{\bar{R}}\right) = 0$$

Stryk första termen i (1) och koncentrera oss på den relativa rörelsen

$$\Rightarrow \quad L(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2}\mu \dot{\bar{r}}^2 - U(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, \dots) \quad (2)$$

Vi har således reducerat problemet till ett enkroppsproblem för en partikel med massan μ i potentialen U

Betrakta nu centralkrafter där

$$U(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, \dots) = V(r)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{F}(\bar{r}) = -\bar{\nabla} V(r) = -\frac{dV}{dr}\bar{\nabla} r = -\frac{dV}{dr}\underbrace{\frac{\bar{r}}{r}}_{\hat{r}} = f(r)\,\hat{r}$$

dvs kraften beror av $r = |\bar{r}|$ enbart och ej av $\bar{r}$.

L.E. ger oss nu

$$\frac{d}{dt}(\mu \dot{r}_i) + \frac{\partial V}{\partial r_i} = 0$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{\bar{r}} = -\bar{\nabla} V = \bar{F}(r) = f(r)\,\hat{r} = f(r)\frac{\bar{r}}{r}$$

Rörelsemängdsmomentet ges av

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \mu \bar{r} \times \dot{\bar{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{L}}{dt} = \mu(\underbrace{\dot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}}}_{0 \text{ ty } \dot{\bar{r}} \parallel \dot{\bar{r}}}) + \mu(\underbrace{\bar{r} \times \ddot{\bar{r}}}_{0 \text{ ty } \ddot{\bar{r}} = \frac{f(r)}{\mu r}\bar{r} \parallel \bar{r}}) = 0$$

$\bar{L}$ är en konstant vektor (till storlek och riktning)

Både $\bar{r}$ och $\dot{\bar{r}}$ $\perp$ $\bar{L}$ $\Rightarrow$ <u>Rörelsen sker i ett plan!</u>

Orientera vårt koordinatsystem så att detta plan är i xy-planet med origo i kraftcentrum. Rörelseekvationen för polarvinkeln är trivial ($\varphi = \pi/2 = $ konst). Välj planpolära koordinater för de resterande två frihetsgraderna.

(r, θ) – våra gen. koordinater

Lagrangianen (2) kan nu skrivas

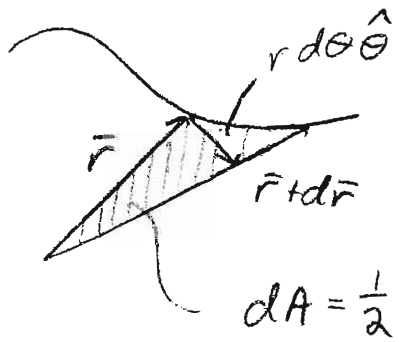
$$L = T - V = L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \qquad (3)$$

Notera att θ är cyklisk

$$\Rightarrow p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = l = \text{konst.} \qquad (4)$$

OBS! l är beloppet av rörelsemängdsmomentet, $l = |\bar{L}|$

Anm



$$dA = \frac{1}{2} r\, r\, d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{2\mu} = \text{konst.}$$

Keplers andra lag

Ortsvektorn från solen till en planet sveper över lika stora areor på lika långa tider.

Gäller allmänt för central potential, ej bara för grav. pot.

Den resterade rörelseekvationen (för r) fås ur (3) med L.E.

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r}$$

$$\text{L.E.} \Rightarrow \mu \ddot{r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

Sätt in ekv. (4) $\Rightarrow$

$$\mu \ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \qquad (5)$$

Enligt tidigare skrev vi $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ $\quad (\bar{F} = f(r)\hat{r})$

$$\Rightarrow \mu \ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} + f(r) \qquad (6)$$

Ekv. (6) kan förenklas ytterligare genom att multiplicera med $\dot{r}$ och integrera. Alternativt kan vi utgå från totala energin

$$E = T + V = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$

E är bevarad, ty vi har inga yttre krafter.

Ekv. (4) ger

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{\mu r^2} + V(r) \quad = \text{konst.}$$

Lös ut $\dot{r}$

$$\dot{r} = (\pm)\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)} \qquad (7)$$

Vi kan betrakta

$$V'(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} \qquad (8)$$

som en effektiv potential och vi har reducerat problemet till ett endimensionellt problem med rörelse i pot. V'.

Ekv. (7) kan formellt integreras då den är separabel:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V'(r))}}$$

$$\Rightarrow \quad t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V'(r))}} \qquad \text{ger } r(t)$$

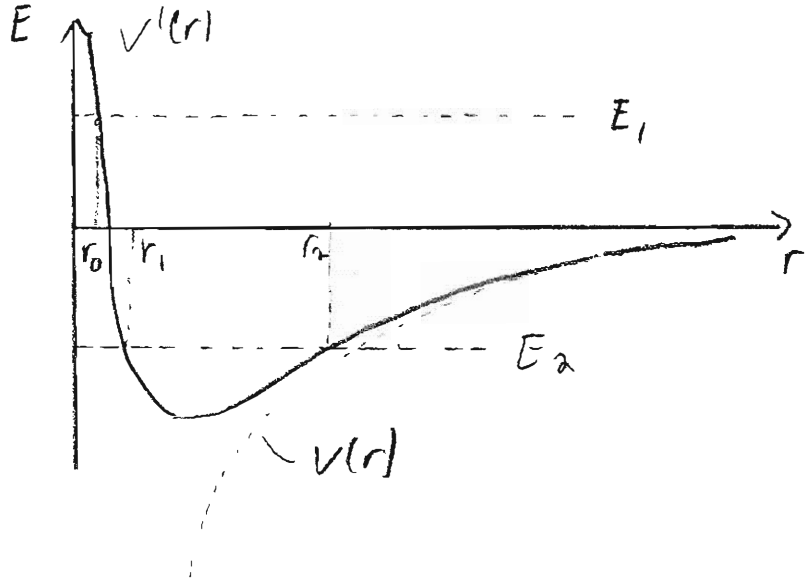
θ fås sedan genom att sätta in $r(t)$ i ekv. (4) och integrera

$$d\theta = \frac{\ell\,dt}{\mu r^2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \int_0^t \frac{\ell\,dt}{\mu r^2(t)} + \theta_0$$

Lösn ingen ovan är formellt korrekt, men inte alltid så praktisk eller enkel i praktiken.

Betrakta nu en gravitationspotential, $V(r) = -\frac{k}{r}$; $k > 0$

$$\Rightarrow V'(r) = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$



$E_1 > 0 \Rightarrow$ obunden rörelse, alltid utanför r_0

$E_2 < 0 \Rightarrow$ bunden rörelse mellan r_1 och r_2

För fler exempel (för andra potentialer), se Goldstein, kap. 3.3.

<u>Bankurvorna</u>

Ekv. (4) ger att

$$l\,dt = \mu r^2 d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}$$

Ekv. (6) kan då skrivas

$$\frac{l}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{l^2}{\mu r^3} = f(r) \quad (9)$$

ger $r(\theta)$

Lättare att lösa än $r(t)$!

Byt variabel till $u = \frac{1}{r}$

$$\Rightarrow \quad du = -\frac{1}{r^2}\,dr \qquad \Rightarrow \quad dr = -r^2\,du$$

(9) blir nu

$$lu^2 \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}\right) - \frac{l^2}{\mu}u^3 = f\left(\tfrac{1}{u}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2u^2} f\left(\tfrac{1}{u}\right) \qquad (10)$$

Man kan också utgå från energirelationen (7)

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}$$

Enligt ovan blir

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2\mu}{l^2}\left(E - V\left(\tfrac{1}{u}\right) - \frac{l^2}{2\mu}u^2\right)} \qquad (11)$$

För gravitationspotentialen, $V(r) = -\frac{k}{r} \Rightarrow V\left(\frac{1}{u}\right) = -ku$ får vi

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2\mu}{l^2}(E + ku) - u^2}$$

Kvadrera!

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2\mu}{l^2}(E + ku) - u^2$$

Kvadratkomplettera! $\Rightarrow$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left[u - \frac{\mu k}{l^2}\right]^2 = \frac{2\mu}{l^2}E + \left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^2 = \left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^2\left(1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}\right)$$

<u>Def</u>: $p = \dfrac{l^2}{k\mu}$; $e = \sqrt{1 + \dfrac{2El^2}{\mu k^2}}$ (12)

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(u - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{e^2}{p^2} \qquad (13)$$

Detta ser ju ut som ekv. för en ellips $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right]$

Man kan gissa en lösning och se att

$$u - \frac{1}{p} = \frac{e}{p}\cos\theta \qquad (14)$$

satisfiera ekv (12). Ekv. (13) är då vår lösning $u = u(\theta)$.

Återgång till r ger

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = \frac{e}{p}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{e}{p}\cos\theta + \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad (15)}$$

Detta är våra bankurvor för Keplerproblemet

För alternativ härledning, se Goldstein, kap 3.7.

Analys av banorna

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \Rightarrow r = p - er\cos\theta$$

Byt till kartesiska koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 = (p - ex)^2 = p^2 - 2epx + e^2x^2$$

$$\Rightarrow (1-e^2)\left[x^2 + 2\frac{ep}{1-e^2}x + \left(\frac{ep}{1-e^2}\right)^2\right] + y^2 = p^2 + \frac{(ep)^2}{(1-e^2)^2} = \frac{p^2}{1-e^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{(1-e^2)^2}$$

Def: $a = \frac{p}{1-e^2}$; $c = \frac{ep}{1-e^2}$

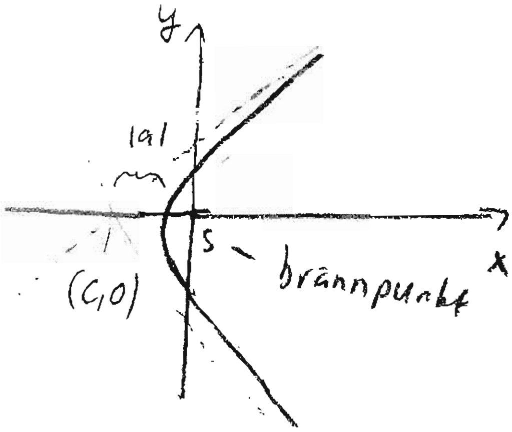
$$\Rightarrow \boxed{\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1} \quad (16)$$

Kägelsnitt!

Tre fall

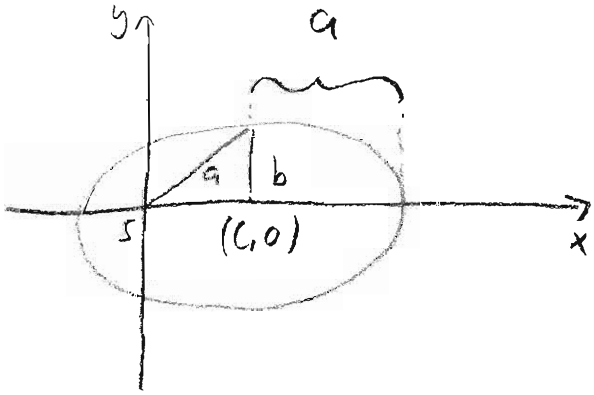
(i) $e > 1$ dvs $E > 0$ $\Rightarrow$ $|c| > |a|$

$\Rightarrow$ Hyperbel



(ii) $e < 1$ dvs $E < 0$ $\Rightarrow$ $|c| < |a|$

$\Rightarrow$ Ellips



$$b^2 = a^2 - c^2 = \frac{p^2}{1-e^2} = ap$$

a - halva storaxeln

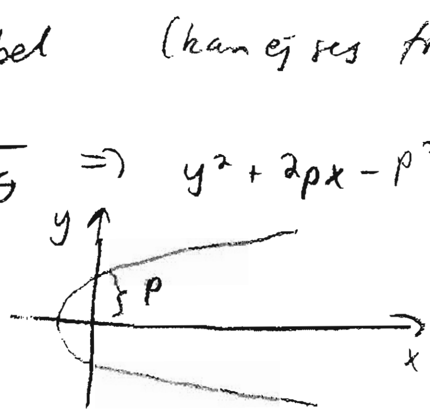
b - halva lillaxeln

Specialfall $e = 0$ $\Rightarrow$ cirkel

(iii) $e = 1$ dvs $E = 0$

$\Rightarrow$ Parabel (kan ej ses från (16) som gäller då $\varepsilon \neq 1$

$$r = \frac{p}{1+\cos\theta} \Rightarrow y^2 + 2px - p^2 = 0$$



Keplers första lag:

Planeterna rör sig i ellipsbanor med solen i ena brännpunkten

Not 2-kroppasapproximation

Ytan som orbsvektorn sveper över är

$$A = \pi ab = \pi a\sqrt{ap} = \pi a^{3/2}\sqrt{p}$$

Kepler II $\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{l}{\mu} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\frac{l}{\mu}T$; T = perioden

$$\Rightarrow \pi a^{3/2}\sqrt{p} = \frac{1}{2}\frac{l}{\mu}T$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{1}{\pi^2 \underbrace{p}_{l^2/k\mu}}\frac{l^2}{(2\mu)^2} = \frac{k\mu}{\pi^2 l^2}\frac{l^2}{4\mu^2} = \frac{k}{4\pi^2\mu}$$

$k = Gm_1m_2$; $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{Gm_1m_2}{4\pi^2 m_1m_2}\cdot(m_1+m_2) = \frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2}$$

Om $m_1 \gg m_2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a^3}{T^2} \simeq \frac{Gm_1}{4\pi^2} = \text{konst}}$$

Keplers tredje lag:

För alla planeter i ett planetsystem är förhållandet mellan kuben på storaxeln och kvadraten på perioden konstant.

Exempel: Solsystemet

Planet	a (AU)	T (år)	a^3/T^2
Merkurius	0.39	0.24	1.00
Venus	0.72	0.62	0.99
Jorden	1.00	1.00	1.00
Mars	1.52	1.9	0.97
Jupiter	5.2	11.9	0.99
Saturnus	9.5	29.5	0.99
Uranus	19.1	84.0	0.97
Neptunus	30.1	164,8	1,00
Pluto	39,3	247,7	0,99

Små svängningar

Vi befinner oss vid jämvikt om de generaliserade krafterna är noll,

$$Q_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = 0$$

taget i jämviktspunkten $\underset{\sim}{q}_0$

Utveckla kring $\underset{\sim}{q}_0$:

$$q_i = q_{0i} + \eta_i$$

q_{0i} jämviktsläget

η_i avvikelse från jämvikt

Taylor-utveckla V (antag att vi har ett autonomt system)

$$V(q_1, .., q_f) = V(q_{01}, .., q_{0f}) + \sum_i \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0}_{=0} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j + \dots$$

Vi kan byta gen koordinater η_i och stryka den första konstanta termen i V (dvs stryk $V(\underset{\sim}{q}_0)$ = konst.). Potentialen blir då

$$V = \sum_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j \equiv \sum_{ij} \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j$$

Kinetisk energi ges av (antag att vi har tidsoberoende tvång):

$$T = \sum_{ij} \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{ij} \frac{1}{2} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

Koefficienterna $m_{ij} = m_{ij}(\underset{\sim}{q})$. Taylorutveckla och behåll lägsta ordningen i η : $m_{ij}(\underset{\sim}{q}) = \underbrace{m_{ij}(\underset{\sim}{q}_0)}_{= T_{ij}} + \dots \simeq T_{ij}$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\sum_{ij} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$$

$$\Rightarrow \quad L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - V_{ij}\eta_i\eta_j\right)$$

L.E. ger oss rörelseekvationerna

$$\sum_j T_{ij}\ddot{\eta}_j + \sum_j V_{ij}\eta_j = 0 \qquad (*)$$

dvs ett system av andra ordningens differentialekvationer med konstanta koefficienter.

I de flesta fall kan vi formulera systemet så att T_{ij} är diagonal (dvs diagonalisera systemet). Vi får då

$$T_i\ddot{\eta}_i + \sum_j V_{ij}\eta_j = 0 \qquad (**)$$

vilken är lättare att integrera.

Ansätt en lösning på formen

$$\eta_i = C a_i e^{-i\omega t}$$

Sätt in i (*) och vi får

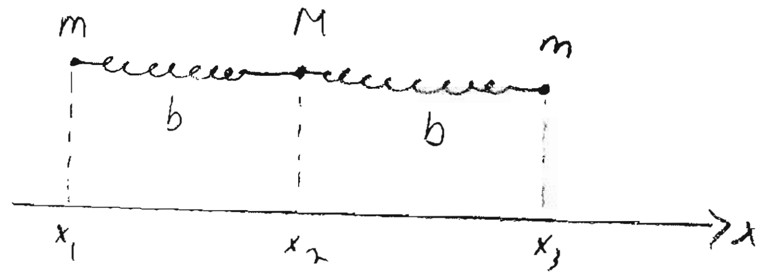
$$\sum_j\left(V_{ij}a_j - \omega^2 T_{ij}a_j\right) = 0 \qquad (***)$$

Homogent ekv. system för a_j. Har icke-triviál lösning endast om determinanten för koefficientmatrisen försvinner

$$\det\left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) = 0 \qquad (****)$$

Lös denna s.k. karakteristiska ekvation så erhåller vi egenfrekvenserna ω. För var och en av dessa, lös ekv. (***) för amplituderna a_i. Vår totala lösning är sedan en linjär kombination av alla dessa lösningar.

Exempel: Fria vibrationer hos en linjär triatomisk molekyl.



Tre massor: m, m och M

Två fjädrar: fjäderkonstant k, naturliga längden b

Potentialen ges då av

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2 - b)^2$$

Jämvikt gäller då fjädrarna har sina naturliga längder b, dvs då

$$x_{02} - x_{01} = b = x_{03} - x_{02}$$

Inför nya koordinater η som anger avvikelsen från jämviktsläget,

$$\eta_i = x_i - x_{0i}$$

Potentialen blir då

$$V = \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{1}{2}k(\eta_3 - \eta_2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}k(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3)$$

Kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2$$

Lagrangianen blir nu

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2}k(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3)$$

L.E. ger då rörelseekvationerna

$$\begin{cases} m\ddot{\eta}_1 + k(\eta_1 - \eta_2) = 0 \\ M\ddot{\eta}_2 + k(2\eta_2 - \eta_1 - \eta_3) = 0 \\ m\ddot{\eta}_3 + k(\eta_3 - \eta_2) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Ansatz

$$\eta_i = a_i e^{i\omega t} \qquad (2)$$

Insatt i (1) ger detta

$$\begin{cases} -m\omega^2 a_1 + k a_1 - k a_2 = 0 \\ -M\omega^2 a_2 + 2k a_2 - k a_1 - k a_3 = 0 \\ -m\omega^2 a_3 + k a_3 - k a_2 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Ekv. (4) har en icke-trivial lösning endast om determinanten för koefficientmatrisen är noll, dvs om

$$\begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (k-\omega^2 m)^2(2k-\omega^2 M) - k^2(k-\omega^2 m) - k^2(k-\omega^2 m) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (k-\omega^2 m)\left[(k-\omega^2 m)(2k-\omega^2 M) - 2k^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (k-\omega^2 m)\left[\cancel{2k^2} - k\omega^2 M - 2k\omega^2 m + \omega^4 mM - 2k^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2(k-\omega^2 m)\left(\omega^2 mM - k(2m+M)\right) = 0 \qquad (5)$$

Denna kubiska ekvation i ω^2 har uppenbarligen lösningarna

$$\begin{cases} \omega_1 = \underset{(-)}{+} 0 & (6a) \\ \omega_2 = \underset{(-)}{+} \sqrt{\dfrac{k}{m}} & (6b) \\ \omega_3 = \underset{(-)}{+} \sqrt{\dfrac{k}{m}\left(1+\dfrac{2m}{M}\right)} & (6c) \end{cases}$$

(6a) ger rätlinjig rörelse hos hela systemet (dvs konstant hastighet åt höger eller vänster). De andra två ekv. ger oscillationer.

För att hitta lösningarna sätter vi in våra ω_i i ekv. (3),

$$\begin{cases} (k - m\omega_i^2)a_{1i} - k a_{2i} = 0 & (7a) \\ -k a_{1i} + (2k - M\omega_i^2)a_{2i} - k a_{3i} = 0 & (7b) \\ -k a_{2i} + (k - m\omega_i^2)a_{3i} = 0 & (7c) \end{cases}$$

och löser dessa för vart och ett av de tre fallen för ω_i

i/ $\omega_1 = 0$

Ekv. (7) blir

$$\begin{cases} k(a_{11} - a_{21}) = 0 \\ k(a_{11} + 2a_{21} - a_{31}) = 0 \\ k(-a_{21} + a_{31}) = 0 \end{cases}$$

Dessa ekv har den uppenbara lösningen $a_{11} = a_{21} = a_{31} = c_1$ där c_1 är en konstant. Vi återkommer till denna strax, s. 54.

ii/ $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Ekv. (7) blir nu

$$\begin{cases} -k a_{22} = 0 \\ -k a_{12} + \left(2k - M\frac{k}{m}\right) a_{22} - k a_{32} = 0 \\ -k a_{22} = 0 \end{cases}$$

Den första och tredje ekv. ger att $a_{22} = 0$, den andra ger då att $a_{12} = -a_{32} = c_2$

Lösningen är alltså

$$\begin{cases} \eta_{12} = C_2 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \\ \eta_{22} = 0 \\ \eta_{23} = -C_2 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = -\eta_{12} \end{cases}$$

dvs mellanatomen är i vila och de två andra atomerna svänger i motfas med vinkelfrekvensen $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

$\omega_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}$ ger samma lösning, men med en egen konstant C_2'

$$\begin{cases} \eta_{12}' = C_2' e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \\ \eta_{22}' = 0 \\ \eta_{23}' = -C_2' e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \end{cases}$$

iii) $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)}$

Ekv. (7) blir nu

$$\begin{cases} \left(k - m\frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)\right)a_{13} - k a_{23} = 0 \\ -k a_{13} + \left(2k - M\frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)\right)a_{23} - k a_{33} = 0 \\ -k a_{23} + \left(k - m\frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)\right)a_{33} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{2m}{M}k\, a_{13} - k a_{23} = 0 & (8a) \\ -k a_{13} - \frac{M}{m} k a_{23} - k a_{33} = 0 & (8b) \\ -k a_{23} - \frac{2m}{M} k a_{33} = 0 & (8c) \end{cases}$$

(8a) ger att

$$a_{23} = -\frac{2m}{M} a_{13} \qquad (9)$$

(8c) ger att

$$a_{33} = -\frac{M}{2m} a_{23} \overset{(9)}{=} \frac{M}{2m}\frac{2m}{M} a_{13} = a_{13} \qquad (10)$$

Välj $a_{13} = C_3$. Lösningen ~~blir nu~~

$$\begin{cases} \eta_{13} = C_3 e^{i\omega_3 t} \\ \eta_{23} = -\frac{2m}{M} C_3 e^{i\omega_3 t} \\ \eta_{33} = C_3 e^{i\omega_3 t} \end{cases}$$

Molekyl 1 & 3 svänger således i fas och molekyl 2 svänger i motfas med lite annan amplitud.

$\omega_3 = -\sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)}$ ger samma lösning för a_{13}, a_{23}, a_{33}, men med en egen konstant C_3', dvs den totala lösningen för ω_3 blir

$$\begin{cases} \eta_{13} = C_3 e^{i\omega_3 t} + C_3' e^{-i\omega_3 t} \\ \eta_{23} = -\frac{2m}{M} C_3 e^{i\omega_3 t} - \frac{2m}{M} C_3' e^{-i\omega_3 t} \\ \eta_{33} = C_3 e^{i\omega_3 t} + C_3' e^{-i\omega_3 t} \end{cases}$$

i/ Låt oss nu betrakta $\omega_1 = 0$ vidare. Man skulle kunna tro att $\eta_i = C_1$ är vår lösning. Den är dock ej fullständig då den inte kan uppfylla alla våra begynnelsevillkor $\eta_i(0) = \eta_i^0$, $\dot{\eta}_i(0) = v_i^0$

Vi kan istället göra ansatsen

$$\eta_i = a_i + b_i t$$

vilket insatt i rörelseekvationerna (1) ger oss

$$\begin{cases} k(a_1 + b_1 t - a_2 - b_2 t) = 0 \\ k(2a_2 + 2b_2 t - a_1 - b_1 t - a_3 - b_3 t) = 0 \\ k(a_3 + b_3 t - a_2 - b_2 t) = 0 \end{cases}$$

Om dessa ska gälla för godtyckliga t måste (p.s.s som tidigare)

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = C_1 \\ b_1 = b_2 = b_3 = C_1' \end{cases}$$

Lösningen är således

$$\begin{cases} \eta_{11} = C_1 + C_1' t \\ \eta_{21} = C_1 + C_1' t \\ \eta_{31} = C_1 + C_1' t \end{cases}$$

dvs rätlinjig rörelse med konst hastighet.

Hamiltons ekvationer (kap 8 i Goldstein)

För ett system med n frihetsgrader ger Lagranges ekvation n st 2:a ordningens differentialekvationer för $q(t)$. Vi vet att ett sådant system alltid kan skrivas om som ett system av $2n$ st 1:a ordningens differentialekvationer genom att införa n nya variabler, t ex $y_k = \dot{q}_k$. Vi har dock redan infört sådana variabler,

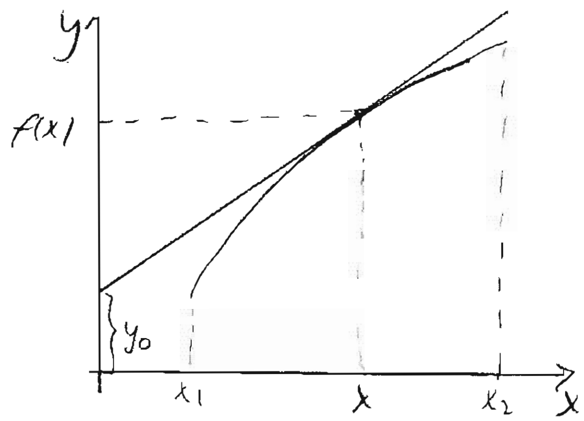
$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

dvs våra kanoniska rörelsemängder. Vi vill således byta variabler från $(q(t), \dot{q}(t))$ $(q(t), p(t))$ och söka de $2n$ ekvationer som ger $q(t), p(t)$.

Denna typ av transformation $(\dot{q}_k \to p_k)$ kallas för Legendretransformation. Låt oss studera dessa närmare.

Frågeställningen är: När kan vi transformera oss från $L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$ till $H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$ och hur ser rörelseekvationerna ut?

Legendretransformer



Allmänt

Betrakta kurvan

$$y = f(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$$

Vi kan skriva

$$y - y_0 = x \cdot \frac{df}{dx}(x)$$

Def en ny variabel

$$z = \frac{df}{dx} \Rightarrow x = x(z) \text{ genom inversion}$$

Uttryck $-y_0$ som funktion av z

$$-y_0 = xz - y = x(z) \cdot z - f(x(z))$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Def: Legendretransformen } \mathcal{L}f \text{ av } f \text{ ges av} \\ \mathcal{L}f(z) = x(z) \cdot z - f(x(z)) \end{array}}$$

Jfr. övn. 214!

Vi har med andra ord transformerat oss från en funktion av x till en ny funktion av z.

Notera

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}f(z) = \frac{d}{dz}\Big(x(z)\cdot z - f(x(z))\Big) =$$

$$= \frac{dx}{dz}\cdot z + x\cdot 1 - \underbrace{\frac{df}{dx}}_{z}\frac{dx}{dz} = x$$

$\Rightarrow$ Den gamla variabeln erhålles som derivatan av Legendretransforman m.a.p. den nya variabeln.

P.s.s. som den nya variabeln definierades som derivatan av f.

Ex/ $f(x) = \frac{1}{2}mx^2$

$$\Rightarrow z = \frac{df}{dx} = mx \Rightarrow x = \frac{z}{m}$$

$$\mathcal{L}f(z) = x(z)\cdot z - f(x(z)) = \frac{z}{m}\cdot z - \frac{1}{2}m\left(\frac{z}{m}\right)^2 = \frac{1}{2m}z^2$$

Obs. att $\frac{d\mathcal{L}f}{dz} = \frac{1}{m}z = x$!

Betrakta nu

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

$\uparrow$ gamla variabeln

Def. $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ - nya variabeln

$$\Rightarrow \mathcal{L}L = \dot{q}(p)\cdot p - L(q, \dot{q}(p), t) = \underbrace{H(q,p,t)}$$

$\uparrow$ fkn. av p

Hamiltonfunktionen med kanoniska rörelsemängden som variabel!

Anm

Sätt $\phi(z) = \mathcal{L}f(z) = xz - f(x(z))$

Betrakta

$$\mathcal{L}\phi(x) = z \cdot \underbrace{\frac{d\phi}{dz}}_{x} - \phi(z(x)) = zx - xz + f = f$$

OK så länge alla delar uppför sig bra, speciellt då

$$x = \frac{d\phi}{dz} = \underbrace{\frac{dx}{dz}}_{\frac{1}{dz/dx} = \frac{1}{d^2f/dx^2}} \cdot z + x \cdot 1 - \frac{df}{dz} \quad \text{är snäll}$$

← måste vara snäll.

$\Rightarrow \quad f \to \mathcal{L}f$ är entydig då $\dfrac{d^2f}{dx^2} \neq 0$

Detta är också kravet på f för att $x = x(z)$ ska finnas.

Legendretransformationen i fler variabler

Betrakta

$$F(x_1, .., x_m; u_1, \ldots, u_n) \quad \text{med} \quad \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i}\right) \neq 0 \qquad (*)$$

Def.

$$y_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_1, .., x_m; u_1, .., u_m) \qquad k = 1, .., m$$

Vi har nu (pga $(*)$)

$$x_i = \varphi_i(y_1, .., y_m; u_1, .., u_n) \qquad i = 1, .., m$$

Def. Legendretransformen av F är

$$G \equiv \mathcal{L}F = \sum_{k=1}^{m} y_k \varphi_k - F \quad \text{med} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial y_h} = \varphi_h \\ \dfrac{\partial G}{\partial u_i} = -\dfrac{\partial F}{\partial u_i} \end{cases}$$

Betrakta nu

$$L = L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t) = L(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t)$$

Def: $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ $\qquad$ $\dot{q}_k$ - gamla variabler
$\qquad\qquad\qquad\qquad$ p_k - nya variabler

Antag att $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l}\right) \neq 0$ så att $\dot{\underset{\sim}{q}} = \dot{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$

Legendretransformationen av L m.a.p variablerna $\dot{\underset{\sim}{q}}$ är

$$\mathcal{L} L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) = H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) = \sum_{k=1}^{f} \underbrace{\dot{q}_k p_k - L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)}_{\text{fkn av } (\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)}$$

Beräkna differentialen av H på två sätt

$$\begin{cases} dH = \sum_{k=1}^{f} \left[\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k\right] + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ dH = \sum_{k=1}^{f} \left[d\dot{q}_k p_k + \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} d\dot{q}_k\right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \\ \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{cases}$$

Obs! Derivatorna i V.L. tas med $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$ som variabler medan de i H.L tas med $(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$ som variabler. Allt uöny (?) tröja regler för Legendretransformen

Lagranges ekvationer ger nu

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt} p_k = \dot{p}_k \quad \Rightarrow$$

<u>Hamiltons kanoniska ekvationer</u>

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \quad k = 1, \ldots, f}$$

Not: f 2:a ordningens d.e $\longrightarrow$ $2f$ 1:a ordningens d.e.

Exempel: Harmonisk oscillator

$$L = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2$$

$$\Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$$

$$H = \dot{q}p - L = \underbrace{\dot{q}}_{\frac{p}{m}} p - \frac{1}{2} m \underbrace{\dot{q}^2}_{\left(\frac{p}{m}\right)^2} + \frac{1}{2} k q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$$

Hamiltons ekv. ger

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad (1)$$

$$-\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} = kq \qquad (2)$$

(1) ger $\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} \overset{(2)}{=} -\frac{k}{m} q$ OK!

Kanoniska system

Def: Ett mekaniskt system är kanoniskt om det kan beskrivas av en Hamiltonfunktion $H = H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$ så att Hamiltons ekvationer gäller.

När gäller detta? Jo, ett tillräckligt villkor är att systemet kan beskrivas av en Lagrangian och att

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l} \right) \neq 0$$

Exempel

i/ Partikel i centralkraftfält ($\Rightarrow$ plan rörelse)

$$L = T - U(r) = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - U(r)$$

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r = p_r \\ p_2 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2\dot\varphi = p_\varphi \end{cases}$$

Not: $\det\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j}\right) = \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{vmatrix} = m^2r^2 \neq 0$ för $r \neq 0$

$$\Rightarrow H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}) = \dot r p_r + \dot\varphi p_\varphi - L =$$

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} - \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r^2\left(\frac{p_\varphi}{mr^2}\right)^2\right) + U(r) =$$

$$= \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{1}{2mr^2}p_\varphi^2 + U(r)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{1}{m}p_r \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{1}{mr^2}p_\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial r} = -\dfrac{1}{mr^3}p_\varphi^2 + \dfrac{\partial U}{\partial r} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

Hamiltons ekvationer $\dfrac{\partial H}{\partial p_k} = \dot q_k$, $\dfrac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot p_k$ ger

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m}p_r = \dot r \\ \dfrac{1}{mr^2}p_\varphi = \dot\varphi \\ -\dfrac{1}{mr^3}p_\varphi^2 + \dfrac{\partial U}{\partial r} = -\dot p_r \\ 0 = -\dot p_\varphi \end{cases}$$

φ cyklisk koordinat

$\Downarrow$

$p_\varphi = \text{konst} = l =$

rörelsemängdsmomentet bevaras!

ii/ Laddad partikel i elektromagnetiskt fält

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\bar{q}}^2 - e\phi(\bar{q},t) + \frac{e}{c}\dot{\bar{q}} \cdot \bar{A}(\bar{q},t)$$

$$\Rightarrow \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i + \frac{e}{c} A_i(\bar{q},t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{q}_i = \frac{1}{m} p_i - \frac{e}{mc} A_i(\bar{q},t)$$

sätt in $\dot{q}_i(p_i, q_i, t)$ i L

$$H = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i p_i - L = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{m} p_i - \frac{e}{mc} A_i\right) p_i - L = \ldots =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}\right)^2 + e\phi(\bar{q},t)$$

Notera att

$$m\dot{\bar{q}} = \bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}$$

är den kinetiska rörelsemängden medan $\bar{p}$ är den kanoniska rörelsemängden (kanoniskt konjugerad till $\bar{q}$).

Anm: Det är den kanoniska rörelsemängden $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ som ersätts med $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$ i kvantmekaniken!

Anm 2: $$H = \frac{1}{2m}\bar{p}^2 - \underbrace{\frac{e}{mc}\bar{p}\cdot\bar{A}}_{\substack{\text{linjära} \\ \text{Zeeman-} \\ \text{effekten}}} + \underbrace{\frac{e^2}{2mc^2}\bar{A}^2}_{\substack{\text{kvadratiska} \\ \text{Zeeman-} \\ \text{effekten}}} + \underbrace{e\phi}_{\substack{\text{Stark-} \\ \text{effekten}}}$$

Variationsprincipen för Hamiltonfunktionen

Tidigare såg vi att

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)\, dt = 0$$

ger Lagranges ekvationer $\quad \dfrac{\delta L}{\delta q_k} = 0$.

Bilda nu

$$F(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, \dot{\underset{\sim}{q}}, \dot{\underset{\sim}{p}}, t) = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$$

och studera variationsproblemet

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F\, dt = 0$$

med oberoende variation av $q(t)$ och $p(t)$ (med variation 0 i ändpunkterna). Då följer

$$\frac{\delta F}{\delta q_k} = 0 \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} = 0 \iff \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$\frac{\delta F}{\delta p_k} = 0 \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} = 0 \iff \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Dvs vi får Hamiltons ekvationer.

Kanoniska transformationer (kap. 9: Goldstein)

Anm. Att en generaliserad koordinat Q_k är cyklisk innebär (per definition) att den saknas i Lagrange-funktionen $L = L(\tilde{Q}, \dot{\tilde{Q}}, t)$. Men då saknas Q_k även i Hamiltonfunktionen $H = H(\tilde{Q}, \tilde{P}, t)$ ty H är legendretransformen av L map de generaliserade hastigheterna $\dot{\tilde{Q}}$ enbart, dvs $\tilde{Q}$ är variabler som ej byts ut

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial Q_k} = -\frac{\partial L}{\partial Q_k} = 0 \quad \text{för } Q_k \text{ cyklisk}$$

Vi kan alltså avgöra om Q_k är cyklisk genom att inspektera H.

Antag att Q_k är cyklisk. Enligt Hamiltons ekvationer gäller då

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k} = 0 \quad \text{dvs} \quad P_k = \alpha_k = \text{konst}$$

Alltså kan H skrivas

$$H = H(Q_1, \ldots, Q_{k-1}, Q_{k+1}, P_1, \ldots, P_{k-1}, \alpha_k, P_{k+1}, \ldots, P_f, t)$$

Formellt har antalet frihetsgrader minskat från f till $f-1$, vilket gör ekvationerna lättare att lösa!

Antag att alla Q_k är cykliska. Då gäller

$H = H(\underset{\sim}{P}, t)$ och

$\dot{P}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad P_i = \alpha_i = \text{konst} \qquad i = 1, \dots, f$

Dessutom blir

$\dot{Q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial P_i} = v_i(t) = \text{fkn av } t \qquad i = 1, \dots, f$

dvs

$Q_i = \int v_i(t)\, dt + \beta_i \qquad i = 1, \dots, f$

Systemets rörelse beskrivs alltså av funktionerna

$\{Q_i(t)\}$ med $\{\alpha_i, \beta_i\}$ som integrationskonstanter.

Fråga: Kan man systematiskt hitta nya uppsättningar kanoniska variabler $\{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}\}$ så att alla variabler blir cykliska

Svar: Använd kanoniska transformationer!

Def: En transformation

$$\begin{cases} \{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}\} \to \{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}\} \\ H(q,p,t) \to K(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) \end{cases}$$

kallas kanonisk om den bevarar strukturen på de kanoniska ekvationerna, dvs

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{Q}_i = \dfrac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_i} \end{cases}$$

Anm. Både variabler och Hamiltonfunktion transformeras!

Ett sätt att garantera detta är att kräva att variationsprincipen ($\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}$ oberoende)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) \right] dt = 0$$

skall gälla i de nya variablerna

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{f} P_i \dot{Q}_i - K(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) \right] dt = 0$$

(ty då följer Hamiltons kanoniska ekvationer)

Enklaste sättet att garantera att variationsprincipen gäller även i de nya variablerna är att kräva att

$$\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) = \sum_{j=1}^{f} P_j \dot{Q}_j - K(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) + \frac{d}{dt} F \qquad (*)$$

där

$$F = F(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t)$$

ty då gäller

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F \, dt = \delta \left[F \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

eftersom variationen är noll i ändpunkterna.

Anm: • F beror av gamla och nya variabler, men ej av tidsderivatorna av dessa dessa koordinater. F kan dock bero explicit av tiden.

• Om man uttrycker F som funktion av f gamla och f nya variabler fungerar F som en genererande funktion till den kanoniska transformationen.

• Vi kan identifiera fyra olika former av F

A/ Antag att

$$F = F(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t) = F_1(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$$

Då gäller

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{f} \left[\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right]$$

Insättning i (*) ger

$$\sum_{j=1}^{f} \left(p_j - \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{f} \left(P_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \right) \dot{Q}_j + \left[H - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right]$$

$\underset{\sim}{q}$ och $\underset{\sim}{Q}$ kan betraktas som oberoende variabler

$\Rightarrow$ De olika termerna måste vara 0 oberoende av varandra

$$\Rightarrow \begin{cases} p_j = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_j} & (a) \\ P_j = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_j} & (b) \\ K = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t} & (c) \end{cases}$$

Ur ekv. (a) löser vi ut

$$Q_i = Q_i(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) \qquad i = 1, .., f$$

Detta är möjligt då $\det \left(\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} \right) \neq 0$

Ur ekv. (b) löser vi ut P_i. Insättning av $Q_i(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$ ger

$$P_i = P_i(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$$

Detta är möjligt om $\det \left(\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial Q_i \partial Q_j} \right) \neq 0$

Alternativt kan vi ur ekv. (6) lösa ut

$$q_j = q_j(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t)$$

Detta insatt i ekv. (9) ger

$$p_i = p_i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t)$$

Sammanfattning

Funktionen

$$F_1 = F_1(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$$

genererar en kanonisk transformation genom sambanden

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Exempel: Harmonisk oscillator

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

Prova den kanoniska transformationen som genereras av

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot Q$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q & (1) \\[2ex] P = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q} = \dfrac{1}{2} m\omega q^2 \dfrac{1}{\sin^2 Q} & (2) \end{cases}$$

Ekv. (2) ger

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

Insättning i ekv. (1) ger

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$$

Slutligen gäller

$$K = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q + 0 = \omega P$$

I de nya variablerna (Q,P) gäller de kanoniska ekvationerna

$$\begin{cases} \dot{P} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \alpha = \text{konst.} & (Q \text{ cyklisk}) \\ \dot{Q} = \dfrac{\partial K}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q = \omega t + \beta \end{cases}$$

Lösningen blir alltså

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta)$$

Anm: Vi har transformerat oss till nya variabler där lösningen är trivial. Problemet är nu istället att hitta bästa transformationen.

B/ Antag att $F = F(\tilde{q}, \tilde{P}, t)$

Eftersom

$$-P_j = \frac{\partial F_1}{\partial Q_j}$$

kan vi byta ut $\tilde{Q}$ mot $-\tilde{P}$ genom en Legendretransform av $F_1(\tilde{q}, \tilde{Q}, t)$ m.a.p. $\tilde{Q}$:

$$(\mathcal{L}F_1)(\tilde{Q}) = \sum_k Q_k \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial Q_k}}_{-P_k} - F_1 = \mathcal{L}F_1(\tilde{q}, \tilde{P}, t)$$

Obs! Skrivsättet

$$\underbrace{(\mathcal{L}F_1)}_{\text{Legendretransformen av } F_1}\underbrace{(Q)}_{\text{m.a.p. } Q} = \underbrace{\mathcal{L}F_1(\tilde{q}, \tilde{P}, t)}_{}$$

Här är transformen som funktion av $(\tilde{q}, \tilde{P}, t)$.

Låt oss kalla transformationen $-F_2$:

$$F_2(\tilde{q}, \tilde{P}, t) = \sum_k Q_k P_k + F_1$$

att uppfatta som funktioner av $(\tilde{q}, \tilde{P}, t)$

Vi kan nu göra på två sätt

1) Sätt in F_2 i $(*)$ och härled uttrycken för variabelsambanden som i A)

eller

2) Utnyttja egenskaperna hos Legendretransformer

Vi väljer alt. 2) : (Alt 1, se rel. uppgift 6.4)

Vi vet att

transformen

$$\frac{\partial(-F_2)}{\partial(-P_k)} = Q_k \quad \text{— gamla variabeln}$$

nya variabeln

$$\frac{\partial(-F_2)}{\partial q_i} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \qquad \left(= -p_i \text{ enl. } (A)\right)$$

variabel som ej ändras

$$\frac{\partial(-F_2)}{\partial t} = -\frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}}$$

Ur $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ kan vi lösa ut $\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{q}, p, t)$

Insättning i $Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}$ ger $\underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{q}, p, t)$

<u>Exempel</u> $F_2(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}) = \sum_{i=1}^{f} q_i P_i$

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i \\[2ex] Q_k = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_k} = q_k \\[2ex] K = H \end{cases}$$

Identitetstransformen!

c/ Antag $F = F(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$

Eftersom

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$$

kan vi byta ut $\underset{\sim}{q}$ mot $\underset{\sim}{p}$ genom

$$(\mathcal{L}F_1)(\underset{\sim}{q}) = \sum_{i=1}^{f} q_i \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial q_i}}_{p_i} - F_1 = \underbrace{\mathcal{L}F_1(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)}_{-F_3(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)}$$

Enligt egenskaper hos Legendretransformen har vi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(-F_3)}{\partial p_k} = q_k \\[2mm] \dfrac{\partial(-F_3)}{\partial Q_k} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_k} - P_k \\[2mm] \dfrac{\partial(-F_3)}{\partial t} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$$

Alltså gäller

$$\boxed{q_k = -\frac{\partial F_3}{\partial p_k} \quad ; \quad P_k = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_k} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}}$$

D) Antag att $F = F(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$

Eftersom

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$

kan vi byta $\underset{\sim}{q}$ mot $\underset{\sim}{p}$ genom en Legendretransform av F_2. Vi kan också utgå från F_1 och göra en Legendretransform m.a.p både $\underset{\sim}{q}$ och $\underset{\sim}{Q}$. Välj det senare!

$$(\mathcal{L}F_1)(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}) = \sum_i q_i \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial q_i}}_{p_i} + \sum_j Q_j \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}}_{-P_j} - \quad = \underbrace{\mathcal{L}F_1(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)}_{-F_4(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)}$$

Egenskaper hos L-transformeringen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(-F_4)}{\partial(-P_k)} = Q_k \\[2ex] \dfrac{\partial(-F_4)}{\partial p_k} = q_k \\[2ex] \dfrac{\partial(-F_4)}{\partial t} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$$

Alltså har vi

$$\boxed{q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial p_k} \quad ; \quad Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}}$$

Kanoniska transformationer (sammanfattning)

Typ A $\quad F_1 = F_1(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ - gen funktion

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Typ B $\quad F_2 = F_2(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ - gen funktion

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Typ C $\quad F_3 = F_3(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ - gen. funktion

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

Typ D $\quad F_4 = F_4(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$ - gen. funktion

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

Exempel på kanoniska transformationer

i/ Identitetstransformationen

$$\begin{cases} Q_i = q_i \\ P_i = p_i \end{cases}$$

Denna måste vara en kanonisk transformation, ty med $K(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) = H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$ gäller de kanoniska ekvationerna.

Finns det en genererande funktion för denna transformation?

Typ A: $F_1(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ — Går ej, ty $\underset{\sim}{q}$ och $\underset{\sim}{Q}$ kan inte väljas oberoende!

Typ B: $F_2(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ — Går bra, ty $\underset{\sim}{q}$ och $\underset{\sim}{P}$ kan väljas oberoende!

Typ C: $F_3(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ — Går bra, ty $\underset{\sim}{Q}$ och $\underset{\sim}{p}$ kan väljas oberoende!

Typ D: $F_4(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$ — Går ej, ty $\underset{\sim}{P}$ och $\underset{\sim}{p}$ kan inte väljas oberoende!

Alt: Se att $p_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} \neq$ fkn. av P_i etc

Typ B

$$F_2 = \sum_{k=1}^{f} q_k P_k$$

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i \\ Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i \end{cases}$$

Typ C

$$F_3 = -\sum_{k=1}^{f} p_k Q_k$$

$$\begin{cases} q_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_i} = Q_i \\ P_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_i} = p_i \end{cases}$$

ii/ $\begin{cases} Q_i = p_i \\ P_i = -q_i \end{cases}$ kasta om q & p

Finns det en genererande funktion till denna transformation?

Typ A: $F_1(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ Går bra!

Typ B: $F_2(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ Går ej!

Typ C: $F_3(\underset{\sim}{Q}, p, t)$ Går ej!

Typ D: $F_4(\underset{\sim}{P}, p, t)$ Går bra!

<u>Typ A</u>

$$F_1 = \sum_{k=1}^{f} q_k Q_k$$

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i \\ P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i \end{cases}$$

<u>Typ D</u>

$$F_4 = \sum_{1}^{f} P_k p_k$$

$$\begin{cases} q_i = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_i} = -P_i \\ Q_i = \dfrac{\partial F_4}{\partial P_i} = p_i \end{cases}$$

Alltså är transformationen kanonisk!

(om K sätts till H såklart!)

Poissonparenteser

Def: Om u och v är två funktioner av de kanoniska variablerna $(\underline{q}, \underline{p})$ så är deras Poissonparentes given av

$$[u, v]_{q,p} = \sum_i \left[\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right]$$

Från definitionen följer att

$$[q_k, q_l] = 0 \quad ; \quad [p_k, p_l] = 0 \qquad \forall\ k, l = 1, \dots, f$$

$$[q_k, p_l] = \delta_{kl} = -[p_l, q_k]$$

Man kan också visa följande egenskaper

$$[u, u] = 0$$

$$[u, v] = -[v, u]$$

$$[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w] \qquad a, b \text{ - konstanter}$$

$$[uv, w] = u[v, w] + [u, w]v$$

Samt den något mer invecklade Jacobis identitet

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$$

Man kan också visa att Poissonparenteser är invarianta under kanoniska transformationer.

Från detta kan man visa följande teorem:

Teorem: Transformationen $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}) \to (\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P})$ är kanonisk om och endast om

$$[Q_i, Q_j] = 0$$

$$[P_i, P_j] = 0 \qquad \forall\ i, j = 1, \ldots, f$$

$$[Q_i, P_j] = \delta_{ij}$$

Ex/

$$\begin{cases} Q = \sqrt{m\omega}\, q \\ P = \dfrac{1}{\sqrt{m\omega}}\, p \end{cases}$$

$$[Q, Q] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = 0$$

$$[P, P] = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 0$$

$$[Q, P] = \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial q}}_{\sqrt{m\omega}}\underbrace{\frac{\partial P}{\partial p}}_{\frac{1}{\sqrt{m\omega}}} - \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial p}}_{0}\underbrace{\frac{\partial P}{\partial q}}_{0} = 1$$

OK! Transformationen är kanonisk!

Ex/

$$\begin{cases} q = \sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}}\sin Q \\ p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q \end{cases}$$

$$[q, q] = [p, p] = 0$$

$$[q, p]_{Q,P} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\cos Q \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\cos Q$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2m\omega P}} \sin Q \cdot (-1)\sqrt{2m\omega P}\sin Q = \cos^2 Q + \sin^2 Q = 1$$

OK!

Rörelseekvationer och Poissonparenteser

Betrakta $u(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$ som är en funktion av de kanoniska variablerna $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p})$. Vi kan då skriva

$$\frac{du}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial u}{\partial q_i} \underbrace{\dot{q}_i}_{\frac{\partial H}{\partial p_i}} + \frac{\partial u}{\partial p_i} \underbrace{\dot{p}_i}_{-\frac{\partial H}{\partial q_i}} \right] + \frac{\partial u}{\partial t} =$$

$$= \underbrace{\sum_i \left[\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right]}_{[u,\, H]} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Dvs, tidsutvecklingen av u ges av

$$\frac{du}{dt} = [u,\, H] + \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (*)$$

Sätt $u = q_i$ och $u = p_i$ $\Rightarrow$

$$\dot{q}_i = [q_i,\, H] \quad ; \quad \dot{p}_i = [p_i,\, H]$$

dvs ett bekvämt sätt att uttrycka Hamiltons ekvationer. Ekv. $(*)$ gäller dock allmänt och är ett mycket praktiskt sätt att undersöka om en funktion $u(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)$ är en rörelsekonstant.

Exempel

Betrakta en Hamiltonian för ett system med två frihetsgrader

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 \qquad ; \; a_1, a_2 \text{ - konstanter}$$

Bestäm ett villkor på a_1 och a_2 så att $f(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}) = q_1 p_2 - q_2 p_1$

är en rörelsekonstant.

— x —

Detta kan göras med Poissonparenteser. f är en rörelsekonstant om

$$0 = \frac{df}{dt} = [f, H] + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{=0} = \left[q_1 p_2 - q_2 p_1, \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2\right] \quad (*)$$

Notera nu att alla Poissonparenteser är noll förutom

$$[q_i, p_j] = 1 \text{ om } i = j \qquad ; \qquad [p_i, q_j] = -1 \text{ om } i = j$$

Använd reglerna för Poissonparenteser och förenkla $(*)$:

$$0 = [f, H] = \left[q_1 p_2 - q_2 p_1, \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2\right] =$$

$$= \frac{p_2}{2m} \underbrace{[q_1, p_1^2]}_{p_1[q_1,p_1] + [q_1,p_1]p_1 = 2p_1} + q_1 a_2 \underbrace{[p_2, q_2^2]}_{-2q_2} - \frac{p_1}{2m} \underbrace{[q_2, p_2^2]}_{2p_2} - q_2 a_1 \underbrace{[p_1, q_1^2]}_{-2q_1} =$$

$$= \frac{p_2}{\cancel{2m}} \cancel{2} p_1 - 2 q_1 q_2 a_2 - \frac{p_1}{\cancel{2m}} \cancel{2} p_2 + 2 q_1 q_2 a_1 = 2 q_1 q_2 (a_1 - a_2)$$

Detta är noll (för godtyckliga q_1, q_2) då

$$a_1 = a_2$$

Anm: $a_1 = a_2$ ger en Hamiltonian (och Lagrangian) som är symmetrisk för rotationer kring z-axeln (om q_1 tolkas som x och q_2 som y). Då vet vi enl. Noethers teorem att L_z är bevarad. Vårt f ovan är precis L_z.

Fasrummet

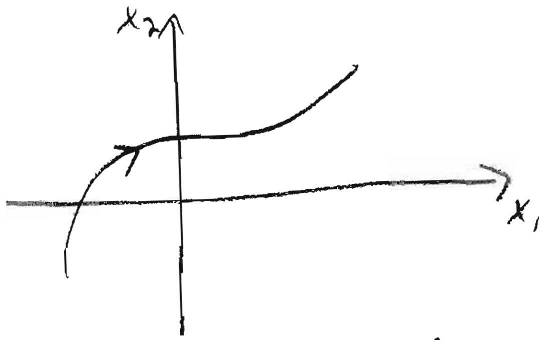
Def: Fasrummet $\mathbb{P}$ till ett kanoniskt system är rummet av punkter $\underset{\sim}{x} = \{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}\}$

Fasrummet har dimension $2f$.

Våra rörelseekvationer kan nu skrivas

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) \quad \text{där} \quad \underset{\sim}{F} = \left(\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right)$$

En lösning representerar en kurva i fasrummet



Denna representation kallas fasporträtt.

Exempel på endimensionell rörelse

1) Harmonisk oscillator. $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$

Vi har $\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = p \end{cases}$ $\quad F_1 = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m}p = \frac{1}{m}x_2$

$\quad F_2 = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q = -m\omega^2 x_1$

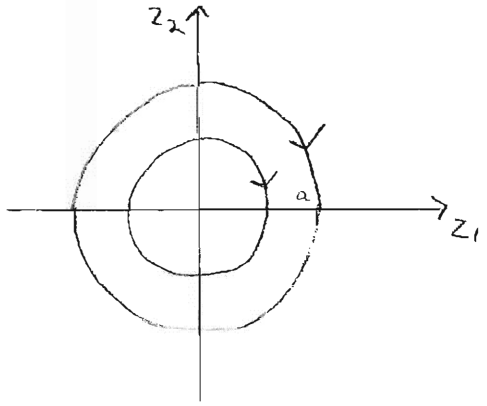
$\Rightarrow \quad \dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})$ dvs $\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{m}x_2 \\ \dot{x}_2 = -m\omega^2 x_1 \end{cases}$

Byt variabler: $\begin{cases} z_1(\tau) = \omega\sqrt{m}\, x_1(t) \\ z_2(\tau) = \frac{1}{\sqrt{m}}\, x_2(t) \\ \tau = \omega t \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dz_1}{d\tau} = z_2 \\ \frac{dz_2}{d\tau} = -z_1 \end{cases}$$

Lösning: $\begin{cases} z_1(\tau) = a\sin(\tau - \tau_0) \\ z_2(\tau) = a\cos(\tau - \tau_0) \end{cases}$ med $a = \sqrt{(z_1^0)^2 + (z_2^0)^2}$

$\Rightarrow$ Fasporträtten är cirklar med radien a



Cirkla med radie a

$z_1^2 + z_2^2 = a^2 = \text{konst}$

$\Rightarrow \omega^2 m x_1^2 + \frac{1}{m}x_2^2 =$

$= 2\left(U(q) + \frac{1}{2m}p^2\right) = 2E = \text{konst.}$

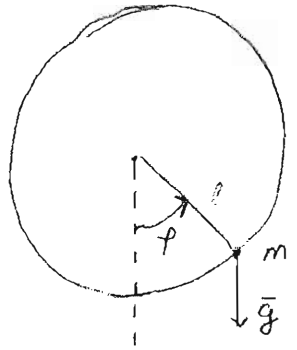
Not: $E = \text{konst}$ gäller allmänt om $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}, t) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})$,
dvs om vi har ett <u>autonomt</u> system.

a/ <u>Plan matematisk pendel</u>

Välj $q = l\varphi$ som gen. koord

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + mgl\cos\frac{q}{l} \Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

$$\Rightarrow H = \dot{q}p - L = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} - mgl\cos\frac{q}{l} = \frac{p^2}{2m} - mgl\cos\frac{q}{l}$$



Sätt $\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = p = m\dot{q} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} = \dfrac{x_2}{m} \\ F_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -mg\sin\dfrac{q}{l} = -mg\sin\dfrac{x_1}{l} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{m} x_2 \\ \dot{x}_2 = -mg\sin\left(\dfrac{x_1}{l}\right) \end{cases}$$

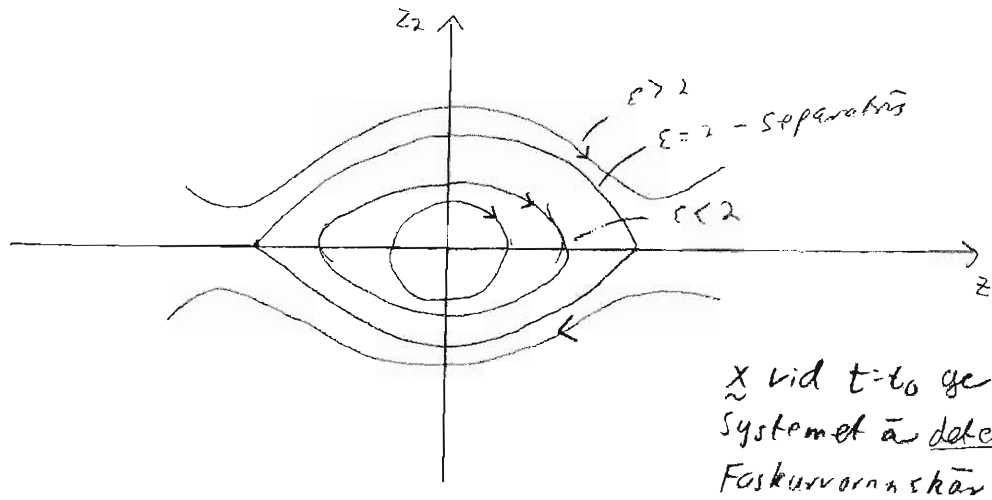
<u>Def</u> $\begin{cases} z_1 = \dfrac{x_1}{l} \\ z_2 = \dfrac{x_2}{m\sqrt{gl}} \\ \tau = \sqrt{\dfrac{g}{l}}\, t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dz_1}{d\tau} = z_2 \\ \dfrac{dz_2}{d\tau} = -\sin z_1 \end{cases}$

<u>Def</u>: $\varepsilon = \frac{1}{2} z_2^2 + 1 - \cos z_1 = \frac{E}{mgl} = \text{konst}$ (ty inget explicit tidsberoende i H.)

$\varepsilon \ll 1 \Rightarrow \sin z_1 \simeq z_1 \Rightarrow$ harmonisk oscillator

$0 < \varepsilon < 2 \Rightarrow$ ung oscillator

$\varepsilon > 2 \Rightarrow z_2^2 > 0 \ \forall t \Rightarrow$ svänger alltid åt samma håll (medurs eller moturs)

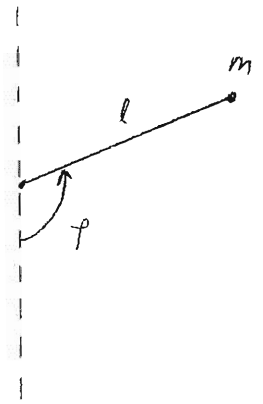


$\underset{\sim}{x}$ vid $t = t_0$ ge <u>entydigt</u> fasporträtt

Systemet är <u>deterministiskt</u>

Faskurvorna skär ej varandra.

Exempel: den plana pendeln i mer detalj



Max utslag $\varphi_0 < \pi$

$$U(\varphi) = mgl(1-\cos\varphi)$$

$$E = T + U$$

Vid φ_0 är $T = 0 \Rightarrow E = mgl(1-\cos\varphi_0)$

Vid allm φ är $E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1-\cos\varphi)$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

$$\Rightarrow dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$$

perioden ges av

$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$

$$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

Def

$$\sin\alpha = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \longrightarrow \alpha = 0 \\ \varphi = \varphi_0 \longrightarrow \alpha = \pi/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha\, d\alpha = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\cdot\frac{1}{2}d\varphi$$

$$\Rightarrow d\varphi = 2\sin\frac{\varphi_0}{2}\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\alpha}}\,d\alpha$$

$$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\alpha}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K\left[\sin\frac{\varphi_0}{2}\right]$$

$$K(z) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-z^2\sin^2\alpha}}$$

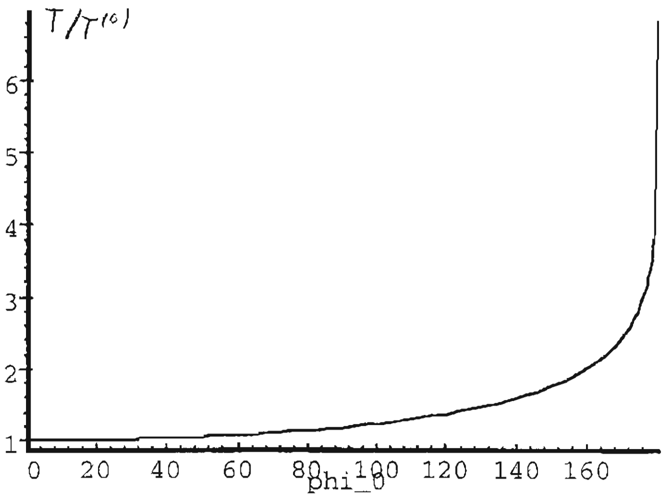
Fullständig elliptisk integral av första slaget.

Utveckla kring $z=0$

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2\sin^2\alpha}} \simeq 1 + \frac{1}{2} z^2 \sin^2\alpha + \frac{3}{8} z^4 \sin^4\alpha + \dots$$

$$\Rightarrow \quad T \simeq \underbrace{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}_{T^{(0)}} \left[1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \frac{11}{3072}\varphi_0^4 + \dots\right]$$

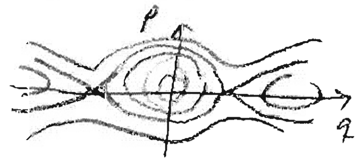
φ_0	$T/T^{(0)}$
10°	1,0019
20°	1,0077
45°	1,040
90°	1,18
135°	1,53
175°	2,88
179°	3,90
179,9°	5,37
179,99°	6,83



<u>Obs!</u> $\varphi_0 \to \pi \Rightarrow z \to 1 \Rightarrow K(z) \to \infty$

Det tar oändlig tid att nå det övre (instabila) jämviktsläget.

Dvs. även om separatrisen verkar ha faskurvor som skär varandra så gör de ej det p.g.a. att det tar så lång tid att nå dit

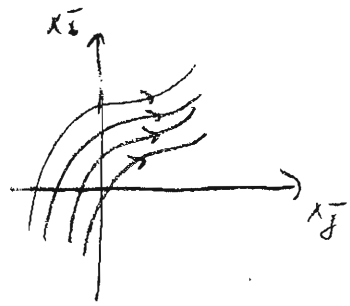


Liouvilles teorem

Def: Fasrummet $\mathbb{P}$ till ett kanoniskt system är rummet av punkter $\underset{\sim}{x} = \{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}\}$

Fasrummet har dimension $2f$.

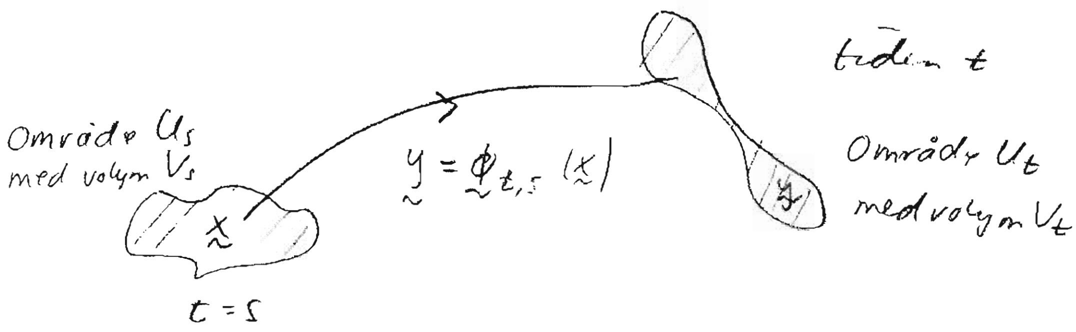
Om vi startar systemet vid tiden $t=s$ i en punkt $\underset{\sim}{x}$ kommer lösningen till Hamiltons ekvationer att representeras av en kurva i fasrummet:



Allmänt kallas lösningen

$$\underset{\sim}{\phi}_{t,s}(\underset{\sim}{x}) = (\varphi^1_{t,s}(\underset{\sim}{x}), \ldots, \varphi^{2f}_{t,s}(\underset{\sim}{x}))$$

ett <u>flöde</u> i fasrummet. Vi skall se att detta kan ses som rörelsen hos en inkompressibel vätska, dvs om vi har en <u>uppsättning av</u> begynnelsepunkter $\{\underset{\sim}{x}\}$ som fyller en volym vid $t=s$ kommer punkterna $\{\underset{\sim}{y}\}$ vid tiden t att fylla en lika stor volym (och med samma orientering)



<u>Liouvilles teorem</u>: $\boxed{V_s = V_t}$

<u>Bevis</u>:

Vi har att

$$V_s = \int_{U_s} d\underset{\sim}{x} \quad ; \quad V_t = \int_{U_t} d\underset{\sim}{y}$$

Utnyttja nu att $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{\Phi}_{t,s}(\underset{\sim}{x})$ för att byta integrations variable i det andra uttrycket.

$$V_t = \int_{U_t} d\underset{\sim}{y} = \int_{U_s} \underbrace{\det\left(\frac{\partial \underset{\sim}{\Phi}}{\partial \underset{\sim}{x}}\right)} d\underset{\sim}{x}$$

Jacobianen för transformationen (flödet $\underset{\sim}{\Phi}$)

Taylorutveckla nu $\underset{\sim}{\Phi}(\underset{\sim}{x})$ i närheten av $t = s$.

$$\underset{\sim}{\Phi}_{t,s}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{x} + \frac{d\underset{\sim}{\Phi}}{dt}\bigg|_{t=s} (t-s) + \ldots$$

$$\{\dot{\underset{\sim}{q}}(s), \dot{\underset{\sim}{p}}(s)\} = \left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right\}\bigg|_{t=s}$$

$$= \underset{\sim}{x} + \left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}(s), -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}(s)\right\}(t-s) + \ldots$$

Tag nu derivatan av ϕ_i m.a.p. x_k

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{ x_i + \dot{x}_i (t-s) + \ldots \right\} =$$

$$= \delta_{ik} + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} + \ldots =$$

$$= \delta_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{ \frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}} \right\}_i (t-s) + \ldots$$

Tag nu determinanten av $\frac{\partial \underset{\sim}{\phi}}{\partial \underset{\sim}{x}} = \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} \right\}$

vektoranalys

$$\det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}\right) = \det\left(\delta_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right\}_i (t-s) + \ldots\right) =$$

$$= 1 + (t-s)\, Sp\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right\}_i\right) + O((t-s)^2)$$

$$= 1 + (t-s)\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right\}_i + O((t-s)^2)$$

$$= 1 + (t-s)\underbrace{\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)}_{0} + O((t-s)^2) = 1 + O((t-s)^2)$$

Alltså gäller

$$\det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}\right) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$V_t = \int_{U_s} \det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}\right) d\underset{\sim}{x} = \int_{U_s} d\underset{\sim}{x} = V_s$$

V.S.V.

<u>Not</u>: termen $O((t-s)^2)$ kan försummas ty

$$\frac{d\Delta V}{d\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{U_s}\left[\det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}\right) d\underset{\sim}{x} - 1\right] d\underset{\sim}{x} = \lim_{\Delta t \to 0}\int_{U_s} O(\Delta t)\, d\underset{\sim}{x} = 0$$

Anm

Notera att vi kan betrakta $\left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right\}$ som ett "hastighetsfält":

$$\left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right\} = \left\{\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_f}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial q_f}\right\}$$

Men i härledningen ovan såg vi att

$$\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right\}_i = 0$$

Detta är ju inget annat än divergensen av hastighetsfältet.

$$\nabla \cdot \left\{\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}}\right\} = 0$$

Jämför med kontinuitetsekvationen:

$$\frac{d\rho}{dt} + \underbrace{\nabla \cdot \bar{v}}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Inkompressibelt flöde!

Ex/ Harmonisk oscillator

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{\omega}{2}\left\{\left(\frac{p}{\sqrt{m\omega}}\right)^2 + \left(\sqrt{m\omega}\, q\right)^2\right\}$$

Inför $\begin{cases} Q = \sqrt{m\omega}\, q \\ P = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\, p \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad K = H = \frac{\omega}{2}\left\{P^2 + Q^2\right\}$$

Detta är en kanonisk transformation. (visa!)

Hamiltons kanoniska ekvationer ger

$$\begin{cases} \dot{P} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q} = -\omega Q \\ \dot{Q} = \dfrac{\partial K}{\partial P} = \omega P \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\omega}\ddot{Q} = -\omega Q \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q} + \omega^2 Q = 0$$

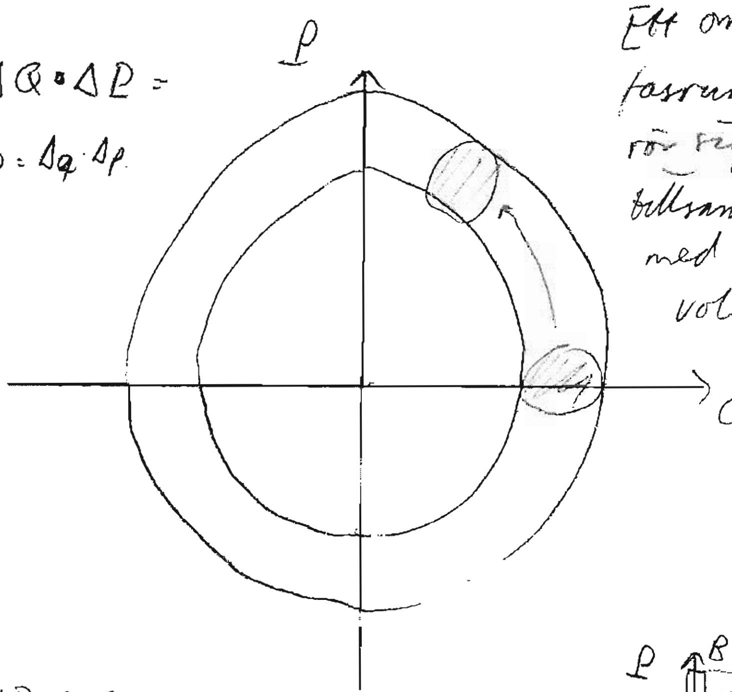
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} Q = \alpha \sin(\omega t + \beta) \\ P = \alpha \cos(\omega t + \beta) \end{cases}$$

I detta fall är $K = H = E = \frac{\omega}{2}\alpha^2 \quad \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2E}{\omega}}$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} Q = \sqrt{\dfrac{2E}{\omega}} \sin(\omega t + \beta) \\ P = \sqrt{\dfrac{2E}{\omega}} \cos(\omega t + \beta) \end{cases}$$

Volymen: $V = \Delta Q \cdot \Delta P =$

$= \sqrt{m\omega}\,\Delta q \cdot \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\,\Delta p = \Delta q \cdot \Delta p$



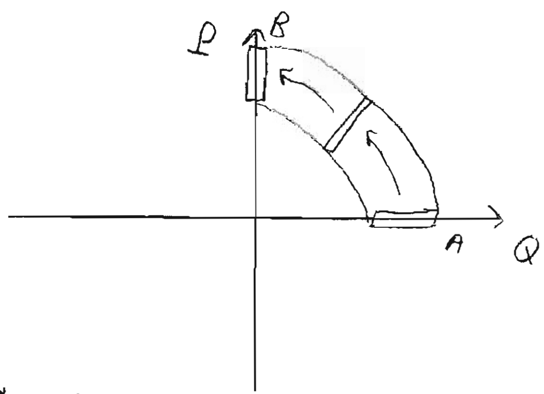
Ett område i fasrummet rör sig runt tillsammans med bibehållen volym

Ex: Starta med $\Delta P = \varepsilon \simeq 0$, $\Delta Q = a$

$V_A = \varepsilon a$

Vid B gäller

$$V_B = V_A = \underbrace{\varepsilon}_{\Delta Q}\underbrace{a}_{\Delta P}$$



"Spridningen" i Q har konverterats till "spridning" i P.

Hamilton - Jacobis ekvation

Hamiltons kanoniska ekvationer,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad ; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad k = 1, \dots, f$$

är speciellt enkla att lösa om alla q_k är cykliska. Ett tillfälle då detta inträffar är då $H \equiv 0$

$$H \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{q}_k = 0 \\ \dot{p}_k = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_k = \beta_k = \text{konst} \\ p_k = \alpha_k = \text{konst.} \end{cases}$$

Kan vi hitta en sådan kanonisk transformation att $K = 0$?
Prova med en kanonisk transformation av typ B:

$$\{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)\} \longrightarrow \{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, K(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\}$$

$F_2 = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ - genererande funktion av typ B.

Variabelsambanden är

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j}$$

Ur de kanoniska ekvationerna följer

$$\begin{cases} \dot{Q}_k = \dfrac{\partial K}{\partial P_k} = 0 \\ \dot{P}_k = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_k} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Q_k = \beta_k = \text{konst} \\ P_k = \alpha_k = \text{konst.} \end{cases}$$

Funktionen S kan alltså uppfattas som en lösning $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}, t)$ till Hamilton-Jacobis ekvation.

$$H\left(q_i, p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Partiell differentialekvation i $\underset{\sim}{q}$ och t.

S kallas verkansfunktionen (eller Hamiltons principalfunktion).

Om $S = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}, t)$ är en lösning sådan att

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_k \partial q_l}\right) \neq 0$$

kan man ur relationerna

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} = \beta_k$$

lösa ut

$$q_k = q_k(\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta}, t)$$

Därmed är rörelseproblemet löst och S sägs vara en fullständig lösning.

Exempel: Fri partikel i 1 dimension

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad , \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad , \quad H = \dot{q}p - L = \frac{p^2}{2m}$$

Hamilton-Jacobis ekvationen blir

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Den är separabel: $S = S_1(q) + S_2(t)$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial q}\right)^2}_{\text{Konst} = E} + \underbrace{\frac{\partial S_2}{\partial t}}_{\text{Konst.} = -E} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial q}\right)^2 = E \\ \frac{\partial S_2}{\partial t} = -E \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_1 = \pm\sqrt{2mE}\, q + \text{konst.} \\ S_2 = -Et + \text{konst.} \end{cases}$$

Def: $P = \pm\sqrt{2mE}$

Då blir

$$S(q, P, t) = Pq - \frac{P^2}{2m}t + C^{\text{konst.}}$$

Alltså gäller

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = P \quad ; \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P} = q - \frac{P}{m}t$$

Eftersom $K = 0$ gäller att Q & P är konstanter

Alltså erhåller vi

$$\begin{cases} q(t) = Q + \frac{P}{m}t \\ p(t) = P \end{cases} \quad \text{med } Q \,\&\, P \text{ konstanter.}$$

Om H ej beror explicit av tiden blir Hamilton-Jacobis ekvation

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Vi kan då göra separationsansatsen

$$S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}, t) = W(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}) - Et$$

som ger

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = E$$

Detta är Hamilton-Jacobis karakteristiska (eller tidsoberoende) ekvation

Funktionen $W = W(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha})$ kallas för den reducerade verkansfunktionen (eller Hamiltons karakteristiska funktion).

1) Känner vi $W = W(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha})$ kan vi sätta in den i

$$S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}, t) = W(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}) - Et$$

Obs! $E = E(\underset{\sim}{\alpha})$

Sedan kan $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}, t)$ användas för att generera en kanonisk transformation (med $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{\alpha}$) så att $K = 0$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad \underbrace{Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j}}_{\substack{\text{Lös ut} \\ q_i = q_i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t)}} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Sätt in

Därmed har vi

$$\begin{cases} q_i = q_i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) \\ p_i = p_i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) \end{cases} \qquad \begin{cases} P_j = \alpha_j = \text{konst} \\ Q_j = \beta_j = \text{konst} \end{cases} \quad \text{ty } \tilde{H} = 0$$

Rörelseproblemet har den allmänna lösningen

$$\begin{cases} q_i(t) = q_i(\underset{\sim}{\beta}, \underset{\sim}{\alpha}, t) \\ p_i(t) = p_i(\underset{\sim}{\beta}, \underset{\sim}{\alpha}, t) \end{cases}$$

$\underset{\sim}{\alpha}$ och $\underset{\sim}{\beta}$ bestäms av begynnelsevillkoren

2/ Vi kan även använda $W(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha})$ direkt som genererande funktion.

Som tidigare sätter vi

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{\alpha}$$

$W(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P})$ är av typ B och därmed gäller

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad ; \quad \underbrace{Q_j = \frac{\partial W}{\partial P_j}}_{\text{lös ut } \underset{\sim}{q}} \quad ; \quad K = H = E(\underset{\sim}{P})$$

sätt in

$$\Longrightarrow \begin{cases} q_i = q_i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}) \\ p_i = p_i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}) \end{cases}$$

inget explicit tidsberoende!

Hamiltons ekvationer ger nu

$$\begin{cases} \dot{P}_j = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_j} = 0 \\ \dot{Q}_j = \dfrac{\partial K}{\partial P_j} = \dfrac{\partial E}{\partial P_j} = \dfrac{\partial E}{\partial \alpha_j} = v_j = \text{konst} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P_j = \alpha_j = \text{konst} \\ Q_j = v_j t + \beta_j \end{cases}$$

Rörelseproblemet har alltså den allmänna lösningen

$$\begin{cases} q_i(t) = q_i(\underset{\sim}{v}t + \underset{\sim}{\beta}, \underset{\sim}{\alpha}) \\ p_i(t) = p_i(\underset{\sim}{v}t + \underset{\sim}{\beta}, \underset{\sim}{\alpha}) \end{cases} \quad \text{med } v_j = \frac{\partial E}{\partial \alpha_j}$$

$\underset{\sim}{\alpha}$ och $\underset{\sim}{\beta}$ ges ur begynnelsevillkoren

<u>Exempel:</u> <u>Harmonisk oscillator i 1 dimension</u>

$$L = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 \quad ; \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

$$H = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$$

Inget tidsberoende $\Rightarrow$ Hamilton-Jacobis tidsoberoende ekvation för den reducerade verkansfunktionen:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 = E$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = 2m\left(E - \frac{1}{2} k q^2\right) = mk\Big(\underbrace{\frac{2E}{k}}_{a^2} - q^2\Big)$$

$$= mk\left(a^2 - q^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{mk}\sqrt{a^2 - q^2}$$

$$\Rightarrow W = \sqrt{mk}\int \sqrt{a^2 - q^2}\, dq$$

<u>Metod 1</u> Bilda $S = W - Et$

Välj $P = \alpha = E$ (ett möjligt val)

$$S(q, P, t) = \sqrt{mk}\int \sqrt{\frac{2P}{k} - q^2}\, dq - Pt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{mk}\sqrt{\dfrac{2P}{k} - q^2} & (1) \\ Q = \dfrac{\partial S}{\partial P} = \sqrt{mk}\ \dfrac{2}{k}\ \dfrac{1}{2} \underbrace{\displaystyle\int \dfrac{dq}{\sqrt{\dfrac{2P}{k} - q^2}}}_{\arcsin\left(\frac{q}{\sqrt{\frac{2P}{k}}}\right)} - t & (2) \end{cases}$$

Ekv. (2) $\Rightarrow$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{k}}\ \sin(\omega(t+Q)) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ekv. (1) $\Rightarrow$

$$p = \sqrt{2Pm}\ \cos(\omega(t+Q))$$

Tillsammans med $K = H + \dfrac{\partial S}{\partial t} \quad 0$ är detta den kanoniska transformationen

Hamiltons ekvationer ger (med $K=0$)
$P = E = $ konst och $Q = \beta = $ konst
Alltså erhålles rörelserna som

$$\begin{cases} q(t) = a \sin(\omega t + \theta_0) \\ p(t) = m\omega a \cos(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

med

$$\begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{2E}{m\omega^2}} \\ \theta_0 = \omega\beta \end{cases}$$

Metod II

Vi har

$$W = \sqrt{mk}\int\sqrt{a^2-q^2}\,dq \quad , \qquad a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

Välj $P = \alpha = E$

$$\Rightarrow \quad W = \sqrt{mk}\int\sqrt{\frac{2P}{k} - q^2}\,dq$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} p = \dfrac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{mk}\sqrt{\dfrac{2P}{k} - q^2} \\ Q = \dfrac{\partial W}{\partial P} = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\arcsin\left(\dfrac{q}{\sqrt{\frac{2P}{k}}}\right) \end{cases}$$

Detta ger

$$\begin{cases} q = \sqrt{\dfrac{2P}{k}}\sin(\omega Q) \\ p = \sqrt{2Pm}\cos(\omega Q) \end{cases} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Hamiltons ekvationer ger (med $K = E = P$)

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad ; \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} P = \alpha \\ Q = t + \beta \end{cases} \quad \leftarrow \text{ ej konstant med metod II}$$

Rörelsen erhålles alltså som

$$\begin{cases} q(t) = a\sin(\omega t + \theta_0) \\ p(t) = m\omega a\cos(\omega t + \theta_0) \end{cases} \quad \text{med} \quad \begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{2E}{m\omega^2}} \\ \theta_0 = \omega\beta \end{cases}$$

Dvs samma rörelse som tidigare!

Anmärkning:

1) Notera att om $S = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}, t)$ så har vi

$$\frac{dS}{dt} = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{} \sum_{i=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_i}}_{p_i} \dot{q}_i = \left[-H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) + \sum_i p_i \dot{q}_i\right]_{\underset{\sim}{p} = \frac{\partial S}{\partial \underset{\sim}{q}}}$$

$$-H\left(q_i, p_i = \frac{\partial S}{\partial q_k}, t\right)$$

ty $K=0$

Men $-H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) + \sum_i p_i \dot{q}_i = L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t)$. Integrera från t_0 till t

$$\Rightarrow \quad S(\underset{\sim}{q}(t), \underset{\sim}{\alpha}, t) = \int_{t_0}^{t} dt' \, L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t')\Big|_{\underset{\sim}{q}(t) \text{ lösn till rörelse-ekv}}$$

Detta är ju precis Hamiltons verkansintegral

$$I[\underset{\sim}{q}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(\underset{\sim}{q}(t), \dot{\underset{\sim}{q}}(t), t)$$

men med $\underset{\sim}{q}(t)$ som lösning till rörelseekvationerna insatt.

Med andra ord: Sätter vi in vår lösning $\underset{\sim}{q}(t)$ i verkansintegralen får vi den genererande funktion som "boostar" systemet från t_0 till t

2) Låt $\bar{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$

$$\Rightarrow \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial r_i} \qquad \left(\dot{r}_i = \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial r_i}\right)$$

$\Rightarrow$ Rörelsen är vinkelrät mot $S = \text{konst}$

$\Rightarrow$ $S = \text{konst}$ kan tolkas som en vågfront i kvantmekaniken

Vinkel-verkansvariabler

Exempel: Harmonisk oscillator i en dimension. $L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$

Sedan tidigare har vi att

$$\begin{cases} q(t) = a\sin(\omega t + \theta_0) \\ p(t) = m\omega a\cos(\omega t + \theta_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ a = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \\ \theta_0 = \omega\beta \end{cases}$$

Fasrummet för harmoniska oscillatorn är 2-dimensionellt: (q, p)

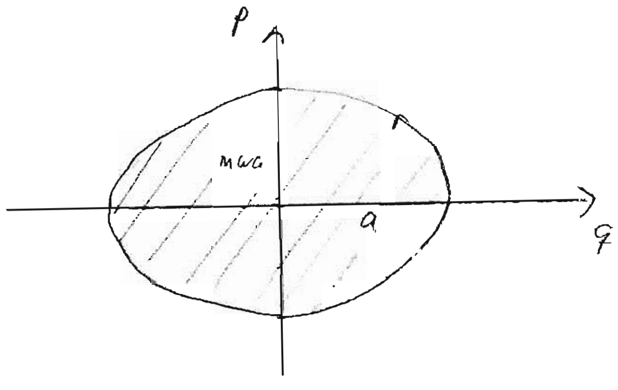
Systempunkten $(q(t), p(t))$ genomlöper en ellips

$$\left(\frac{q}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{m\omega a}\right)^2 = 1$$

Då $t \to t + \frac{2\pi}{\omega} = t + T = t + \frac{1}{\nu}$

vinkel-frekvens / period / frekvens

har vi löpt igenom ett varv



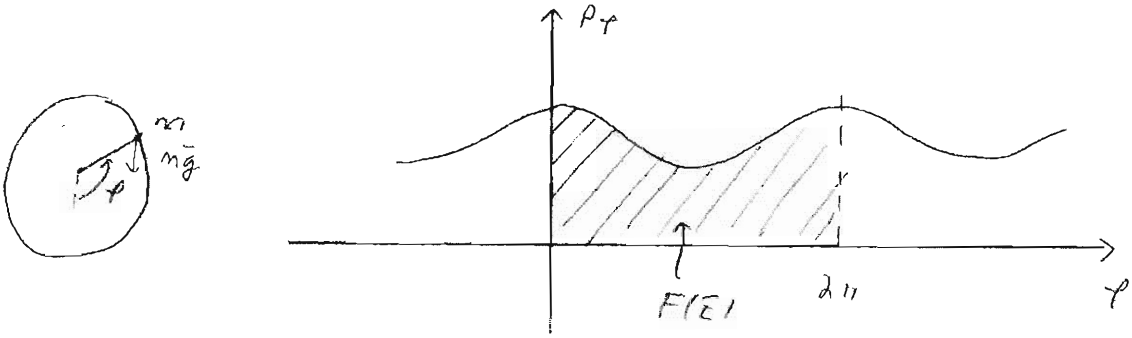
Ellipsens yta $= \pi a (m\omega a) = \pi m \omega a^2 = 2\pi \frac{E}{\omega} = F(E)$

Då gäller

$$\boxed{\frac{dF}{dE} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} = T = \text{perioden}}$$

Anm: Allmänt gäller för en periodisk rörelse att derivatan av ytan i fasrummet m.a.p. energin är lika med perioden T

I vissa fall blir den kurva som systempunkten genomlöper ej sluten.



Definieras F(E) som i figuren gäller fortfarande att

$$\frac{dF(E)}{dE} = T = \text{perioden}$$

Ytan F(E) kan skrivas

$$F(E) = \oint p\,dq = \oint \frac{\partial S}{\partial q}\,dq \quad \text{eller } \frac{\partial W}{\partial q}$$

För vår 1-dim harmoniska oscillator har vi sedan tidigare

$$W = \pm\sqrt{mk}\int \sqrt{\frac{2E}{k} - q^2}\,dq$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{mk}\sqrt{\frac{2E}{k} - q^2} \qquad a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$F(E) = \oint \pm\sqrt{mk}\sqrt{\frac{2E}{k} - q^2}\,dq = 2\int_{-a}^{a}\sqrt{mk}\sqrt{\frac{2E}{k} - q^2}\,dq = 2\int_{-a}^{a}\sqrt{mk}\sqrt{a^2 - q^2}\,dq$$

$$= 2\sqrt{mk}\left[\frac{q}{2}\sqrt{a^2 - q^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{q}{a}\right] = 2\sqrt{mk}\,\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{mk}\cdot a^2\cdot\pi = \sqrt{mk}\cdot\frac{2E}{k}\pi = 2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{dF}{dE} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} \quad \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{vår vinkelfrekvens!}$$

Tidigare valde vi den nya generaliserade impulsen $P = E$.

Låt oss istället välja

$$P = F(E) = \oint p\,dq \equiv J \quad = \text{verkansvariabel}$$

Dessutom kallar vi Q för w = vinkelvariabel

Då gäller $\qquad$ ty $J = F(E) = \frac{2\pi}{\omega} E$

$$p = \frac{\partial S(q,J)}{\partial q} \quad ; \quad w = \frac{\partial S(q,J)}{\partial J} \quad ; \quad K = E(J) \overset{\checkmark}{=} \frac{\omega J}{2\pi}$$

Hamiltons ekvationer i vinkel-verkansvariablerna (w, J) blir

$$\begin{cases} \dot{J} = -\dfrac{\partial K}{\partial w} = 0 & \Rightarrow \quad J = \text{konst.} \\ \dot{w} = \dfrac{\partial K}{\partial J} \quad \dfrac{\omega}{2\pi} & = \text{frekvensen för den periodiska rörelsen!} \end{cases}$$

<u>Exempel</u>: 1-dim harmonisk oscillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$$

Hamiltons karakteristiska ekvation (ty inget explicit t-beroende)

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 = E$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial q} = \pm \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2} k q^2\right)} \qquad (= p)$$

<u>Def</u> $\quad P = J = \oint \frac{\partial S}{\partial q}\,dq = \ldots = \frac{2\pi E}{\sqrt{k/m}} \quad \Rightarrow \quad E = \sqrt{\frac{k}{m}}\, J / 2\pi$

Alltså gäller $\quad K = H = E \quad \sqrt{\frac{k}{m}}\, J \frac{1}{2\pi}$

Hamiltons ekvationer:

$$\begin{cases} \dot{J} = -\dfrac{\partial K}{\partial w} = 0 \quad \Rightarrow \quad J = \text{konst.} \\ \dot{w} = \dfrac{\partial K}{\partial J} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\, \dfrac{1}{2\pi} \quad \leftarrow \text{vår frekvens } \nu = \dfrac{\omega}{2\pi}\,! \end{cases}$$

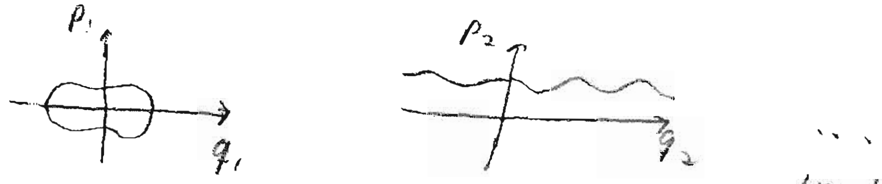
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

OBS! Den andra ekvationen ger vinkelfrekvensen för den periodiska rörelsen <u>utan att vi tagit fram varesig den kanoniska transformationen eller rörelsen explicit</u>!

Man kan visa att motsvarande gäller även mer komplicerade system, s.k. <u>separabla multipelperiodiska</u> system (t.ex. Keplerproblemet)

Antag att $S = \sum_i S_i(q_i, \alpha_i)$ (separabel)

Antag att rörelsen i varje (q_i, p_i) är periodisk, dock inte nödvändigtvis med samma period:



(multipelperiodisk)

<u>Def</u> $J_i = \oint \frac{\partial S_i}{\partial q_i} dq_i$

Gör en kanonisk transformation till (w_i, J_i)

Då gäller

$$\boxed{\frac{\partial K}{\partial J_i} = \frac{\omega_i}{2\pi}}$$

<u>Exempel Keplerproblemet</u>

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2}mv^2 - U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{A}{r} \\ p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \\ H = \dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{A}{r} \end{cases}$$

Hamilton Jacobis tidsoberoende ekvation

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{A}{r} = E$$

Ansätt

$$S = S_1(r) + S_2(\varphi)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left\{ \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 - \frac{A}{r} - E \right\} 2mr^2}_{\substack{\text{endast fkn av } r \\ = -\ell^2}} + \underbrace{\left(\frac{\partial S_2}{\partial \varphi}\right)^2}_{\substack{\text{endast} \\ \text{fkn av } \varphi \\ = \ell^2}} = 0$$

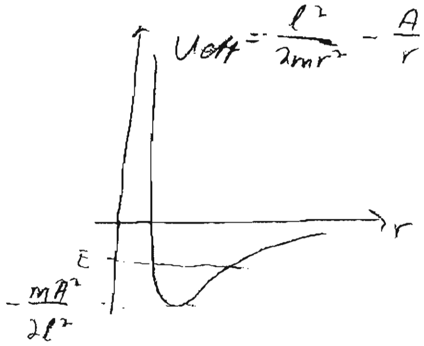
$\Rightarrow$ Båda termerna konstanter

Välj $\left(\frac{\partial S_2}{\partial \varphi}\right)^2 = \ell^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial S_1}{\partial r} = \sqrt{2m\left(E + \dfrac{A}{r} - \dfrac{\ell^2}{2mr^2}\right)} & (= p_r) \\[2ex] \dfrac{\partial S_2}{\partial \varphi} = \ell & (= p_\varphi) \end{cases}$$

Vi vill ha slutna banor $\Rightarrow$ 2 rötter till $p_r = 0$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad -\frac{mA^2}{2\ell^2} < E < 0$$



Def: Verkansvariabeln i r-led:

$$J_r = \oint p_r \, dr =$$

$$= \oint \sqrt{2m\left(E + \frac{A}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)} \, dr =$$

$$= \ldots = \left(-\ell + \frac{A}{2}\sqrt{\frac{2m}{-E}}\right) 2\pi$$

Not: Gränserna till integralen ges av $r = \frac{A}{-2E}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\ell^2}{mA^2}}\right)$

Fås genom att kontrollera när $\sqrt{\cdot} = 0$.

I (φ, p_φ) gäller att φ går från 0 till 2π och att vi kräver $l \neq 0$:

$$J_\varphi = \oint p_\varphi \, d\varphi = l \, 2\pi$$

Ur dessa uttryck för J_r och J_φ följer

$$K = E = -\frac{1}{4\pi} \frac{mA^2}{(J_r + J_\varphi)^2}$$

Vi får nu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K}{\partial J_r} = \dfrac{mA^2}{2\pi (I_r + I_\varphi)^3} = \dfrac{1}{\pi A} \sqrt{\dfrac{-2E^3}{m}} = \nu_r = \dfrac{\omega_r}{2\pi} \\[2ex] \dfrac{\partial K}{\partial J_\varphi} = \dfrac{mA^2}{2\pi (I_r + I_\varphi)^3} = \dfrac{1}{\pi A} \sqrt{\dfrac{-2E^3}{m}} = \nu_\varphi = \dfrac{\omega_\varphi}{2\pi} \end{cases}$$

$\omega_r = \omega_\varphi \Rightarrow$ enkelt periodisk rörelse

$\Rightarrow$ Sluten bankurva

<u>Anm</u> • $\omega_r \neq \omega_\varphi$ inträffar t.ex för andra $U(r)$

$\Rightarrow$ Bankurvan är inte nödvändigtvis sluten!

• Om vi sätter in $a = -\dfrac{A}{2E}$ - halva storaxeln får vi

$$T^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{4} A^2 \frac{m}{-2E^3} = \pi^2 A^2 \frac{m 8 a^3}{2A^3} = \frac{4\pi^2 m}{A} \cdot a^3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{A}{4\pi^2 m} \qquad \text{Keplers 3:e lag!}$$

Den stela kroppens mekanik

Definitioner

Def. En stel kropp är antingen

a/ ett system av n massor $\{m_i\}$ med konstanta avstånd

$$r_{ij} = |\bar{r}_i - \bar{r}_j| = C_{ij} = \text{konst.} \qquad \forall\, i, j = 1, \dots, n$$

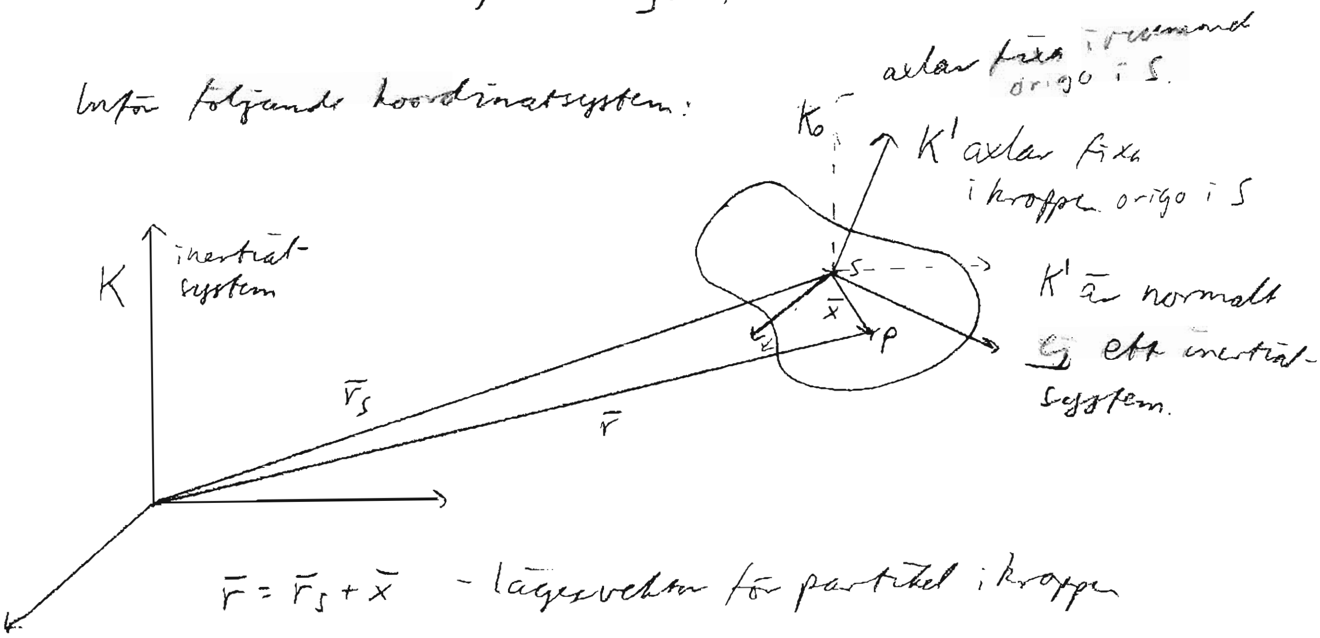
eller

b/ en kontinuerlig massfördelning $\rho(\bar{r})$ vars form inte ändras

Massan ges av
a) $M = \sum_i m_i$

b) $M = \int \rho(\bar{r})\, d\bar{r}$

Inför följande koordinatsystem:



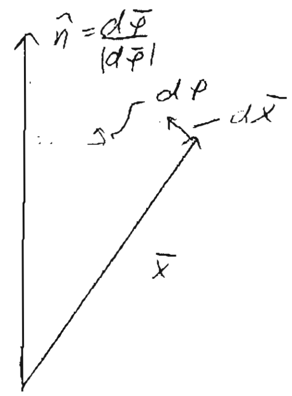
$$\bar{r} = \bar{r}_S + \bar{x}$$ – lägesvektor för partikel i kroppen

Anm: • En stel kropp har 6 frihetsgrader: läget för S och dess orientering.

• Normalt låter man S vara i masscentrum för kroppen

Infinitesimala rotationer

Om vi flyttar och roterar kroppen lite kan vi skriva ändringen av $\bar{r}$ som



$$d\bar{r} = d\bar{r}_S + d\bar{\varphi} \times \bar{x}$$

där $d\bar{\varphi}$ ges av $d\varphi \cdot \hat{n}$ vilket är en rotation vinkeln $d\varphi$ runt $\hat{n}$-axeln ($\hat{n} = \frac{d\bar{\varphi}}{|d\bar{\varphi}|}$)

Vi har nu följande hastigheter

$$\begin{cases} \bar{V} = \dfrac{d\bar{r}_S}{dt} & \text{- referenspunkten } S \text{ hastighet} \\ \bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt} & \text{- hastigheten för en punkt } P \text{ i kroppen} \end{cases}$$

<u>Def</u>: Vinkelhastigheten

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \omega\hat{\omega}$$

Vi får nu att

$$\boxed{\bar{v} = \bar{V} + \bar{\omega} \times \bar{x}}$$

<u>Anm</u>:
- $\bar{\omega}$ är entydig och beror ej av vårt val av S.
- $\begin{cases} \bar{V} \text{ är translationshastighet} \\ \bar{\omega} \times \bar{x} \text{ är rotationshastighet} \end{cases}$ uppdelningen beror på vårt val av S

Kinetisk energi och tröghetstensorn

$\boxed{\text{Låt nu och framöver } S \text{ vara i masscentrum.}}$

Den kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \bar{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \underbrace{(\bar{V} + \bar{\omega}\times\bar{x}_i)^2}_{\bar{V}^2 + 2\bar{V}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{x}_i) + (\bar{\omega}\times\bar{x}_i)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\sum_i m_i}_{M} \bar{V}^2 + \bar{V}\cdot\sum_i m_i(\bar{\omega}\times\bar{x}_i) + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\bar{\omega}\times\bar{x}_i)^2$$

Men

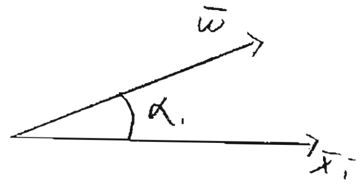
$$\bar{V}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{x}_i) = \bar{x}_i\cdot(\bar{V}\times\bar{\omega})$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}M\bar{V}^2 + \underbrace{\left(\sum m_i \bar{x}_i\right)}_{\substack{\text{MC läge i } K \\ = 0}}\cdot(\bar{V}\times\bar{\omega}) + \frac{1}{2}\sum m_i(\bar{\omega}\times\bar{x}_i)^2$$

$$\Rightarrow T = \underbrace{\frac{1}{2}M\bar{V}^2}_{\text{translation}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i(\bar{\omega}\times\bar{x}_i)^2}_{\text{rotation } = T_{rot}} = \frac{1}{2}M\bar{V}^2 + T_{rot}$$

Studera nu T_{rot} närmare!

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\bar{\omega} \times \bar{x}_i)^2$$



Notera att

$$(\bar{\omega} \times \bar{x}_i)^2 = (\bar{\omega}^2)(\bar{x}_i^2) \sin^2\alpha_i =$$

$$= \bar{\omega}^2 \bar{x}_i^2 (1 - \cos^2\alpha_i) = \bar{\omega}^2 \bar{x}_i^2 - \underbrace{\bar{\omega}^2 \bar{x}_i^2 \cos^2\alpha_i}_{(\bar{\omega}\cdot\bar{x}_i)^2} =$$

$$= \bar{\omega} \cdot [\underbrace{\bar{x}_i \cdot \bar{x}_i}_{\text{vanlig skalärprodukt}} - \underbrace{\bar{x}_i \bar{x}_i}_{\text{Dyadisk produkt! En tensor!}}] \cdot \bar{\omega}$$

Notera

$$(\bar{\omega} \cdot \bar{x})^2 = \sum_k \omega_k x_k \sum_l \omega_l x_l =$$

$$= \sum_{kl} \omega_k \underbrace{x_k x_l}_{\substack{kl\text{-komp}\\ \text{av tensorn}\\ \bar{x}\bar{x}}} \omega_l = \bar{\omega} \cdot \bar{x}\bar{x} \cdot \bar{\omega}$$

Vi kan nu skriva

$$\boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \bar{\omega}}$$

där den s.k. <u>tröghetstensorn</u> ges av

$$\boxed{\bar{\bar{I}} = \sum_i m_i (\bar{x}_i \cdot \bar{x}_i - \bar{x}_i \bar{x}_i)}$$

<u>Obs!</u> I bassystemet $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ kan $\bar{\bar{I}}$ representeras av en matris

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{med} \quad I_{xy} = \hat{x} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \hat{y} \quad \text{etc}$$

Notera att vi kan skriva

$$I_{kl} = \sum_i m_i \left((\bar{x}^{(i)} \cdot \bar{x}^{(i)}) \delta_{kl} - x_k^{(i)} x_l^{(i)} \right)$$

Egenskaper hos tröghetstensorn

i) $\bar{\bar{I}}$ är linjär, dvs $\bar{\bar{I}} = \bar{\bar{I}}_1 + \bar{\bar{I}}_2$ om kropparna 1 & 2 med tröghetstensorerna $\bar{\bar{I}}_1$ och $\bar{\bar{I}}_2$ sätts ihop

ii) Om $\bar{\bar{I}}$ representeras av en matris är den symmetrisk. $I_{kl} = I_{lk}$

iii) Det går alltid att rotera K' till ett system så att $\bar{\bar{I}}$ är diagonal.

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Axlarna i det nya koordinatsystemet kallas principalaxlar. I_i kallas tröghetsmoment. (moments of inertia)

Om kroppen har symmetrier är det lätt att hitta principalaxlarna.

iv) Om $\bar{\bar{I}}$ räknas ut i K' fixt i kroppen är $\bar{\bar{I}}$ en konstant tensor. Om $\bar{\bar{I}}$ räknas ut i ett koordinatsystem som ej är fixt i kroppen är $\bar{\bar{I}}$ normalt ej konstant.

Steiners sats

Om $\bar{\bar{I}}$ är tröghetstensorn m.a.p masscentrum så ges tröghetstensorn m.a.p ett system med origo i $\bar{a}$ av

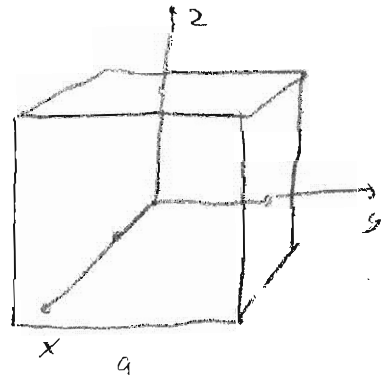
$$\bar{\bar{I}}' = \bar{\bar{I}} + M\left[a^2\mathbb{I} - \bar{a}\bar{a}\right]$$

Visas enkelt!

Mer om tröghetstensorn

- Om vi har spegelsymmetri i ett plan ligger två principalaxlar (och S) i planet och en är vinkelrät mot planet
- Om vi har rotationssymmetri är symmetriaxeln en principalaxel och de andra två är vinkelräta mot den.

Ex1 Tröghetstensorn för en kub med sidan a



Pg.a symmetri är $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ principalaxlar

$$I_{zz} = \int d^3\bar{r} \underbrace{\rho(\bar{r})}_{\frac{M}{a^3}} (x^2+y^2+z^2-z^2) =$$

$$= \frac{M}{a^3} \iiint_{-a/2}^{a/2} dx\,dy\,dz\,(x^2+y^2) = \frac{M}{a^3} \underbrace{\int dz}_{a} \int dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} =$$

$$= \frac{M}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} dx \left[a x^2 + \frac{a^3}{12}\right] = \frac{M}{a^2} \left[a\frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{12}x\right]_{-a/2}^{a/2} =$$

$$= \frac{M}{a^2}\left[\frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{12}\right] = \frac{1}{6} M a^2$$

Anm Alla icke-diagonala element $= 0$.

$$I_{xy} = \int d^3\bar{r}\, \rho(\bar{r}) \underbrace{(-xy)}_{0 \text{ pga symmetri}} = 0$$

Rörelsemängdsmomentet

$$\bar{L} = \sum_i m_i (\bar{r}_i \times \dot{\bar{r}}_i) = \sum_i m_i (\bar{r}_s + \bar{x}_i) \times (\dot{\bar{r}}_s + \bar{\omega} \times \bar{x}_i) =$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i}_{M} (\bar{r}_s \times \dot{\bar{r}}_s) + \underbrace{\sum_i m_i \bar{r}_s \times (\bar{\omega} \times \bar{x}_i)}_{0 \text{ ty } S = MC} + \underbrace{\sum_i m_i \bar{x}_i}_{0 \text{ ty } S = MC} \times \dot{\bar{r}}_s +$$

$$+ \sum_i m_i \bar{x}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{x}_i) =$$

$$\Rightarrow \quad \bar{L} = \underbrace{\bar{r}_s \times M\dot{\bar{r}}_s}_{\text{rörelsemängdsmomentet för MC}} + \underbrace{\bar{L}_{rel}}_{\text{relativa rörelsemängdsmomentet}}$$

$$\bar{x}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{x}_i) = \bar{\omega}(\bar{x}_i \cdot \bar{x}_i) - \bar{x}_i(\bar{x}_i \cdot \bar{\omega})$$

$$\bar{L}_{rel} = \sum_i m_i \bar{x}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{x}_i) = \left\{ \begin{array}{l} \text{formel för} \\ \text{vektoriell} \\ \text{trippelprodukt} \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_i m_i (\bar{x}_i \cdot \bar{x}_i - \bar{x}_i \bar{x}_i) \cdot \bar{\omega} = \bar{\bar{I}} \cdot \bar{\omega}$$

Notera att

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \bar{\omega} = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{L}_{rel}$$

Eulervinklar

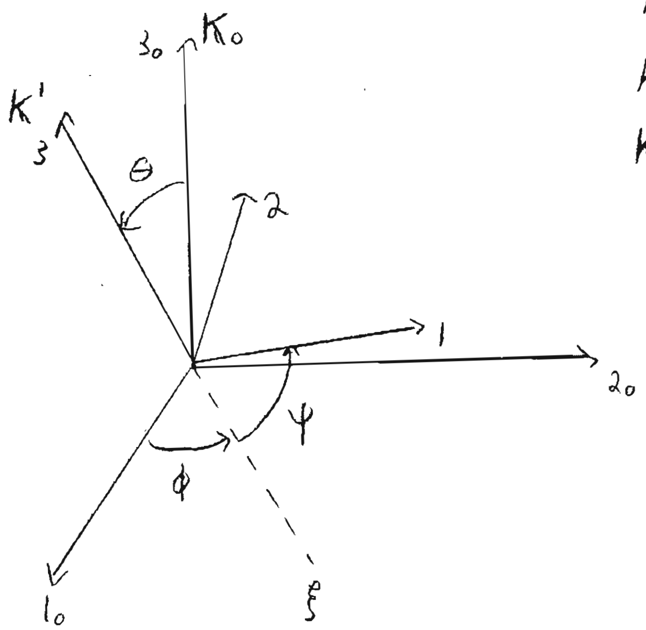
Vilka vinklar behövs för att beskriva kroppens orientering?

Eulervinklarna är ett sätt:

K' & K_0 med origo = S

K' fixt i kroppen

K^0 med axlar fixa i rummet.



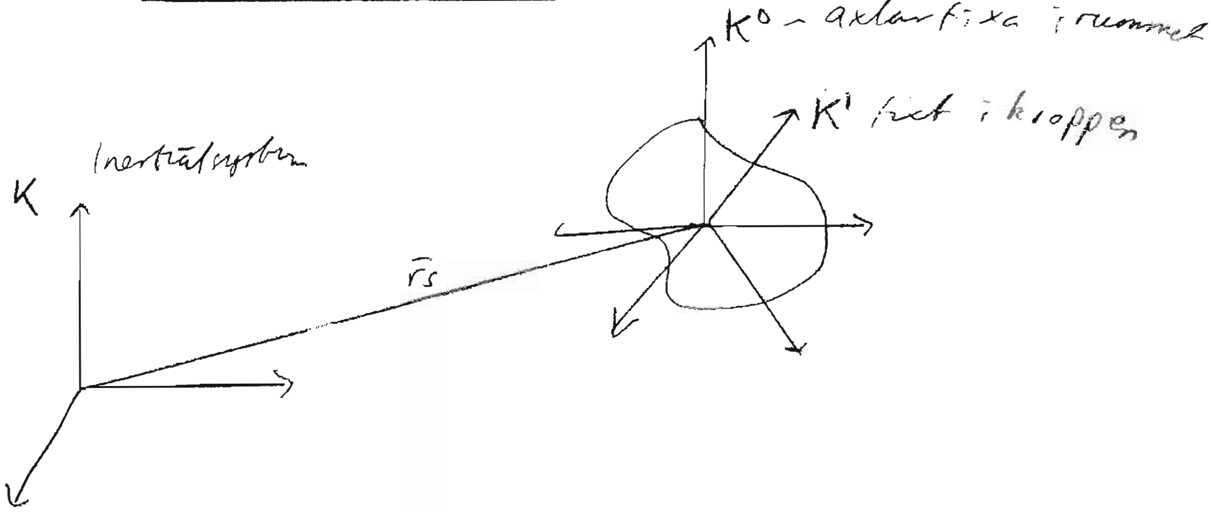
$$\mathbb{R}(t) = \mathbb{R}_3(\psi)\,\mathbb{R}_\xi(\theta)\,\mathbb{R}_{3_0}(\phi)$$

$$\begin{cases} \mathbb{R}_{3_0}(\phi): & \text{rotera kring } 3_0\text{-axeln en vinkel } \phi \\ \mathbb{R}_\xi(\theta): & \text{rotera kring } \xi\text{-axeln (den roterade 1-axeln) en vinkel } \theta \\ \mathbb{R}_3(\psi): & \text{rotera kring 3-axeln en vinkel } \psi \end{cases}$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi$$

Anm:
- Det är viktigt att rotera i rätt ordning (rotationer runt olika axlar kommuterar ej)
- I kvantmekaniken vanligen tre andra vinklar (α, β, γ).

Rörelseekvationerna



För masscentrums rörelse gäller

om vi t.ex har ett homogen grav. potential

$$\frac{d}{dt}\bar{P} = \bar{F} = \sum_i \bar{F}_i = -\sum_i \nabla U_i(\bar{r}_i) = -\nabla U(\bar{r}_s)$$

om $\bar{F}_i$ är potentialkrafter

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}M\dot{\bar{r}}_s^{\,2} + T_{rot} - U(\bar{r}_s)$$

Där vi t.ex kan välja

$$\begin{cases} \bar{r}_s = (x_s, y_s, z_s) & \text{– masscentrums läge} \\ (\phi, \theta, \psi) & \text{– Eulervinklarna} \end{cases}$$

som generaliserade koordinater

T_{rot} ges av

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\bar{\omega}$$

där $\bar{\omega}$ uttrycks m.h.a. $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$

Observera att i systemet K (inertialsystem) gäller

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_i(t) \underbrace{I_{ij}(t)}_{\text{Tidsberoende!}} \omega_j(t)$$

Om vi istället räknar ut T_{rot} i det roterande systemet $\bar{K}$ erhålles.

prim = i det roterande systemet.

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_i'(t) \underbrace{I_{ij}}_{\text{Tids\underline{o}beroende !}} \omega_j'(t)$$

Spec. om K' är ett **principalsystem** (x-, y- och z-axlarna är principalaxlar).

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \, \omega_i'^2(t)$$

med I_1, I_2, I_3 = tröghetsmomenten.

Vidare gäller momentlagen m.a.p. en fix punkt O eller masscentrum:

$$\bar{N}_0 = \dot{\bar{L}}_0$$

där

$$\bar{N}_0 = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i$$

är summan av alla yttre krafters moment.

För en godtycklig vektor $\bar{G}$ kan man visa att

$$\left[\frac{d}{dt}(\bar{G})\right]_{\text{inertialsystem}} = \left[\frac{d}{dt}(\bar{G})\right]_{\substack{\text{roterande}\\ \text{system}\\ \text{med vinkel-}\\ \text{hast. } \bar{\omega}}} + \bar{\omega} \times \bar{G}$$

Applicera på $\bar{L}_0 \Rightarrow$

$$\dot{\bar{L}}_0 = \underbrace{\left[\frac{d}{dt}(\bar{\bar{I}}_0 \cdot \bar{\omega})\right]_{\bar{K}}}_{\substack{\bar{\bar{I}}_0 \cdot \dot{\bar{\omega}} \\ \text{ty } \bar{\bar{I}}_0 \text{ tidsober} \\ \text{i } \bar{K}}} + \bar{\omega} \times (\bar{\bar{I}}_0 \cdot \bar{\omega})$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{L}}_0 = \bar{\bar{I}}_0 \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \bar{L}_0 = \bar{\bar{I}}_0 \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \bar{\bar{I}} \cdot \bar{\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{N}_0 = \bar{\bar{I}}_0 \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \bar{\bar{I}}_0 \cdot \bar{\omega}}$$

$\bar{\bar{I}}_0$ & $\bar{\omega}$ i det roterande systemet.

Detta är

<u>Eulers dynamiska ekvationer.</u>

Om K' är ett <u>principalsystem</u> gäller att

$\bar{\bar{I}}$ är diagonal

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{N}_x = I_{xx}\dot{\omega}_x' + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y'\omega_z' \\ \bar{N}_y = I_{yy}\dot{\omega}_y' + (I_{xx} - I_{zz})\omega_z'\omega_x' \\ \bar{N}_z = I_{zz}\dot{\omega}_z' + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x'\omega_y' \end{cases} \qquad \begin{cases} I_{xx} = I_1 \\ I_{yy} = I_2 \\ I_{zz} = I_3 \end{cases}$$

— x —

Man kan visa (se boken) att

$$\begin{cases} \omega_1' = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\ \omega_2' = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ \omega_3' = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

Detta ger (fortfarande principalsystem)

$$T_{rot} = \tfrac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{2} I_2 (-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi)^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{2} I_3 (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2$$

Använd nu Lagrangianen för att ta fram Eulers ekvationer istället. Vi nöjer oss med att betrakta det kraftfria fallet, dvs. $U = 0$. Låt oss också välja ett inertialsystem K så att $\dot{\bar{r}}_s = 0$.

Vi har nu att (utan yttre krafter)

$$L = T_{rot}$$

Detta ger

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot\psi} = \frac{\partial T_{rot}}{\partial \omega_3'}\frac{\partial \omega_3'}{\partial \dot\psi} = I_3\,\omega_3'$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{\partial T_{rot}}{\partial \psi} = \frac{\partial T_{rot}}{\partial \omega_1'}\frac{\partial \omega_1'}{\partial \psi} + \frac{\partial T_{rot}}{\partial \omega_2'}\frac{\partial \omega_2'}{\partial \psi} =$$

$$= I_1\,\omega_1'\cdot\omega_2' + I_2\,\omega_2'\cdot(-\omega_1') = (I_1 - I_2)\,\omega_1'\omega_2'$$

Lagranges ekvation,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right) = \frac{\partial L}{\partial \psi}$$

ger

$$I_3\,\dot\omega_3' = (I_1 - I_2)\,\omega_1'\omega_2'$$

vilket är precis en av Eulers dynamiska ekvationer (med $N_z = 0$).

De andra två följer genom cyklisk permutation.

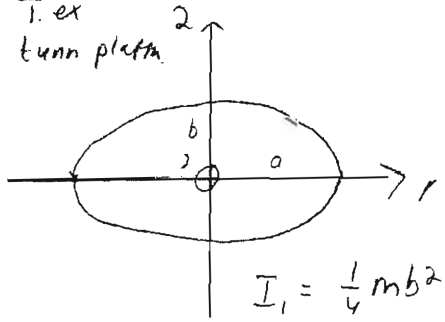
Ex/ "Den tre-axlade snurran".

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$$

Antag att

$$I_1 < I_2 < I_3$$

T. ex
tunn platta



$$I_1 = \tfrac{1}{4} m b^2$$
$$I_2 = \tfrac{1}{4} m a^2$$
$$I_3 = I_1 + I_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1\,\dot\omega_1' = (\text{neg. koeff.})\,\omega_2'\omega_3' & \text{– stabil} \\ I_2\,\dot\omega_2' = (\text{pos. koeff.})\,\omega_1'\omega_3' & \text{– labil} \\ I_3\,\dot\omega_3' = (\text{neg. koeff.})\,\omega_1'\omega_2' & \text{– stabil} \end{cases}$$

se problem 5-7
eller s. 120-121

Kritiska punkter och karakteristiska exponenter

Antag autonomt system

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}, t) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})$$

Def. Punkter $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}_0$ där $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}_0) = \underset{\sim}{0}$ kallas

<u>kritiska punkter</u>

Om $\underset{\sim}{F} = \left\{ \frac{1}{m} p, F(q) \right\} = \underset{\sim}{0}$ är $\begin{cases} p = 0 \\ F(q) = 0 \end{cases}$

Detta är ett villkor för <u>jämviktsläge</u>

Utveckla $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})$ kring $\underset{\sim}{x}_0$ och <u>linearisera</u>:

$$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) = \mathbb{A}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0) + \ldots \simeq \mathbb{A}\underset{\sim}{z} \qquad , \quad \underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\underset{\sim}{z}} = \mathbb{A}\underset{\sim}{z}$$

konstant matris

Ansatz $\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{a} e^{\lambda t}$

konstant vektor

$$\Rightarrow \quad \lambda \underset{\sim}{a} e^{\lambda t} = \mathbb{A} \underset{\sim}{a} e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A}\underset{\sim}{a} = \lambda \underset{\sim}{a}$$

Egenvärdesproblem!

Egenvärdena λ kallas <u>kritiska exponenter</u>

Villkor för stabilitet: $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0 \quad \forall \lambda$

Stabilitet hos snurra

Antag principalsystem och $I_1 < I_2 < I_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}^1 = -\dfrac{I_3 - I_2}{I_1} x^2 x^3 & \text{neg koeff} \\ \dot{x}^2 = +\dfrac{I_3 - I_1}{I_2} x^3 x^1 & \text{pos koeff} \\ \dot{x}^3 = -\dfrac{I_2 - I_1}{I_3} x^1 x^2 & \text{neg koeff} \end{cases}$$

Kritiska punkter:

$$\underset{\sim}{x}_0^{(1)} = (\omega, 0, 0) \qquad \underset{\sim}{x}_0^{(2)} = (0, \omega, 0) \qquad \underset{\sim}{x}^{(3)} = (0, 0, \omega)$$

Sätt

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0^{(i)}$$

För $\underset{\sim}{x}_0^{(1)}$ får vi:

$$\dot{\underset{\sim}{y}} = \begin{pmatrix} \dot{y}^1 \\ \dot{y}^2 \\ \dot{y}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \dfrac{I_3 - I_1}{I_2} \\ 0 & -\omega \dfrac{I_2 - I_1}{I_3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \mathbb{A} \underset{\sim}{y}$$

Fås egenvärdena λ genom att lösa

$$\det(\lambda \mathbb{1} - \mathbb{A}) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1^{(1)} = 0 \quad ; \quad \lambda_2^{(1)} = -\lambda_3^{(1)} = i\omega \sqrt{(I_2 - I_1)(I_3 - I_1)/I_1 I_3}$$

pss. för $\underset{\sim}{x}_0^{(2)}$ och $\underset{\sim}{x}_0^{(3)}$

$$\lambda_1^{(2)} = 0 \quad ; \quad \lambda_2^{(2)} = -\lambda_3^{(2)} = \omega \sqrt{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)/I_1 I_3}$$

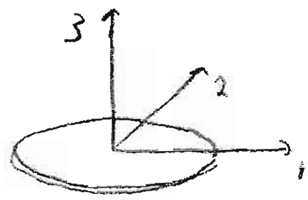
$$\lambda_1^{(3)} = 0 \quad ; \quad \lambda_2^{(3)} = -\lambda_3^{(3)} = i\omega \sqrt{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)/I_1 I_2}$$

$$\mathbb{R}e(\lambda_2^{(2)}) > 0 \Rightarrow \text{instabil}$$

ii/ $I_1 = I_2 \neq I_3$ $\quad I_1 \neq 0, \; I_3 \neq 0$

"Den symmetriska snurran"

Tex. tunn cirkulär skiva



$$I_3 \dot{\omega}_3' = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3' = \text{konstant}$$

<u>Def</u>: $\omega_0 = \omega_3' \dfrac{I_3 - I_1}{I_1} = \text{konst}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_1' = -\omega_0 \omega_2' \\ \dot{\omega}_2' = \omega_0 \omega_1' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1'(t) = \omega_\perp \cos(\omega_0 t + \tau)$$
$$\omega_2'(t) = \omega_\perp \sin(\omega_0 t + \tau)$$

$\omega_\perp$ & τ är integrations-konstanter

$$\Rightarrow \quad \bar{\omega} = (\omega_\perp \cos(\omega_0 t + \tau), \omega_\perp \sin(\omega_0 t + \tau), \omega_3')$$

$$\bar{\omega}^2 = \omega_\perp^2 + \omega_3'^2 = \text{konstant}$$

$\bar{\omega}$ har konstant längd och roterar runt 3-axeln

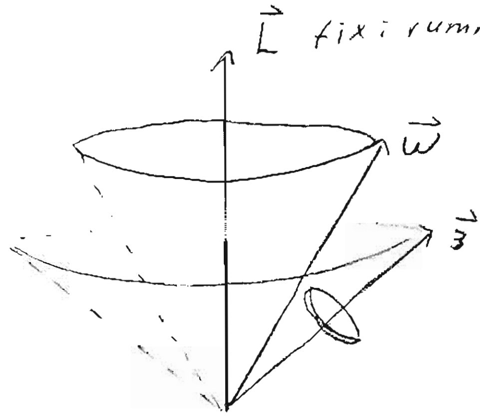
Rörelsemängdsmomentet <u>m.a.p det roterande systemet K</u> är

$$\begin{cases} \bar{L}_1 = I_1 \omega_\perp \cos(\omega_0 t + \tau) \\ \bar{L}_2 = I_1 \omega_\perp \sin(\omega_0 t + \tau) \\ \bar{L}_3 = I_3 \omega_3' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{L}^2 = I_1^2 \omega_\perp^2 + I_3 \omega_3'^2 = \text{konst}$$

$\bar{L}$ & $\bar{\omega}$ roterar runt 3-axeln i K'

Gå nu tillbaka till systemet K^0 med axlar fixa i rummet.

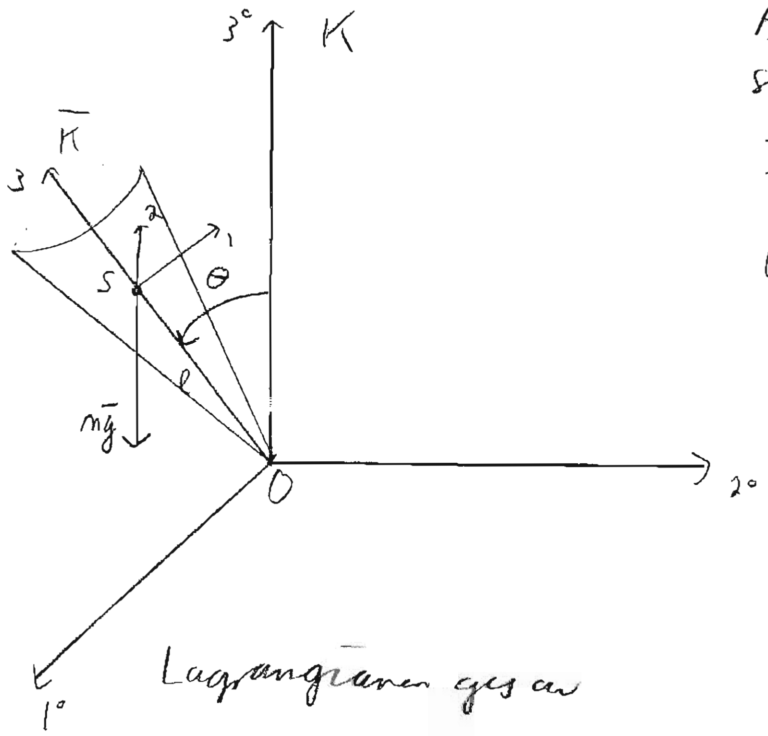


Reguljär precession med vinkel-frekvens ω_0

Period $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Exempel! (s124)

Symmetrisk snurra i gravitationsfält



Antag att snurran är symmetrisk runt 3-axeln:

$I_1 = I_2$

Välj S i masscentrum.

Lagrangianen ges av

$$L = \frac{1}{2} M \bar{V}^2 + T_{rot} - \underbrace{U(\bar{r}_S)}$$

I homogent grav.fält kan vi skriva så!

Exempel: Jorden som symmetrisk snurra

Jorden är något tillplattad vid polerna och har rotationsaxeln förskjuten 0.2" relativt symmetriaxeln.

$$\Rightarrow \quad I_1 = I_2 < I_3$$

med

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} \simeq \frac{1}{300}$$

perioden ges av

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi I_1}{(I_3 - I_1)\omega_3'}$$

Sätt in $\frac{2\pi}{\omega_3'} = 1$ day

$$\Rightarrow \quad T = 300 \text{ dagar}$$

Experimentellt: 430 dagar

Skillnaden beror på att jorden ej är en stel kropp och att yttre kraftmoment verkar på den.

Vi kan nu uttrycka S hastighet, $\bar{V}$ som

$$\bar{V} = \dot{\bar{r}}_s = \bar{\omega} \times \bar{r}_s = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \bar{\omega}_1 & \bar{\omega}_2 & \bar{\omega}_3 \\ 0 & 0 & l \end{vmatrix} = \hat{1}\,\omega_2' l - \hat{2}\,\omega_1 l$$

där vi har uttryckt $\bar{r}$ i vårt roterande system K'

$$\Rightarrow \bar{V}^2 = l^2(\omega_1'^2 + \omega_2'^2) \Rightarrow \frac{1}{2}M\bar{V}^2 = \frac{1}{2}Ml^2(\omega_1'^2 + \omega_2'^2)$$

K' är ett principalsystem (pga symmetrin) $\Rightarrow$

$$T_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} I_i \bar{\omega}_i^2 = \frac{1}{2} I_1(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \bar{\omega}_3^2$$

Potentialen kan skrivas

$$U(\bar{r}_s) = Mgl\cos\theta$$

Utnyttja nu Eulervinklarna

$$\begin{cases} \omega_1' = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_2' = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_3' = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(I_1 + Ml^2)(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 -$$

$$- Mgl\cos\theta$$

ϕ & ψ cykliska $\Rightarrow$

$$\begin{cases} p_\phi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot\phi} = \left\{ (I_1 + Ml^2)\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta \right\}\dot\phi + I_3\dot\psi\cos\theta = \text{konst.} \\ p_\psi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) = \text{konst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot\phi = \dfrac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{(I_1 + Ml^2)\sin^2\theta} \\ \dot\psi = \dfrac{p_\psi}{I_3} - \dot\phi\cos\theta \end{cases}$$

ϕ - rot kring 3^0-axeln

ψ - rot kring 3-axeln

Energin (= H ty L på sin naturliga form) ges av

$$E = \frac{1}{2}(I_1 + Ml^2)(\dot\phi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) +$$

$$+ \frac{1}{2}I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 + Mgl\cos\theta = \text{konst.}$$

Sätt in uttrycken för $\dot\phi$ & $\dot\psi$ i E!

Def: $E' = E - \dfrac{p_\psi^2}{2I_3} - Mgl = \text{konst.}$

$$\Rightarrow \begin{cases} E' = \frac{1}{2}(I_1 + Ml^2)\dot\theta^2 + U_{eff}(\theta) & (*) \\ U_{eff}(\theta) = \dfrac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2(I_1 + Ml^2)\sin^2\theta} - Mgl(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

$\dot\theta^2 \geq 0 \Rightarrow E' > U_{eff}(\theta)$

Ger möjligt område för rörelsen!

Hur ser rörelsen ut?

Notera att $U_{eff}(\theta) \to \infty$ då $\theta \to 0$ (och $\theta \to \pi$)

Def: $u(t) = \cos\theta(t)$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{1-u^2}$$

Sätt in i (*)

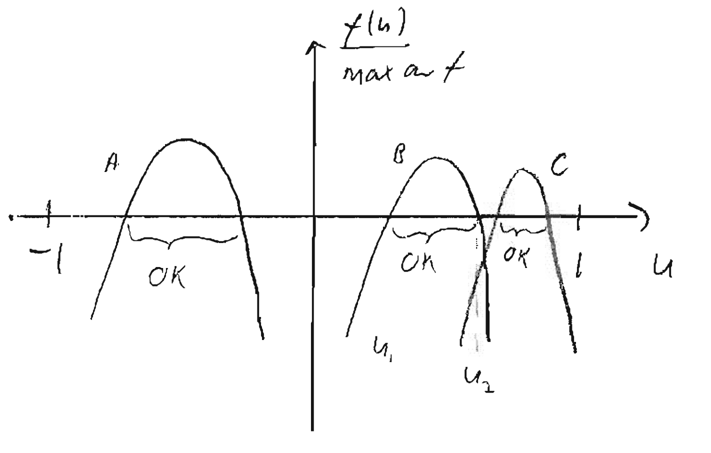
$$\Rightarrow \dot{u}^2 = f(u) \leftarrow \text{beror av } E', p_\theta, p_\psi$$

med

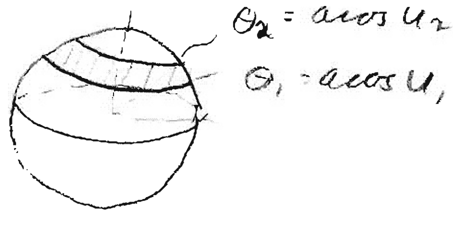
$$f(u) = (1-u^2)\left[\frac{2E'}{I_1+Ml^2} + 2Mgl\frac{1-u}{I_1+Ml^2}\right] - \frac{(p_\phi - p_\psi u)^2}{(I_1+Ml^2)^2}$$

$$u \in [-1,1]$$

$$E' > U_{eff}(\theta) \Rightarrow f(u) > 0$$



u rör sig mellan u_1 & u_2, vilket är ett band på en sfär



$u_1 < u_2$

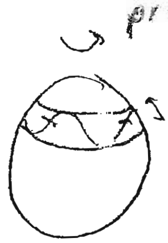
Def. $u_0 = \dfrac{p_\phi}{p_\psi}$

$$\Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{p_\psi}{(I_1 + Ml^2)} \frac{u_0 - u}{1 - u^2}$$

Tre fall

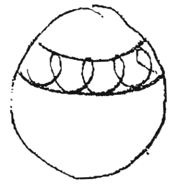
i) $u_0 > u_2$ (or $u_0 < u_1$)

$\Rightarrow$ $\dot{\phi}$ har alltid samma tecken



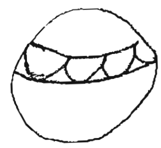
ii) $u_1 < u_0 < u_2$

$\Rightarrow$ $\dot{\phi}$ har olika tecken vid u_1 & u_2



iii) $u_0 = u_1$ eller $u_0 = u_2$

$\Rightarrow$ $\dot{\phi} = 0$ vid u_1 eller u_2



Denna rörelse kallas nutation.

Anm: Vi har sett tidigare att med vinklar som generaliserade koordinater så är våra kanoniska impulser rörelsemängdsmoment. I vårt fall har vi

$$\begin{cases} P_\psi = L'_3 & \text{– rörelsemängdsmomentets 3-komponent m.a.p. S'-systemet} \\ P_\phi = L_3 & \text{– rörelsemängdsmomentets 3-komponent m.a.p. O} \end{cases}$$

(se s. 201 i Scheck!)

Kopplingen till kvantmekanik

Vi har sett tidigare att den kanoniska impulsen ges av

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

I kvantmekaniken låter vi $p_i \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i}$ där p_i är den kanoniska impulsen (vilken ej behöver vara samma som den kinetiska). Detta kallas korrespondensprincipen.

Vi har också för Poissonparenteserna

$$[u, v] \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{u}, \hat{v}] = \frac{1}{i\hbar}(\hat{u}\hat{v} - \hat{v}\hat{u})$$

där u, v är klassiska funktioner och $\hat{u}, \hat{v}$ är kvantmekaniska operatorer.

EX. Vi har att

$$[q, p] = 1$$

Enligt ovanstående övergår detta till

$$[q, p] \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}\underbrace{[\hat{q}, \hat{p}]}_{i\hbar} = 1$$

Vi såg tidigare att

$$\frac{dg}{dt} = [g, H] + \frac{\partial g}{\partial t}$$

I kvantmekaniken blir detta

$$\frac{d\hat{g}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{g}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{g}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{g}] + \frac{\partial \hat{g}}{\partial t}$$

Heissenbergs rörelseekvation!

Vilket beskriver hur en operator utvecklas i tiden i Heissenbergbild (dvs med tidsberoendet i operatorerna istället för vågfunktionerna).

Anm. Egentligen är gången den omvända. Vi kan erhålla klassisk mekanik från kvantmekanik i de fall våra kvantmekaniska operatorer har någon klassisk motsvarighet.

Ex/ Spinn-operatorn $\hat{S}_z$ utvecklas enligt

$$\frac{d\hat{S}_z}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{S}_z]$$

Detta har ingen klassisk motsvarighet.

— x —

Schrödingerbild → Heissenbergbild → Klassisk mekanik

I de fall klassisk motsvarighet finns

Schrödingerbild

$$i\hbar \frac{d}{dt}|A,t\rangle_S = \hat{H}|A,t\rangle_S$$

Skriv nu

$$|A,t\rangle_S = U|A,t_0\rangle_S$$

$$\Rightarrow \quad U = U(t,t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}$$

Definiera nu

$$|A,t\rangle_H = U^+|A,t\rangle_S = |A,t_0\rangle_S$$

för tillstånd och

$$O^H(t) = U^+ O^S U \qquad (*)$$

för operatorer

U är unitär, $U^+U = 1 \quad \Rightarrow \quad O^S = U O^H(t) U^+$
$|A,t\rangle_S = U|A,t\rangle_H$

$$\Rightarrow \quad {}_S\langle B,t|O^S|A,t\rangle_S = {}_H\langle B,t|U^+ U O^H(t) U^+ U|A,t\rangle_H =$$

$$= {}_H\langle B,t|O^H(t)|A,t\rangle_H \qquad \text{matriselement är invarianta}$$

Derivera (*) m.a.p. t

$$\frac{d}{dt}O^H(t) = \frac{d}{dt}(U^+O^SU) = \underbrace{\frac{dU^+}{dt}}_{\frac{iH}{\hbar}U^+}O^SU + U^+O^S\underbrace{\frac{dU}{dt}}_{\frac{-iH}{\hbar}U} + U^+\frac{\partial O^S}{\partial t}U =$$

$$= \frac{iH}{\hbar}U^+O^SU - \frac{i}{\hbar}U^+O^S\underbrace{HU}_{\substack{UH \\ \text{ty } [H,U]=0}} + \frac{\partial O^H}{\partial t} =$$

$$= \frac{i}{\hbar}(HO^H - O^H H) + \frac{\partial O^H}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}[H,O^H] + \frac{\partial O^H}{\partial t}$$

Vinkelverkansvariabler

För Keplerproblemet hade vi

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2}mv^2 - U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{A}{r} \\ p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \\ H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{A}{r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad U_{eff} = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{A}{r}$$

Verkansvariablerna ges av $\quad$ sätt $p_r = \frac{\partial S'}{\partial r}$ där $\frac{\partial S_1}{\partial r}$ fås ur HJs ekv

$$J_r = \frac{1}{2\pi}\oint p_r\,dr = \ldots = -\ell + \frac{A}{2}\sqrt{\frac{2m}{-E}}$$

P.s.

$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi\,d\varphi = \ell$$

$$\Rightarrow \quad K = E = -\frac{1}{2}\frac{mA^2}{(J_r + J_\varphi)^2}$$

Sätt nu (enligt Sommerfeld m.fl 1915)

$$\begin{cases} J_r = n_r\hbar \\ J_\varphi = n_\varphi\hbar \end{cases} \quad \text{med} \quad \begin{cases} \hbar = \frac{h}{2\pi} \\ h = \text{Plancks konstant} \\ n_r,\ n_\varphi \text{ - heltal} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E = -\frac{1}{2}\frac{mA^2}{(n_r + n_\varphi)^2\hbar^2}$$

Med $A = Ze^2$ och $n = n_r + n_\varphi$, $n = 1,2,3,\ldots$ är detta Bohrs uttryck för energinivåerna i väteliknande atomer!

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{mZ^2e^4}{n^2\hbar^2} \qquad n = 1,2,\ldots$$

Varför kvantiseras just verkansvariablerna?

Jo, de är s.k. <u>adiabatiska invarianter</u> (Ehrenfest 1914-16)

Detta innebär att om systemet utsätts för en långsamt varierande förändring, t.ex. genom att en kraftkonstant ändras, så är J_i i första approximationen konstanta och kan alltså fortsätta att vara kvantiserade med samma antal kvanta:

$$J_i = \underbrace{n_i}_{\text{fix!}}\hbar$$

Hamilton-Jacobi & Schrödinger

Låt $H = \frac{1}{2m} p^2$ (fri partikel)

Hamilton-Jacobis ekv är separabel. $S^* = S_1^*(q) + S_2^*(t)$

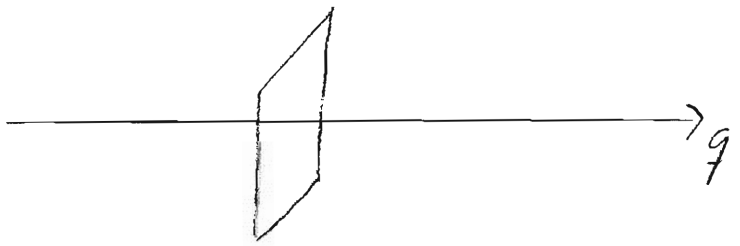
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial q}\right)^2}_{\text{beror bara av } q \text{ sätt } = \frac{\alpha^2}{2m}} + \underbrace{\left(\frac{\partial S_2^*}{\partial t}\right)}_{\text{beror bara av } t \; = -\frac{\alpha^2}{2m}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{\partial S_1^*}{\partial q}\right)^2 = \alpha^2 \\ \dfrac{\partial S_2^*}{\partial t} = -\dfrac{\alpha^2}{2m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1^* = \alpha q + \text{konst.} \\ S_2^* = -\dfrac{\alpha^2}{2m} t + \text{konst.} \end{cases}$$

Alltså gäller

$$S^*(q,\alpha,t) = \alpha q - \frac{\alpha^2}{2m} t + \text{konst}$$

Obs. att $S^* = $ konst. i konfigurationsrummet (q) definierar ett plan som är vinkelrät mot partikelbanan



$S^* = $ konst.

Planet $S^* =$ konst rör sig med hastighet $\frac{\alpha}{2m}$ längs q-axeln.

Detta påminner om en plan våg med fashastighet

$$v_f = \frac{\alpha}{2m}.$$

Vad blir grupphastigheten för en superposition av dessa plana vågor?

$$v_g = v_f + k\frac{\partial v_f}{\partial k}$$

k - vågvektor

$$v_g = v_f + \alpha\frac{dv_f}{d\alpha} = \frac{\alpha}{2m} + \alpha\frac{1}{2m} = \frac{\alpha}{m}$$

Men för en fri partikel är ju hastigheten konstant. Kan den ha samma värde som v_g?

Vi vet att

$$p = \frac{\partial S^k}{\partial q} = \alpha$$

Alltså gäller

$$v_g = \frac{p}{m} \quad \text{eller} \quad p = mv_g$$

dvs partikeln rör sig vinkelrätt mot vågfronten $S^* =$ konstant och med grupphastigheten.

Inför nu funktionen

$$\Psi(q,t) = A' e^{\frac{i}{\hbar} S^*(q,t)}$$

$$= A e^{\frac{i}{\hbar}\left(\alpha q - \frac{\alpha^2}{2m} t\right)}$$

Då gäller

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial q}\Psi = \dfrac{i}{\hbar}\dfrac{\partial S^*}{\partial q}\Psi & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\Psi = \dfrac{i}{\hbar}\dfrac{\partial S^*}{\partial t}\Psi & (2) \end{cases}$$

Ekv. (1) ger

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2}\Psi = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S^*}{\partial q}\Psi\right) = \frac{i}{\hbar}\underbrace{\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2}}_{0}\Psi - \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2\Psi =$$

$$= -\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2\Psi$$

Men $\left(\dfrac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2 = -2m\dfrac{\partial S^*}{\partial t}$ enl. H.J ekv

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial q^2}\Psi = -\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2\Psi = -\frac{1}{\hbar^2}\left(-2m\frac{\partial S^*}{\partial t}\right)\Psi = \frac{2m}{\hbar^2}\underbrace{\frac{\partial S^*}{\partial t}\Psi}_{\substack{\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ \text{enl. (2)}}} =$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{2m}{\hbar^2}i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial q^2} = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Sätt nu $\mathcal{H} = \hbar$ och vi får

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}}$$ (Schrödinger 1926)

vilket är <u>Schrödingerekvationen för en fri partikel</u>!

ψ är <u>vågfunktionen</u>, med $|\psi|^2$ sannolikhetstätheten!

<u>Omvänt har vi</u> (mer allmänt)

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi}, \qquad \hat{H} \text{ – Hamiltonoperatorn}$$

med $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U$

Ansätt

$$\psi(q,t) = A\, e^{\frac{i}{\hbar}S^*(q,t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S^*}{\partial t}\psi$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} = \frac{i}{\hbar}\left(\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2}\right)\psi - \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2\psi$$

Sätt in i Schrödinger-ekvationen

$$\Rightarrow \quad i\hbar\cdot\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S^*}{\partial t}\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2}\right) - \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2\right) + U\right]\psi$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2 + U\right] + \frac{\partial S^*}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2}\right) \qquad (*)$$

Vänsterledet känner vi igen som vår nya Hamiltonian om S^* är verkansfunktionen. Högerledet ska ju då vara noll, dock!

Termen i H.L kan försummas om

$$\hbar \left(\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2} \right) \ll (\nabla S)^2$$

$$\Rightarrow \quad \hbar \frac{\partial p}{\partial q} \ll p^2$$

Med $\lambda = \frac{h}{p}$; $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{p}$ kan detta skrivas

$$\frac{\lambda\!\!\!^{-}}{p} \frac{\partial p}{\partial q} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\partial p / \partial q)}{(p / \lambda\!\!\!^{-})} \ll 1$$

Dvs, när våglängden är så kort att rörelsemängden varierar försumbart lite över en våglängd, då kan vi sätta H.L i (*) till noll och vi får tillbaka vår klassiska Hamilton-Jacobi-ekvation.

<u>Anm</u> Enklast får vi den klassiska gränsen genom att låta $\hbar \to 0$

Kaos i solsystemet (exempel på kaos, kap. 11)

De kanoniska system vi har studerat har alla haft en speciellt enkel egenskap

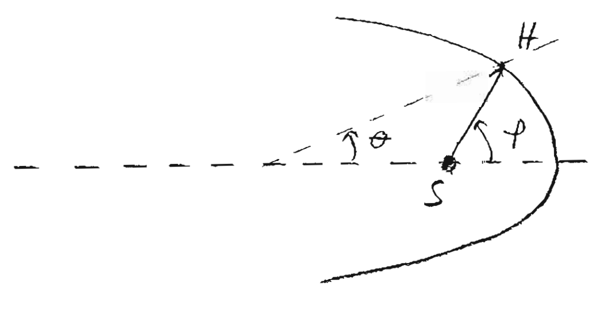
– separabilitet (eller integrabilitet)

Detta innebär att Hamilton - Jacobis ekvation kan separeras och varje generaliserad koordinat bestämmas genom integration var för sig.

Vi skall nu se, genom ett exempel, att om systemet är icke-separabelt (eller icke-integrabelt) fås s.k. kaotiska rörelser.

Exempel Hyperion – en assymmetrisk måne till Saturnus

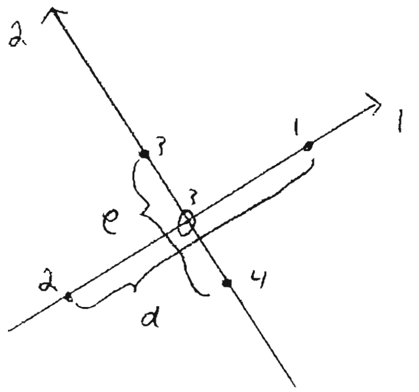
Antag följande förenklade modell:



- Förutsätter plan rörelse
- Betraktar Saturnus (S) som ett fixt kraftcentrum
- Antar att Hs rotationsaxel är vinkelrät mot planet

θ anger Hyperions orientering.

Approximera Hyperion med 4 massor m enligt



Antag $e < d$

Hyperions massa: $m_H = 4m$

Tröghetsmomenten ges av

$$I_1 = m\left(\frac{e}{2}\right)^2 + m\left(\frac{e}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m e^2$$

$$I_2 = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m d^2$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} m (d^2 + e^2)$$

$$\Rightarrow \quad I_1 < I_2 < I_3$$

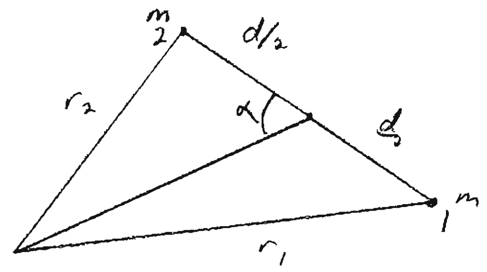
Antag att rotationen sker kring 3-axeln.

Generaliserade koordinater: (r, φ, θ)

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_H \underbrace{v^2}_{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}^2 - U(r, \varphi, \theta)$$

Sök nu $U(r, \varphi, \theta)$. Eftersom gravitationsfältet ej är homogent (beror av r) måste vi sätta upp

$$U = -\sum_{i=1}^{4} \frac{GMm}{r_i}$$



Notera att

$$\begin{cases} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \simeq \frac{2}{r} + \frac{3}{4}\frac{d^2}{r^3}\cos^2\alpha \left(-\frac{d^2}{4r^3}\right) \\ \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \simeq \frac{2}{r} + \frac{3}{4}\frac{e^2}{r^3}\sin^2\alpha \left(-\frac{e^2}{4r^3}\right) \end{cases}$$

se s. 142

Notera att $\alpha = \varphi - \theta$

$$\Rightarrow U \simeq -GM\frac{4m}{r} - GM\frac{3}{4}\frac{m}{r^3}\left(d^2\cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha\right) =$$

$$= -GM\frac{m_H}{r} + U_{inre}(r, \varphi, \theta)$$

med $U_{inre}(r, \varphi, \theta) = -GM\frac{3}{2}\frac{1}{r^3}\left(I_1\sin^2\alpha + I_2\cos^2\alpha\right)$

$$= -GM\frac{3}{2}\frac{1}{r^3}\left(I_1\sin^2(\varphi-\theta) + I_2\cos^2(\varphi-\theta)\right)$$

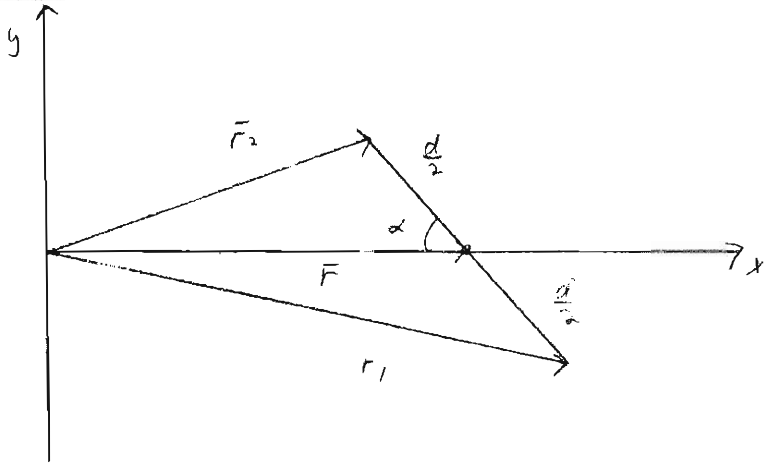
$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m_H(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}^2 + GM\frac{m_H}{r} - U_{inre}(r, \varphi, \theta)$$

$$\begin{cases} p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m_H\dot{r} \\ p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_H r^2\dot{\varphi} \\ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_3\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H = \dot{r}p_r + \dot{\varphi}p_\varphi + \dot{\theta}p_\theta - L = \ldots =$$

$$= \frac{p_r^2}{2m_H} + \frac{p_\varphi^2}{2m_H r^2} + \frac{p_\theta^2}{2I_3} - GM\frac{m_H}{r} + U_{inre}(r, \varphi, \theta)$$

Taylorutveckling av $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$



$$\bar{r}_1 = \left(r + \frac{d}{2}\cos\alpha,\ -\frac{d}{2}\sin\alpha\right)$$

$$\bar{r}_2 = \left(r - \frac{d}{2}\cos\alpha,\ \frac{d}{2}\sin\alpha\right)$$

$$\Rightarrow r_1 = |\bar{r}_1| = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4}\cos^2\alpha + rd\cos\alpha + \frac{d^2}{4}\sin^2\alpha} = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} + rd\cos\alpha}$$

$$r_2 = |\bar{r}_2| = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4}\cos^2\alpha - rd\cos\alpha + \frac{d^2}{4}\sin^2\alpha} = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r}\cos\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r}\cos\alpha}}\right]$$

Utnyttja att $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \simeq 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$ och behåll termer upp till ordning 2 i d.

$$\Rightarrow \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{d^2}{4r^2} - \frac{1}{2}\frac{d}{r}\cos\alpha + \frac{3}{8}\frac{d^2}{r^2}\cos^2\alpha + 1 - \frac{1}{2}\frac{d^2}{4r^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{r}\cos\alpha + \frac{3}{8}\frac{d^2}{r^2}\cos^2\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[2 - \frac{d^2}{4r^2} + \frac{3}{4}\frac{d^2}{r^2}\cos^2\alpha\right] = \frac{2}{r} - \frac{d^2}{4r^3} + \frac{3}{4}\frac{d^2}{r^3}\cos^2\alpha$$

P.s.s för

$$\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \simeq \frac{2}{r} - \frac{e^2}{4r^3} + \frac{3}{4}\frac{e^2}{r^3}\sin^2\alpha$$

Utnyttja nu Hamiltons kanoniska ekvationer och försumma U_{inre} i alla ekvationer utom den för $\dot{p}_\theta$.

$$\begin{cases} \dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} \simeq \dfrac{p_\varphi^2}{2m_H r^3} - \dfrac{\partial}{\partial r}\left(-GM\dfrac{m_H}{r}\right) = \\ \qquad = \dfrac{p_\varphi^2}{2m_H r^3} - \dfrac{GMm_H}{r^2} \\ \dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} \simeq 0 \\ \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial U_{inre}}{\partial \theta} = GM\dfrac{3}{2}\dfrac{I_2 - I_1}{r^3}\sin(2(\varphi - \theta)) \end{cases}$$

De två första ekvationerna ger en Keplerrörelse för Hyperions masscentrum. Den tredje ekvationen kan med $\dot{p}_\theta = I_3\ddot{\theta}$ skrivas

$$I_3\ddot{\theta} = GM\frac{3}{2}\frac{I_2 - I_1}{r^3(t)}\sin[2(\varphi(t) - \theta)] \qquad (*)$$

där $(r(t), \varphi(t))$ ges av Keplerrörelsen.

M.h.a Keplers 3:e lag kan vi skriva

$$GM = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^3$$

med

$$\begin{cases} T - \text{perioden} \\ a - \text{halva storaxeln} \end{cases}$$

<u>Specialfall</u>: Antag att Keplerrörelsen är en cirkel.

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi(t) = nt \\ r(t) = a \end{cases} \quad ; \quad n = \frac{2\pi}{T} = \text{vinkelfrekvensen}$$

Sätt $\quad \theta' = \theta - nt \quad (= -\alpha)$

$$I_3 \ddot{\theta}' = -\frac{3}{2} n^2 (I_2 - I_1) \sin 2\theta'$$

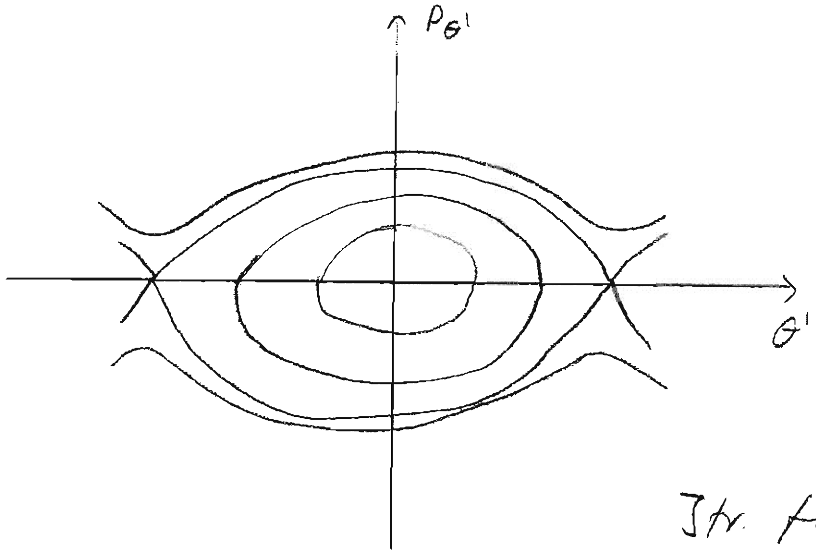
Jfr. ekv. för en plan pendel!

Små svängningar: $\sin 2\theta' \approx 2\theta'$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta}' + \frac{3n^2(I_2 - I_1)}{I_3} \theta' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \theta'(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{3n^2(I_2 - I_1)}{I_3}}\, t + \beta\right)$$

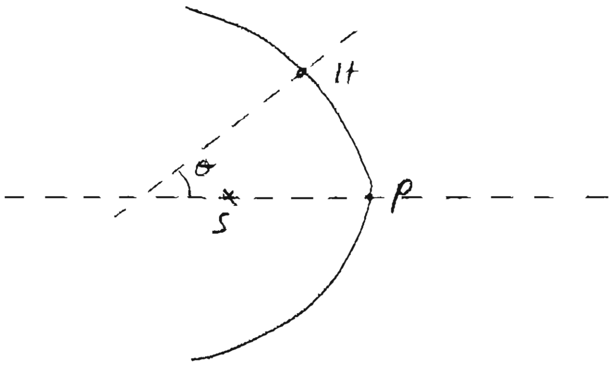
För godtyckliga utslagsvinklar:



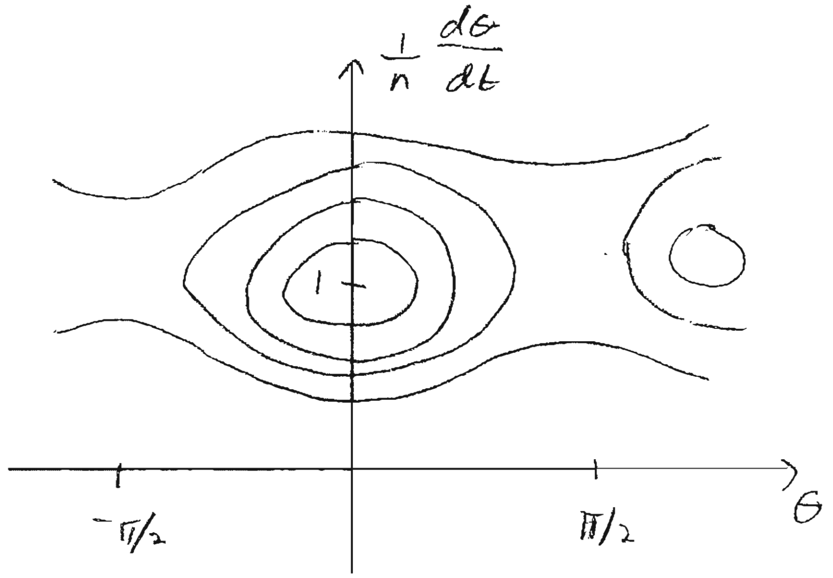
Jfr. fig 1.10!

forts. specialfallet

Låt oss representera lösningarna på följande sätt



Varje gång Hyperion (H) passerar pericenter P avläser vi $\left(\theta, \frac{1}{n}\frac{d\theta}{dt}\right)$:



Olika beg. villkor ger olika kurvor!

Detta är en s.k. Poincaré-karta.

$\frac{1}{n}\frac{d\theta}{dt} = 1$ betyder $\dot{\theta} = n$, dvs $\theta' = 0$

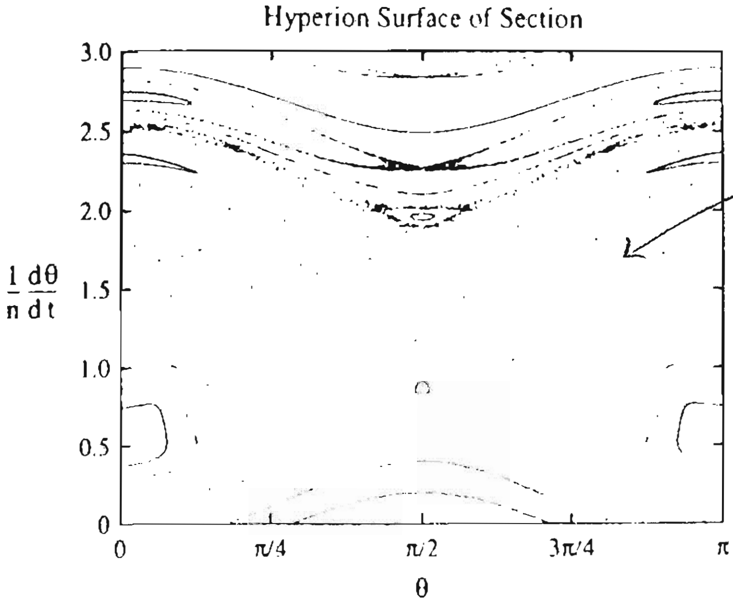
Då visar H ~~alltid~~ alltid samma sida mot S.

Små svängningar ger ellipser kring 1

"Överslag" ger vågformiga kurvor

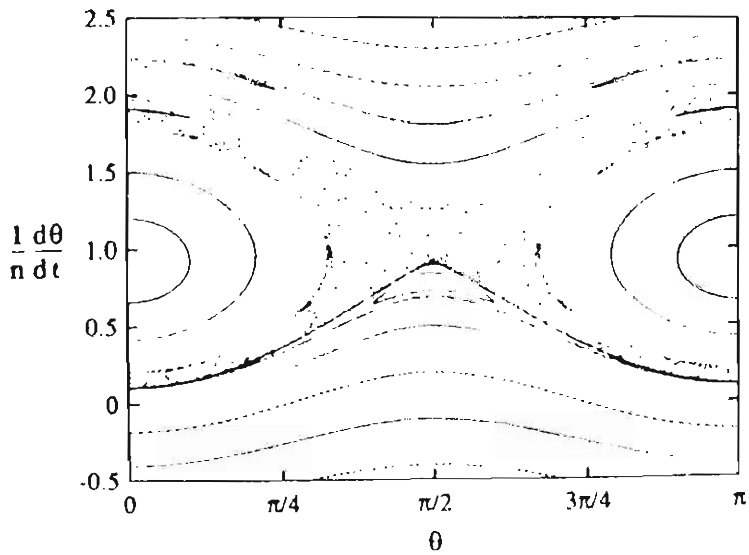
Om nu bankurvan ej är en cirkel blir ekvationen (x) svår att lösa analytiskt. Man kan dock lösa den numeriskt.

För Hyperion, satellit till Saturnus



Allt detta är en kurva!

För Phoebe, satellit till Mars



Vi erhåller

- kurvor = "normalt" beteende
- punkter som fyller ytor = kaos

De kaotiska är separerade av rotationskurvor

Anm: • Vi har antagit att rotationsaxeln ligger vinkelrätt mot Kepler-rörelsens plan. Om man har små avvikelser från detta växer dessa snabbt. Rörelsen är instabil. Hyperion wobblar runt! *

• Det moderna studiet av dessa effekter började med en prisuppgift som gavs av Kung Oscar II år 1885. Den vanns av Poincaré.

*) rot. axeln mätt till 10 decimaler av Voyager 1, Nov 1980
⇒ ej förutsäga axeln Aug 1981 (Voyager 2)