Lösningsskisser

STOCKHOLMS UNIVERSITET
FYSIKUM

Tentamensskrivning i Mekanik för FK2002/FK2004, 6.0 hp
Onsdagen den 4 januari 2012, kl. 09.00-14.00.

Tillåtna hjälpmedel: Physics handbook och enkel miniräknare

Insatruktioner:
Alla lösningar ska vara enkla att läsa och vara tillräckligt beskrivna för att kunna följa. *Sammanfatta varje problem* som en inledning till lösningen, så att lösningen blir självförklarande. Ange antaganden som görs angående eventuell tolkning av problem.

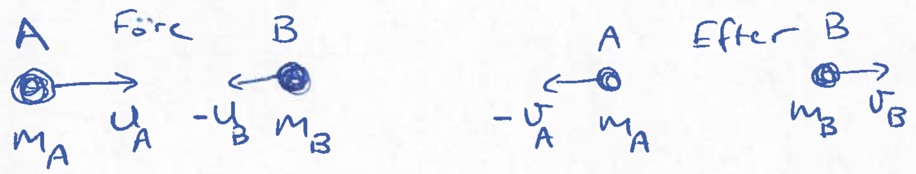
Varje problem ger maximalt 4 poäng. För godkänt krävs 12 p av 24 möjliga.

Lycka till! / Andreas Rydh

---

1. Två klot A och B frontalkolliderar med varandra. Klot A väger 0.5 kg och har en hastighet på 6 m/s medan klot B väger 1.5 kg och har en hastighet i motsatt riktning på 3 m/s. Beskriv fysikaliskt situationerna (a), (b) och (c) nedan. Inför variabler och ställ upp nödvändiga ekvationer för att lösa problemen. Problemen behöver inte lösas men ska kunna lösas från de uppställda ekvationerna.
a) Kollisionen är elastisk och underlaget är friktionsfritt. Klotens fart och riktning efter kollisionen söks.
b) Kollisionen är fullständigt inelastisk (dvs kloten sitter ihop efter kollisionen) och underlaget är friktionsfritt. Klotens fart och riktning efter kollisionen söks.
c) Kollisionen är fullständigt inelastisk men friktionskoefficienten mot underlaget är 0.2. Totala förflyttningen efter kollisionen söks.

a)



$u_A = 6\,m/s$
$u_B = -3\,m/s$
$m_A = 0.5\,kg$
$m_B = 1.5\,kg$

× Rörelsemängden bevaras: $m_A u_A + m_B u_B = m_A v_A + m_B v_B$

× Energin bevaras (kinetiska): $\frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$

2 ekv. 2 obekanta

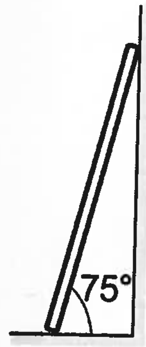
b) Efter: $\left.\begin{array}{l} A \longrightarrow v_A \\ B \longrightarrow v_B \end{array}\right\} v_A = v_B = v$ 1 ekv, 1 obekant

× Rörelsemängden bevaras fortfarande: $m_A u_A + m_B u_B = (m_A + m_B) v$
Viss kinetisk energi har försvunnit i deformation av kloten.

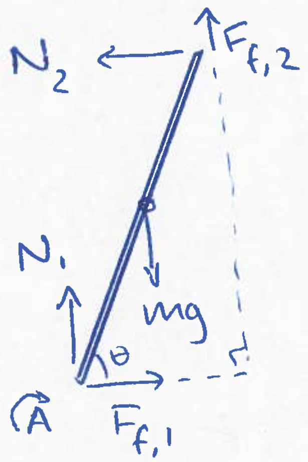
c) $\begin{array}{l} A \\ B \end{array} \longrightarrow v_0 = v$ från b). Kinetiska energin $\frac{1}{2}(m_A + m_B) v_0^2 = T$ övergår till friktionsarbete under sträcka L.

$$T = W = \int^L F_f \cdot dx = \int^L \mu \cdot N\, dx = \int^L \mu \cdot (m_A + m_B) g\, dx = \mu (m_A + m_B) g$$

2. Bilden visar en tunn bok med massa m som står lutad mot väggen i en bokhylla. Båda kontaktytorna har en statisk friktionskoefficient μ_s.
a) Gör en skiss med alla krafter som verkar på boken.
b) Står boken kvar om $\mu_s = 0.6$?



a)



$|F_{f,1}| \leq \mu_s N_1$, $N_1 \geq 0$

$|F_{f,2}| \leq \mu_s N_2$, $N_2 \geq 0$

längd L

b) Observera att $F_{f,1} \neq \mu_s N_1$. Sätt $\begin{cases} F_{f,1} = \alpha_1 \cdot \mu_s N_1 \\ F_{f,2} = \alpha_2 \cdot \mu_s N_2 \end{cases}$

där $|\alpha_1| \leq 1$, $|\alpha_2| \leq 1$.

Ekv: $\begin{cases} x: & F_{f,1} = N_2 & (1) \\ y: & F_{f,2} + N_1 = mg & (2) \\ \curvearrowleft A: & mg \cdot \frac{L}{2}\cos\theta = F_{f,2} \cdot L \cdot \cos\theta + N_2 \cdot L \cdot \sin\theta & (3) \end{cases}$

(3) ger $\quad F_{f,2} = \frac{mg}{2} - N_2 \cdot \tan\theta \quad (3')$

Vi har 5 ekvationer men 6 obekanta $(F_{f,1}, F_{f,2}, \alpha_1, \alpha_2, N_1, N_2)$

Finns lösning med giltiga α_1 och α_2?

Eliminera $F_{f,1}$, N_2 och $F_{f,2}$:

$$\begin{cases} \alpha_2 \cdot \mu_s \cdot (\alpha_1 \cdot \mu_s \cdot N_1) + N_1 = mg & (2') \\ \alpha_2 \cdot \mu_s \cdot (\alpha_1 \cdot \mu_s \cdot N_1) = \frac{mg}{2} - \alpha_1 \mu_s N_1 \cdot \tan\theta & (3'') \end{cases}$$

forts. 2b)

Eliminera N_1:
$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{mg}{1+\alpha_1\alpha_2\mu_s^2} & (2'') \\ N_1 = \dfrac{mg}{2(\alpha_2\mu_s+\tan\theta)\alpha_1\mu_s} & (3'') \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 1+\alpha_1\alpha_2\mu_s^2 = \underbrace{2(\alpha_2\mu_s+\tan\theta)\alpha_1\mu_s}_{2\alpha_1\alpha_2\mu_s^2 + 2\tan\theta\cdot\alpha_1\mu_s}$$

$$1 = \alpha_1(2\tan\theta\cdot\mu_s + \alpha_2\mu_s^2)$$

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_2\mu_s^2 + 2\mu_s\tan\theta}}$$

Eftersom N_1 och N_2 måste vara positiva så måste $F_{f,1}$ vara positiv, enl. (1) och α_1 vara positiv, för att boken ska stå kvar. $(F_{f,1} = \alpha_1\cdot\mu_s\cdot N_1)$

Med givna värden på μ_s och θ uppfylls alla villkor för alla $-1 \leq \alpha_2 \leq 1$. Boken står enkelt kvar.

Tag t.ex. $\alpha_2 = 0$, vilket ger
$$\begin{cases} F_{f,2} = 0, \quad N_1 = mg \\ F_{f,1} = N_2 = \dfrac{mg}{2\tan\theta} \approx \dfrac{mg}{7.5} \\ \alpha_1 \approx 0.22 \end{cases}$$

För $\alpha_2 = -1$ fås $\alpha_1 \approx 0.24$

För $\alpha_2 = +1$ fås $\alpha_1 \approx 0.21$

$\alpha_1 \leq 1$ så länge som $2\mu_s\tan\theta + \alpha_2\mu_s^2 \geq 1$

dvs $\tan\theta \geq \dfrac{1-\alpha_2\mu_s^2}{2\mu_s} \Rightarrow \tan\theta_{min} \approx 0.53 \Rightarrow \underline{\theta_{min} \approx 28^\circ}$

forts. 2b)

Kommentar: För korrekt svar behöver man bara visa att det finns lösning.

En sådan hittas enkelt genom att till exempel studera fallet då $F_{f,2} = 0$

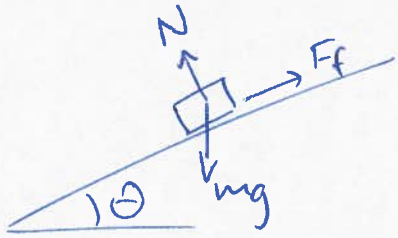
Det viktiga med problemet är att förstå att $F_f \neq \mu N$ vid statisk friktion i normalfallet.

För $\theta = 75°$ kommer alltså

$$0.13 N_1 \leq F_{f,1} \leq 0.14 N_1$$

3. För att bestämma hastigheten hos en kula med massan $m = 15\,\mathrm{g}$ görs ett experiment i två steg. Som hjälpmedel har man en träkloss och ett bord. I första steget läggs klossen på bordet som lutas så att klossen långsamt glider nedför bordet med konstant hastighet. Bordets lutning är 25° då detta sker. Bordet ställs sedan horisontellt och kulan skjuts in horisontellt i klossen och fastnar. Klossen, som väger 2 kg, glider 10 cm på bordet innan den stannar. Bestäm kulans hastighet.

Lösning



$\theta = 25°$

Första steget: konstant hastighet $\Leftrightarrow$ $\sum F = 0$

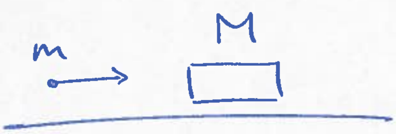
$$\left.\begin{aligned} N &= mg\cdot\cos\theta \\ F_f &= mg\cdot\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad F_f = N\cdot\underbrace{\tan\theta}_{\mu\approx 0.47}$$

Första experimentet används alltså för att bestämma μ.

$m = 0{,}015\ \mathrm{kg}$

$M = 2\ \mathrm{kg}$

Andra steget:



Rörelsemängden bevaras: $m\cdot u_{\text{före}} = (M+m)\cdot v_{\text{efter}}$

Då klossen glider verkar friktionskraften $\mu\cdot\underbrace{(M+m)\cdot g}_{\text{normalkraft}}$

Arbetet $W = \int F\cdot ds = \mu\cdot(M+m)g\cdot\Delta x$

motsvarar den kinetiska energin efter kollision:

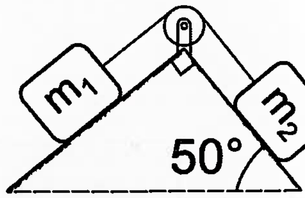
$$\frac{1}{2}(M+m)v_{\text{efter}}^2 = \mu(M+m)g\cdot\Delta x$$

$$v_{\text{efter}} = \sqrt{2\cdot\mu\cdot g\cdot\Delta x} = \sqrt{2\cdot 0.47\cdot \underset{m/s^2}{9{,}82}\cdot \underset{m}{0.1}}\ m/s$$

$$v_{\text{efter}} = 0.96\ m/s$$

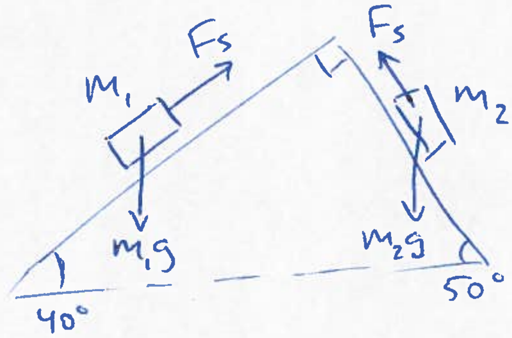
$$\Rightarrow\ u_{\text{före}} = \frac{2.015}{0.015}\cdot 0.96\ m/s = \underline{\underline{129\ m/s}}$$

4. Två massor m_1 och m_2 är fästa i varandra med en lina som löper över en masslös trissa enligt figur. All friktion kan försummas.
a) Bestäm kvoten m_2/m_1 för att hålla systemet i jämvikt (så att massorna inte börjar röra sig).
b) Bestäm accelerationen hos massorna om istället $m_1 = m_2$.



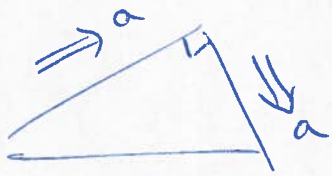
Lösning:

a) Vid jämvikt är resulterande krafterna = 0
Antag spännkraft F_s i linan.



$$F_s = m_1 g \cdot \sin 40° = m_2 \cdot g \cdot \sin 50°$$

$$\Longrightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin 40°}{\sin 50°} \approx 0.84$$



b) Antag en resulterande acceleration
(eftersom $\frac{m_2}{m_1} = 1 > 0.84$)

$m_1 = m_2 = m$

Ekv: $m_2 g \cdot \sin 50° - m_1 \cdot g \cdot \sin 40° = (m_1 + m_2) \cdot a$

$$a = \frac{g}{2}(\sin 50° - \sin 40°) \approx \underline{0.61 \, m/s^2}$$

Kan även skrivas som

$$\begin{cases} F_s - m_1 g \cdot \sin 40° = m_1 \cdot a \\ m_2 g \sin 50° - F_s = m_2 a \end{cases}$$

5. Kepplers tredje lag säger att periodtiden T hos en planet runt solen är proportionell mot roten ur avståndet r i kubik, dvs

$$T^2 = \kappa r^3$$

Finn ett uttryck för κ om solens massa är M. Gör lämpliga antaganden.

Lösning

Kepplers IIIe lag förutsätter den allmänna gravitationslagen:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

där $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

är gravitationskonstanten

Antag vidare en cirkulär bana och att $M >> m$

där m är planetens massa.

Gravitationskraften är en centripetalkraft:

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

Hastigheten v och radien r ger en omloppstid

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Ekv: $\frac{mv^2}{r} = G \cdot \frac{mM}{r^2} \implies v^2 \cdot r = G \cdot M$

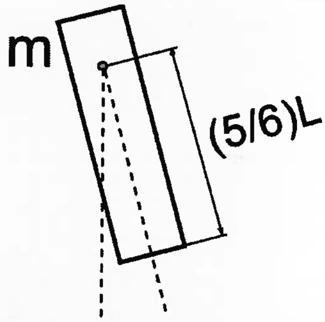
eller $v^2 = \frac{G \cdot M}{r}$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{\left(\frac{G \cdot M}{r}\right)}$$

$$T^2 = \underbrace{\frac{4\pi^2}{G \cdot M}}_{} \cdot r^3$$

identifiera κ

6. En fysisk pendel består av en homogen stång med massa $m = 0.3\,\mathrm{kg}$ och längden $L = 0.2\,\mathrm{m}$ upphängd i ett litet hål på avståndet $L/6$ från ena kanten, enligt figur. Bestäm pendelns period.



Lösning: Pendelns period ges av

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

där I är tröghetsmomentet och d är avstånd mellan axel och masscentrum.

$$d = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right)L = \frac{L}{3}$$

Enligt parallellaxelteoremet är $I = I_{cm} + md^2$

$I_{cm} = m \cdot \frac{L^2}{12}$, vilket kan härledas genom att integrera $I_{cm} = 2 \cdot \int_0^{L/2} \rho_M \cdot x^2 dx = \frac{2}{3} \rho_M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3$

där $2 \int_0^{L/2} \rho_M dx = \rho_M \cdot L = m$, dvs $\rho_M = \frac{m}{L}$

$$\Rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m\left(\frac{L^2}{12} + \frac{L^2}{9}\right)}{mg \cdot \frac{L}{3}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{7L}{12g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{7 \cdot 0.2}{12 \cdot 9.82}}\, s = $$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$\approx \underline{0.68\ s}$$