

Tentamensskrivning i Mekanik för FK2002 / FK2004

Onsdagen den 5 januari 2011 kl. 9 – 14

Hjälpmedel: Miniräknare och formelsamling.

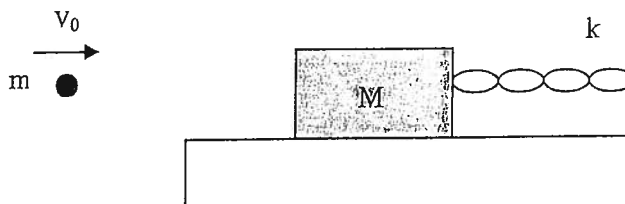
Varje problem ger maximalt 4 poäng. För godkänt krävs 12 p av 24 möjliga.
Alla införda beteckningar och ekvationer skall förklaras. Eventuella figurer måste vara tydliga.

Lycka till!

Roger Carlsson

LÖSNINGAR

1. En kula med massan $m = 10 \text{ g}$ skjuts mot en kloss med massan $M = 2,0 \text{ kg}$. Klossen är placerad på en friktionsfri bordsyta och är fäst i en vägg med en fjäder med fjäderkonstanten $k = 1000 \text{ N/m}$. Kulan fastnar i klossen som trycker ihop fjädern maximalt 18 cm från dess jämviktsläge. Beräkna kulans hastighet v_0 .



Rörelsemängden för systemet kula + kloss bevaras vid kollisionen.
Antag att den gemensamma hastigheten omedelbart efter kollisionen är V .

$$mv_0 = (m + M)V \quad v_0 = \frac{m + M}{m} \cdot V$$

Systemets kinetiska energi efter kollisionen övergår helt i elastisk potentiell energi hos fjädern då den har pressats ihop sträckan d .

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = \frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{kd^2}{m + M}} = \sqrt{\frac{1000 \cdot 0,18^2}{0,01 + 2}} \approx 4,01 \text{ m/s}$$

$$v_0 = \frac{2,01}{0,01} \cdot 4,01 \approx 806 \text{ m/s}$$

Svar: 806 m/s

2. En kloss med massan 4,0 kg placeras på en horisontell skivtallrik som roterar kring en axel genom dess centrum. Klossen är fäst med en tråd med längden 0,5 m vid skivtallrikens axel. Tråden tål en belastning på högst 100 N. Hur stor får skivtallrikens vinkelhastighet högst vara för att tråden inte ska brista, om friktionskoefficienten mellan kloss och skivtallrik är 0,6?



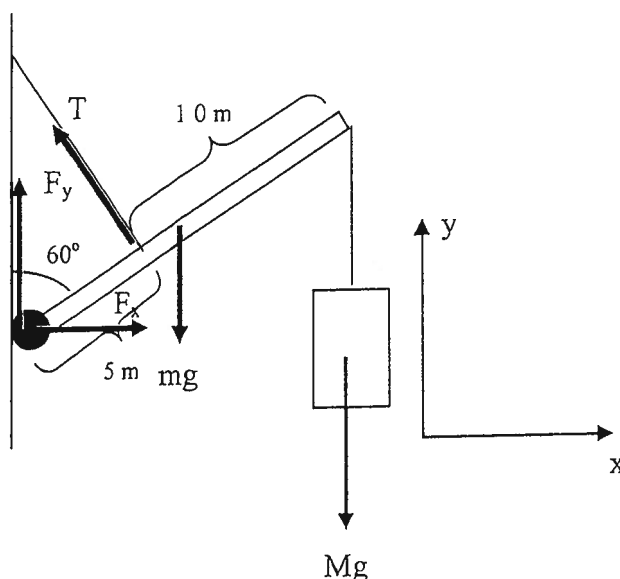
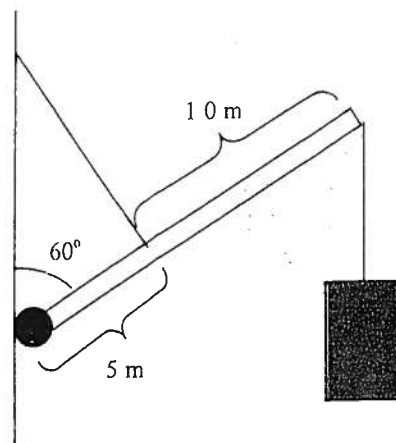
Centripetalkraften är $F + f$, där $F = 100$ N och f är den statiska friktionskraften.

$$F + f = mr\omega^2 \Rightarrow F + \mu_s mg = mr\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{F + \mu_s mg}{mr}} = \sqrt{\frac{100 + 0,6 \cdot 4 \cdot 9,8}{4 \cdot 0,5}} \approx 69 \text{ rad/s}$$

Svar: 69 rad/s

3. En lastbom med massan 85 kg och längden 15 m är med en led fäst i en vägg. Den stöds av en lina fäst i väggen. Linan är vinkelrät mot bommen med en fästpunkt 5 m från leden. I bommens andra ände hänger en tyngd med massan 360 kg. Beräkna spänningen i linan samt kraften på bommen från leden.



Vi väljer leden som momentpunkt.

$$T \cdot 5 = 7,5mg \sin 60^\circ + 15Mg \sin 60^\circ$$

$$T = \frac{7,5 \cdot 85 \cdot 9,8 \sin 60^\circ + 15 \cdot 360 \cdot 9,8 \sin 60^\circ}{5} \approx 10248 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_x = T \cos 60^\circ = 10248 \cos 60^\circ \approx 5124 \text{ N}$$

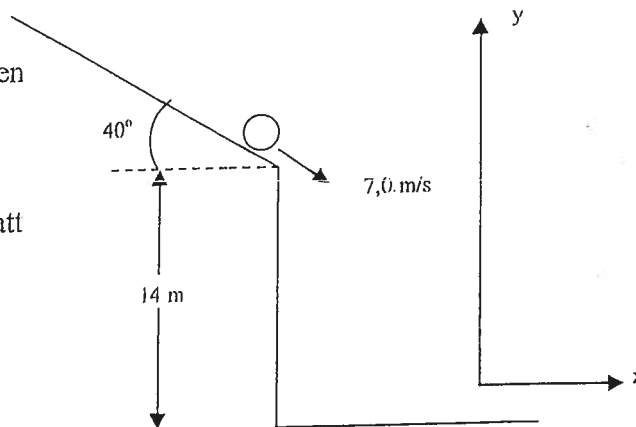
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_y = mg + Mg - T \sin 60^\circ = 85 \cdot 9,8 + 360 \cdot 9,8 - 10248 \sin 60^\circ \approx -4514 \text{ N}$$

$$\text{Den resulterande kraften } F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{5124^2 + 4514^2} \approx 6829 \text{ N}$$

Svar: 10,2 kN och 6,8 kN

4. En snöboll rullar nerför ett hustak med lutningen 40° . Den lämnar taket med hastigheten 7,0 m/s där avståndet till marken är 14 m.

- Hur långt från huset landar snöbollen?
- Antag nu att en person med längden 1,9 m står 4,0 m från husväggen. Kommer personen att träffas av snöbollen?



- Vi beräknar först tiden för snöbollen att nå marken.

$$0 = 14 - 7 \sin 40^\circ \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t^2 + 0,918t - 2,86 = 0$$

$$t = -0,459 \pm 1,752$$

Minustecknet förkastas, dvs. $t = 1,293 \text{ s}$.

Antag att snöbollen landar x m från väggen.

$$x = v_{0x} \cdot t = 7 \cos 40^\circ \cdot 1,293 \approx 6,9 \text{ m}$$

- Vi beräknar tiden för snöbollen att färdas 4 m från väggen.

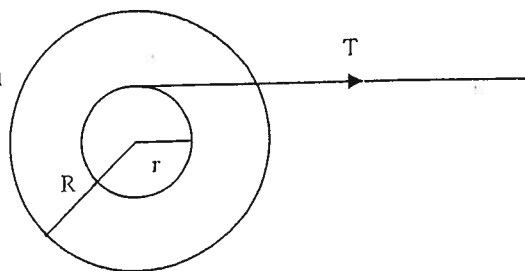
$$4 = 7 \cos 40^\circ \cdot t \Rightarrow t = \frac{4}{7 \cos 40^\circ} \approx 0,746 \text{ s}$$

$$\text{Snöbollen befinner sig då på höjden } y = 14 - 7 \sin 40^\circ - \frac{1}{2} g 0,746^2 \approx 7,9 \text{ m}$$

Svar: a) 6,9 m

b) Nej

5. En homogen skiva med radien $R = 50 \text{ cm}$ och massan $M = 4,0 \text{ kg}$ är monterad på en friktionsfri axel genom skivans centrum. En mindre skiva med massan $m = 1,0 \text{ kg}$ och radien $r = 10 \text{ cm}$ är monterad på den stora skivan enligt figuren. Ett rep är lindat runt den lilla skivan. Man drar i repet med den konstanta spänningen $T = 20 \text{ N}$.



- Hur stor blir systemets vinkelacceleration?
- Om systemet startar från vila, hur stor är vinkelhastigheten och rörelsemängdsmomentet efter 5 s?

a) Vi väljer rotationsaxeln som momentpunkt.

$$\tau = I\alpha$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 = 0,5 \cdot 4 \cdot 0,5^2 + 0,5 \cdot 1 \cdot 0,1^2 = 0,505 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{T \cdot r}{I} = \frac{20 \cdot 0,1}{0,505} \approx 3,96 \text{ rad/s}^2$$

$$b) \varpi = \varpi_0 + \alpha t = 0 + 3,96 \cdot 5 \approx 19,8 \text{ rad/s}$$

$$L = I\varpi = 0,505 \cdot 19,8 \approx 10,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

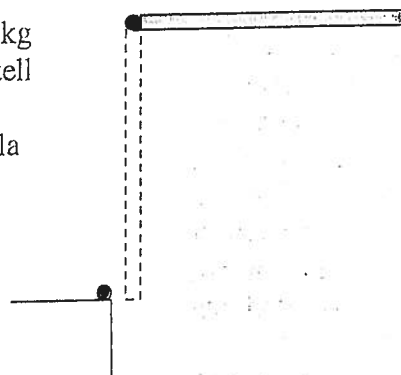
Svar: a) 3,96 rad/s²

b) 10 kgm²/s

6. En tunn homogen stav med längden 0,6 m och massan 1,0 kg kan rotera kring en fix axel i ena änden. Staven hålls horisontell och släpps.

a) Vad är stavens vinkelhastighet då den passerar sitt vertikala läge enligt figuren?

b) Stavens ände träffar en lerklump med massan 0,2 kg som fastnar i staven. Hur stor blir vinkelhastigheten omedelbart efter kollisionen?



a) Stavens masscentrum sänks $h = 0,3 \text{ m}$. Energiprincipen:

$$mgh = \frac{1}{2}I\varpi^2$$

$$I = \frac{m\ell^2}{3} \Rightarrow \varpi = \sqrt{\frac{2mgh}{I}} = \sqrt{\frac{2mgh}{\frac{m\ell^2}{3}}} = \sqrt{\frac{6gh}{\ell^2}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 9,8 \cdot 0,3}{0,6^2}} = 7,0 \text{ rad/s}$$

b) Rörelsemängdsmomentet för stav + lerklump bevaras.

$$I_1\varpi_1 = I_2\varpi_2$$

$$I_1 = \frac{m\ell^2}{3} = \frac{1 \cdot 0,6^2}{3} = 0,12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_2 = \frac{m\ell^2}{3} + m_1\ell^2 = 0,12 + 0,2 \cdot 0,6^2 = 0,192 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\varpi_2 = \frac{I_1\varpi_1}{I_2} = \frac{0,12 \cdot 7}{0,192} = 4,375 \text{ rad/s}$$

Svar: a) 7,0 rad/s

b) 4,4 rad/s

Tentamensskrivning i Mekanik för FK2002

Fredagen den 1 oktober 2010 kl. 9.00 – 14.00

Hjälpmedel: Miniräknare och formelsamling.

Varje problem ger maximalt 4 poäng. För godkänt krävs 12 p av 24 möjliga.
Alla införda beteckningar och ekvationer skall förklaras. Eventuella figurer måste vara tydliga.

Lycka till!

Roger Carlsson

LÖSNINGAR

1. Hur stor ska pendellängden för en matematisk pendel vara för att perioden ska bli densamma som för en fysisk pendel i form av en homogen, tunn stav med längden 90 cm och som svänger kring en axel genom dess ena ändpunkt?

Perioden för en matematisk pendel: $T_M = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

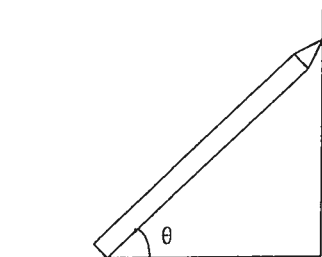
Perioden för en fysisk pendel: $T_F = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$ där $I = \frac{mL^2}{3}$ och $d = \frac{L}{2}$

$$T_F = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2 \cdot 2}{3 \cdot L \cdot mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{2 \cdot L}{3g}}$$

$$T_M = T_F \Rightarrow \frac{\ell}{g} = \frac{2 \cdot L}{3g} \Rightarrow \ell = \frac{2}{3}L = \frac{2 \cdot 0,9}{3} = 0,6 \text{ m}$$

Svar: 0,6 m

2.



En blyertspenna med längden 20 cm vilar på golvet och den friktionsfria väggen som i figuren. Tyngdpunkten hos pennan ligger 11 cm från blyertsspetsen. Om den maximala statiska friktionskoefficienten mellan pennan och golvet är 0,80, vilken är den minsta vinkel θ för vilken pennan inte glider?

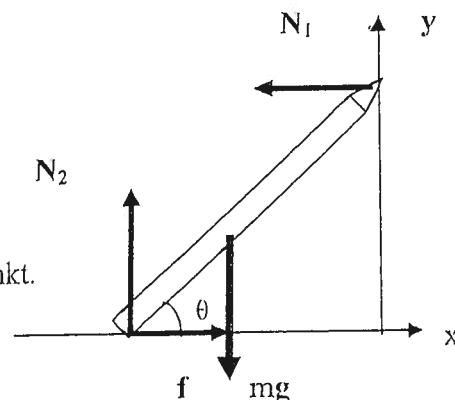
$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \Rightarrow N_1 - f = 0 \\ f &= \mu_s \cdot N_2 \Rightarrow N_1 - \mu_s \cdot N_2 = 0 \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow N_2 - mg = 0 \\ N_1 - \mu_s \cdot mg &= 0 \quad (i)\end{aligned}$$

Vi väljer pennans kontaktpunkt med golvet som momentpunkt.

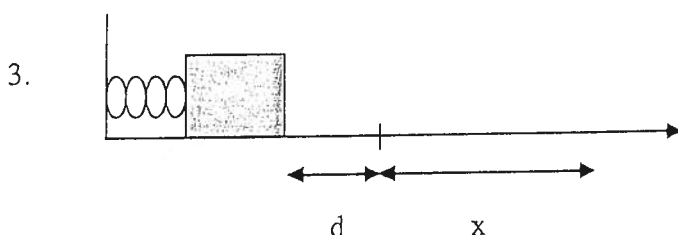
$$\sum \tau = 0 \Rightarrow mg \cdot 9 \cos \theta - N_1 \cdot 20 \sin \theta = 0 \quad (ii)$$

$$(i) + (ii) \Rightarrow mg \cdot 9 \cos \theta - \mu_s mg \cdot 20 \sin \theta = 0$$

$$\tan \theta = \frac{9}{\mu_s \cdot 20} = \frac{9}{16} \Rightarrow \theta \approx 29,4^\circ$$



Svar: 29°



En kloss med massan 200 g hålls tryckt mot en fjäder som trycks ihop avståndet d från jämviktsläget. Fjäderkonstanten är 40 N/m och den statiska och kinetiska friktionen mellan kloss och underlag är 0,50 resp. 0,30.

- Vad är det minsta värdet på d för vilket klossen börjar röra på sig när den släpps?
- Vi låter nu klossen trycka ihop fjädern 10 cm från jämviktsläget för att därefter släppas. Beräkna avståndet från jämviktsläget som klossen då rör sig innan den stannar.

- Fjäderkraften måste vara större än den maximala friktionskraften.

$$kd = \mu_s mg \Rightarrow d = \frac{\mu_s mg}{k} = \frac{0,5 \cdot 0,2 \cdot 9,8}{40} \approx 0,025 \text{ m}$$

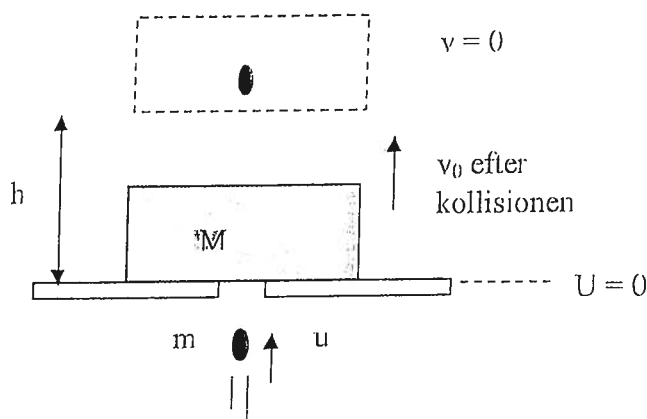
- Fjädern trycks nu ihop sträckan $d = 0,10 \text{ m}$ och vi antar att klossen rör sig $x \text{ m}$ från jämviktsläget innan den stannar.

Den totala energin i begynnelseläget är $\frac{1}{2}kd^2$. Då klossen stannat är den totala energin noll. Skillnaden är lika med friktionskraftens arbete.

$$\frac{1}{2}kd^2 = \mu_k mg(d + x) \Rightarrow x = \frac{kd^2}{2\mu_k mg} - d = \frac{40 \cdot 0,1^2}{2 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 9,8} - 0,1 \approx 0,24 \text{ m}$$

Svar: a) 2,5 cm
b) 0,24 m

4.



En kula med massan 10 g skjuts med farten 200 m/s lodrätt upp mot en träkloss med massan 240 g. Kulan fastnar i klossen.

- Till vilken höjd ovanför utgångsläget stiger klossen?
- Hur länge dröjer det innan klossen återkommer till utgångsläget?

a) Rörelsemängden bevaras vid kollisionen:

$$mu = (M + m)v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{mu}{M + m} = \frac{0,01 \cdot 200}{0,25} = 8 \text{ m/s}$$

Energiprincipen ger: $\frac{(M + m) v_0^2}{2} = (M + m)gh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{8^2}{2 \cdot 9,8} \approx 3,3 \text{ m}$

b) Låt t vara tiden för att nå högsta punkten.

$$v = v_0 - gt \Rightarrow 0 = 8 - 9,8 \cdot t \Rightarrow t = \frac{8}{9,8} \text{ s. Den sökta tiden är } 2t = \frac{16}{9,8} \approx 1,6 \text{ s}$$

Svar: a) 3,3 m

b) 1,6 s

5.



En tunn homogen stav med massan 30 g och längden 40 cm roterar kring en axel genom dess centrum vinkelrät mot staven med 30 varv per minut. Två små ringar, vardera med massan 20 g, är monterade på staven så att de kan glida utesamma, De är placerade och hålls fast 5,0 cm på vardera sidan om stavens mittpunkt. Ringarna släpps och de börjar glida mot stavens ändpunkter. Hur stor är stavens rotationshastighet då ringarna når stavens ändpunkter? Betrakta ringarna som punktmassor.

Vi betraktar staven + ringarna som ett system. Systemets totala rörelsemängdsmoment kommer då att bevaras under rörelsen.

M = stavens massa

m = massan hos en ring

ω_1 = rotationshastigheten då ringarna släpps

ω_2 = rotationshastigheten då ringarna nått stavens ändpunkter

ℓ = stavens längd

ℓ_1 = ringarnas avstånd till stavens centrum då de släpps

Rörelsemängdsmomentet då ringarna släpps: $L_1 = \left(\frac{M\ell^2}{12} + 2 \cdot m\ell_1^2 \right) \cdot \omega_1$

Rörelsemängdsmomentet då ringarna nått stavens ändpunkter: $L_2 = \left(\frac{M\ell^2}{12} + 2 \cdot m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \right) \cdot \omega_2$

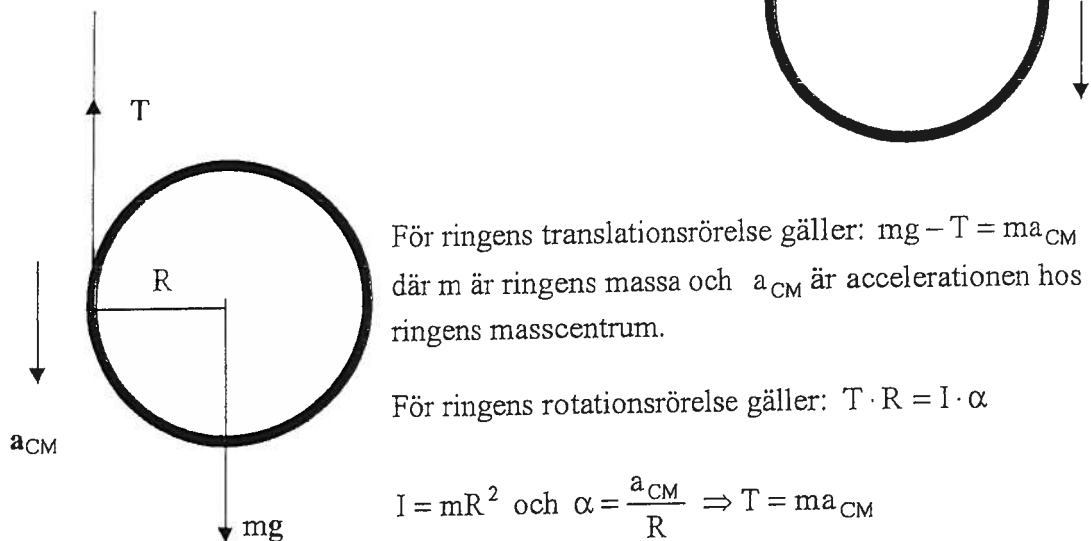
$L_1 = L_2$ ger med insatta värden $\omega_2 = 7,5$ varv/min.

Svar 7,5 varv/min

6. Ett lätt snöre är lindat kring en tunn ring med radien 8,0 cm och massan 0,18 kg. Snörets fria ände hålls fast och ringen släpps från vila.

- a) Hur stor blir spänningen i snöret då ringen faller och lindas av snöret? Vi förutsätter att snöret inte glider mot ringen.
b) Hur lång tid tar det för ringen att falla 0,75 m?

a)



För ringens translationsrörelse gäller: $mg - T = ma_{CM}$
där m är ringens massa och a_{CM} är accelerationen hos ringens masscentrum.

För ringens rotationsrörelse gäller: $T \cdot R = I \cdot \alpha$

$I = mR^2$ och $\alpha = \frac{a_{CM}}{R} \Rightarrow T = ma_{CM}$

Insättning i den första ekvationen ger: $T = \frac{mg}{2} = \frac{0,18 \cdot 9,8}{2} \approx 0,88 \text{ N}$

b) $a_{CM} = \frac{T}{m} = \frac{0,88}{0,18} \approx 4,9 \text{ m/s}^2$ Eftersom ringen startar från vila gäller för fallsträckan s :

$$s = \frac{1}{2} a_{CM} t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a_{CM}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,75}{4,9}} \approx 0,55 \text{ s}$$

Svar: a) 0,88 N
b) 0,55 s