Lösningar

STOCKHOLMS UNIVERSITET
FYSIKUM

Tentamensskrivning i Mekanik för FK2002, 6.0 hp
Fredagen den 30 september 2011, kl. 09.00-14.00.

Tillåtna hjälpmedel: Physics handbook och enkel miniräknare

Insatruktioner:
Alla lösningar ska vara enkla att läsa och vara tillräckligt beskrivna för att kunna följa. *Sammanfatta varje problem* som en inledning till lösningen, så att lösningen blir självförklarande. Ange antaganden som görs angående eventuell tolkning av problem.

Varje problem ger maximalt 4 poäng. För godkänt krävs 12 p av 24 möjliga.

Lycka till! / Andreas Rydh

---

1. En hiss åker uppåt med farten $v = 3\,\mathrm{m/s}$. En boll släpps från hissens tak. Hissen är 2.5 m hög.
a) Vilken tid tar det för bollen att nå hissens golv?
b) Hur lång har bollen rört sig relativt marken utanför hissen då den slår i golvet?

An elevator is going upwards with a speed $v = 3\,\mathrm{m/s}$. A ball is dropped from the roof of the elevator, which is at a height of 2.5 m. a) How long does it take for the ball to reach the floor of the elevator? b) What total distance has the ball travelled relative to the ground outside the elevator when it hits the elevator floor?

a) Hissens fart påverkar inte tiden, eftersom bollen släpps då hissen åker.

I lokalt koordinatsystem blir hastigheten nedåt

$v = v_0 + gt \quad , \quad v_0 = 0$

Sträckan $s = s_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$

$\Longrightarrow \quad h = s - s_0 = \frac{gt^2}{2} \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.5\ \mathrm{m}}{9.81\ \mathrm{m/s^2}}} = \underline{\underline{0.71\,\mathrm{s}}}$

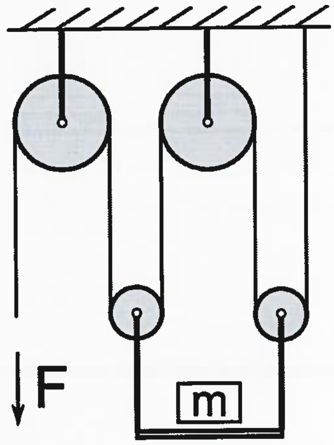
b) På tiden $t = 0.71\ \mathrm{s}$ har hissen rört sig $\Delta y = v \cdot t = 2.14\ \mathrm{m}$ (uppåt)

Bollen har alltså åkt $h - \Delta y = (2.5 - 2.14)\ \mathrm{m} = \underline{\underline{36\ \mathrm{cm}}}$ nedåt

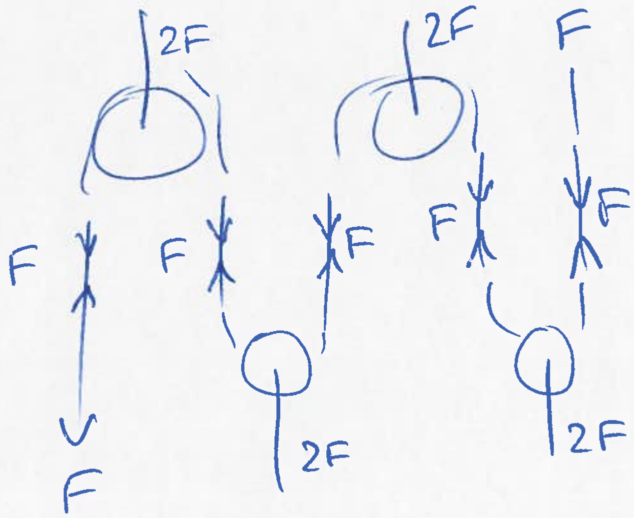
Notera att bollen initialt åker uppåt relativt marken utanför.

2. Bilden visar en lina som löper genom fyra masslösa, friktionsfria block. Linan är fäst i taket i ena änden. I två av blocken hänger en masslös plattform på vilken en vikt med massan $m = 20\,\text{kg}$ står centrerad. Man drar i linans fria ände med en kraft F.
a) Vilken kraft behövs för att hålla plattformen stillastående? Uträttas något arbete av kraften F?
b) Antag att plattformen istället åker uppåt med en konstant hastighet $v = 1\,\text{m/s}$. Vilken kraft F krävs? Vilken effekt behövs för att lyfta vikten på plattformen med denna hastighet?

The picture shows a string that passes four massless, frictionless pulleys. One end of the string is attached to the roof. A massless platform is attached to two of the pulleys. On top of it a weight of mass $m = 20\,\text{kg}$ is centered. A force F is pulling at the free end of the string. a) Find the force F required to keep the platform not moving. Is the force F performing any work? b) Assume that the platform instead is pulled up with a constant velocity $v = 1\,\text{m/s}$. What is the required force F? What power is needed to lift the weight on the platform with this speed?



a)



Ingen acceleration $\Rightarrow$ $4F = mg$; $F = \frac{mg}{4}$

$F = \frac{20 \cdot 9{,}81}{4} = \underline{\underline{49\text{ N}}}$

Kraftens angreppspunkt ändras ej $\Rightarrow$ inget arbete.

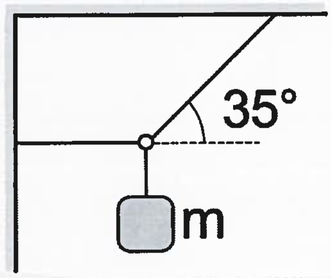
b) Konst. $v \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$ samma F

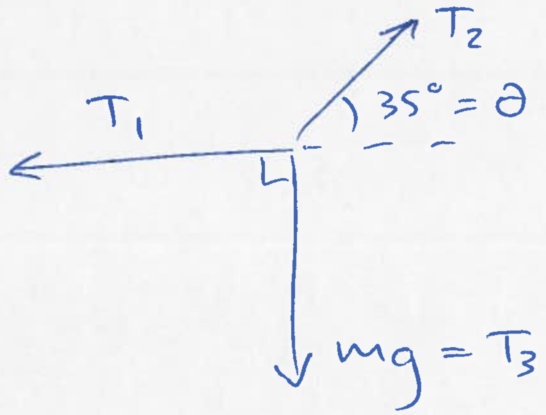
Effekt $P = 4F \cdot v = \underline{\underline{196\text{ W}}}$

(kan även ses som $F \cdot (4v)$ där man drar i linan med hastighet $4v$)

3. En massa m hängs upp med hjälp av tre trådar enligt figur. En tråd är horisontell. Trådarna klarar en maximal spännkraft på 100 N innan de går av. Bestäm vilken maximal massa m som systemet klarar innan någon tråd går av.

A mass m is suspended by means of three ropes. One rope is horizontal. The ropes can handle a maximum tension of 100 N before breaking. Find the maximum mass m that can be suspended before any wire breaks.





Ekv: $T_1 = T_2 \cdot \cos\theta$ (x-led)

$mg = T_2 \cdot \sin\theta$ (y-led)

$$\Longrightarrow \quad T_2 = \frac{mg}{\sin\theta}$$

$$T_1 = \frac{mg}{\sin\theta} \cdot \cos\theta = \frac{mg}{\tan\theta}$$

Eftersom $\sin\theta < 1$, $\cos\theta < 1$

$$\Longrightarrow \quad T_2 > T_3, \quad T_1 < T_2$$

T_2 kommer att ha störst spänning

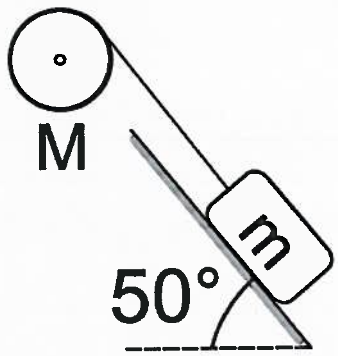
$$\Longrightarrow \quad T_2 = 100\ \text{N} \Rightarrow m = \frac{T_2 \cdot \sin 35°}{9.81} = \underline{5.85\ \text{kg}}$$

Check: $T_1 = T_2 \cdot \cos 35° \approx 82$ N

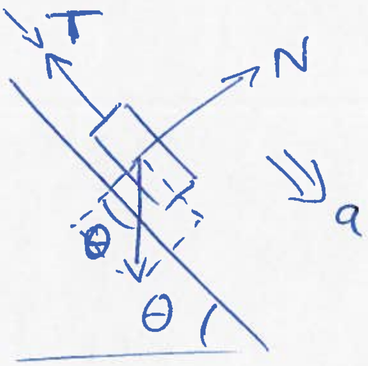
$T_3 = mg \approx 57$ N

4. En massa $m = 2\,\text{kg}$ är fäst i en lina som är upplindad runt en friktionsfri trissa med massa $M = 5\,\text{kg}$ och radie $r = 10\,\text{cm}$. Trissan kan ses som en homogen skiva med tröghetsmoment $I = Mr^2/2$. Massan glider nedför ett lutande plan, med lutning 50° enligt figur.
a) Bestäm hastigheten hos massan m efter 1 s om planet är friktionsfritt och rörelsen börjar från vila.
b) Vilken minsta statiska friktionskoefficient skulle behövas för att massan m inte ska börja glida?

A mass $m = 2\,\text{kg}$ is attached by a string to a frictionless pulley of mass $M = 5\,\text{kg}$ and radius $r = 10\,\text{cm}$. The pulley can be treated as a disk with a moment of intertia $I = Mr^2/2$. The mass is sliding down a 50° incline. a) Find the speed of the mass m after 1 s if the incline is frictionless and the motion starts from rest. b) What is the smallest coefficient of static friction that is needed to keep the mass m from sliding?



a)



Ekv: $mg \cdot \sin\theta - T = m \cdot a$

Rotation av trissa:

$$\tau = T \cdot r = I \cdot \alpha$$

där $\alpha = \dfrac{a}{r}$

$$\begin{cases} T = mg\sin\theta - ma \\ T \cdot r = \dfrac{Mr^2}{2} \cdot \dfrac{a}{r} \iff T = \dfrac{M}{2} \cdot a \end{cases}$$

$$m(g\sin\theta - a) = \frac{M}{2} \cdot a$$

$$a\left(\frac{M}{2} + m\right) = mg\sin\theta$$

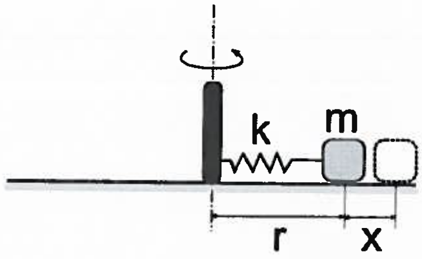
$$a = \frac{m}{\frac{M}{2} + m} \cdot g \cdot \sin\theta = \frac{2}{\frac{5}{2} + 2} \cdot 9{,}81 \cdot \sin 50$$

$a = 3.34\ \text{m/s}^2 \implies v = a \cdot 1\,\text{s} = \underline{\underline{3.34\ \text{m/s}}}$
efter 1 s

b) $T = 0$ men friktionskraft $\mu_s \cdot N$

Ekv: $\left.\begin{array}{l} N = mg \cdot \cos\theta \\ \mu_s N = mg\sin\theta \end{array}\right\} \implies \mu_s = \tan\theta = \underline{\underline{1{,}19}}$

5. En massa $m = 1\,\text{kg}$ är fäst på axeln av en roterande skiva med hjälp av en fjäder med fjäderkonstant $k = 1\,\text{kN/m}$. Vid vila ges avståndet mellan massa och rotationsaxel av r. Friktionen mellan massan och skivan är liten men tillräcklig för att dämpa oscillationer.
a) Vid vilken rotationshastighet ω har fjädern dragits ut ett avstånd $x = r/2$?
b) Bestäm kvoten U_{sp}/K mellan fjäderns potentiella energi (relativt vila) och den kinetiska energin hos massan m vid denna rotationshastighet.



A mass $m = 1\,\text{kg}$ is attached to the axis of a rotating disk by means of a spring with spring constant $k = 1\,\text{kN/m}$. The distance between the mass and and the axis is r when the disk is at rest. The friction between the mass and the disk is small but enough to dampen oscillations. a) At what angular velocity ω is the spring extended a distance $x = r/2$? b) Determine the ratio U_{sp}/K between the potential energy of the spring (as compared to rest) and the kinetic energy of the mass m at this angular velocity.

a) Fjäderkraften ger centripetalacceleration

Ekv: $$F_{fj} = -k \cdot x = -\frac{mv^2}{(r+x)}$$

massan m:s avstånd till rot.axel

$$v = \omega(r+x)$$

$$\Rightarrow \quad +kx = +m\omega^2 \cdot (r+x)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \cdot \frac{x}{r+x} = \left\{x = \frac{r}{2}\right\} = \frac{k}{m} \cdot \frac{r/2}{3r/2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{3m}} = \sqrt{\frac{1000\ \text{N/m}}{3 \cdot 1\ \text{kg}}} = \underline{\underline{18.3\ \text{rad/s}}}$$

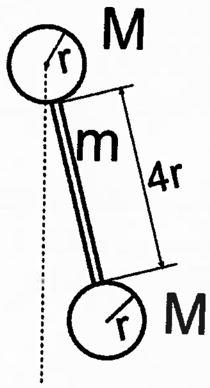
b) $$\left.\begin{aligned} U_{sp} &= \frac{1}{2}kx^2 \\ K &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}\right\} \quad \frac{U_{sp}}{K} = \frac{kx^2}{mv^2} = \frac{k \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{m\omega^2\left(\frac{3r}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{k}{9m\omega^2}$$

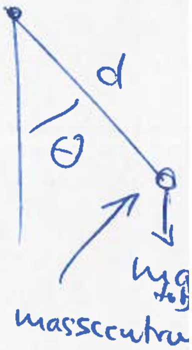
Sätt in $\omega^2 = \frac{k}{3m}$ $\Rightarrow$ $$\frac{U_{sp}}{K} = \frac{k}{9m \cdot \left(\frac{k}{3m}\right)} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

6. Bilden visar en fysisk pendel bestående av två cirkulära skivor (radie $r = 15\,\mathrm{cm}$, massa $M = 3\,\mathrm{kg}$) som sitter ihop med hjälp av en stång (längd $4r$, massa $m = 1\,\mathrm{kg}$). Pendelns axel går genom den översta skivans centrum. Bestäm pendelns period.

A physical pendulum consists of two circular disks (radius $r = 15\,\mathrm{cm}$, mass $M = 3\,\mathrm{kg}$) connected by a rod (length $4r$, mass $m = 1\,\mathrm{kg}$). The axis of the pendulum goes through the center of the upper disk. Find the period of the pendulum.



För en fysisk pendel får vi diff ekv:



$$\tau = -m_{tot}\cdot g\cdot(d\sin\theta) = I\cdot\alpha = I\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

små vinklar $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{m_{tot}\,g\cdot d}{I}}_{}\cdot\theta = 0$$

identifiera ω^2 $\Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$I = I_{skiva\,1} + I_{stång} + I_{skiva\,2} =$$

$$= \frac{1}{2}Mr^2 + \left(\frac{1}{12}m\cdot(4r)^2 + m\cdot(r+2r)^2\right) + \left(\frac{1}{2}Mr^2 + M(6r)^2\right)$$

$$= 37Mr^2 + \left(\frac{16}{12}+9\right)mr^2 = 37Mr^2 + \frac{31}{3}mr^2$$

$$I = \left(37\cdot 3 + \frac{31}{3}\cdot 1\right)\cdot 0.15^2\ [\mathrm{kgm^2}] = \underline{2.73\ \mathrm{kgm^2}}$$

$$m_{tot} = 2M + m = (2\cdot 3 + 1)\,\mathrm{kg} = 7\,\mathrm{kg}$$

$$d = r + \frac{4r}{2} = 3r = 0.45\,\mathrm{m}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{7\cdot 9.81\cdot 0.45}{2.73}}\ \mathrm{rad/s} = 3.36\ \mathrm{rad/s}$$

$$\Rightarrow T \approx \underline{1.87\ \mathrm{s}}$$