

Tentamensskrivning i Mekanik för FK2002

Måndagen den 4 januari 2010 kl. 9.00 – 15.00

Hjälpmedel: Miniräknare och formelsamling.

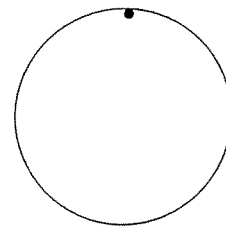
Varje problem ger maximalt 4 poäng. För godkänt krävs 12 p av 24 möjliga.
Alla införda beteckningar och ekvationer skall förklaras. Eventuella figurer måste vara tydliga.

Lycka till!

Roger Carlsson

LÖSNINGAR

1. En tunn cirkulär ring utför små svängningar i vertikalplanet kring en horisontell axel. Den gör en hel svängning på tiden 2,0 s. Hur stor är ringens radie?



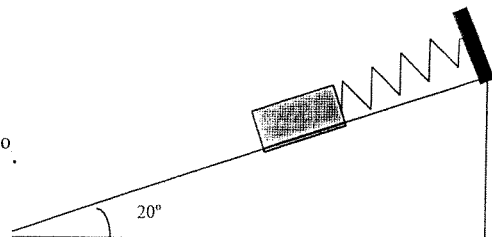
Svängningstiden ges av: $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$ där I är tröghetsmomentet relativt axeln och d är avståndet från ringens masscentrum till axeln som är lika med radien R . Enligt parallellaxelteoremet är $I = I_{CM} + md^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{mgd} = \frac{4\pi^2 \cdot 2mR^2}{mgR} = \frac{4\pi^2 \cdot 2R}{g}$$

$$R = \frac{T^2 \cdot g}{8\pi^2} = \frac{2^2 \cdot 9,8}{8\pi^2} \approx 0,50 \text{ m}$$

Svar: 0,50 m

2. En kloss med massan 2,0 kg är kopplad till en fjäder och glider nerför ett lutande plan med lutningsvinkeln 20° . Friktionskoefficienten mellan kloss och plan är 0,125. Klossen släpps från vila med fjädern ej utdragen och glider 0,5 m innan den stannar. Bestäm fjäderkonstanten.



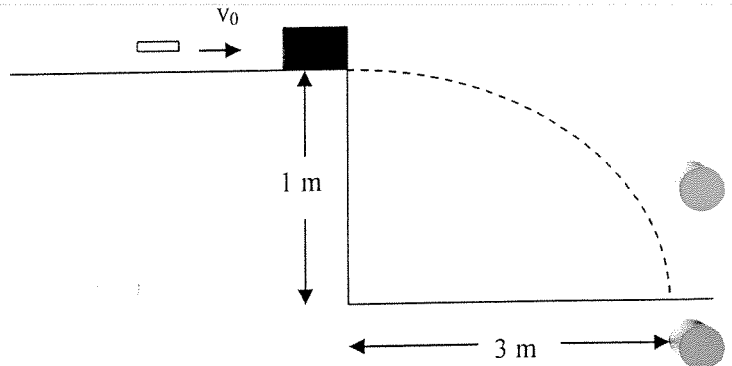
Om klossens massa är m och sträckan den glider är d ger energiprincipen:

$$mgd \sin 20^\circ = \frac{1}{2}kd^2 + \mu \cdot mg \cos 20^\circ \cdot d$$

$$k = \frac{2mg \sin 20^\circ - 2\mu mg \cos 20^\circ}{d} = \frac{2mg}{d} (\sin 20^\circ - \mu \cos 20^\circ) \approx 17,6 \text{ N/m}$$

Svar: 18 N/m

3. En kloss med massan 1,0 kg är placerad vid kanten av ett bord med höjden 1,0 m. En kula med hastigheten v_0 och massan 5,0 g skjuts in i klossen där den fastnar. Klossen kommer då att lämna bordskanten och landa 3,0 m från bordet. Beräkna kulans hastighet v_0 . Försumma luftmotståndet.



Vi beräknar först klossens och kulans gemensamma hastighet V omedelbart efter kollisionen.

$$3 = V \cdot t \Rightarrow t = \frac{3}{V}$$

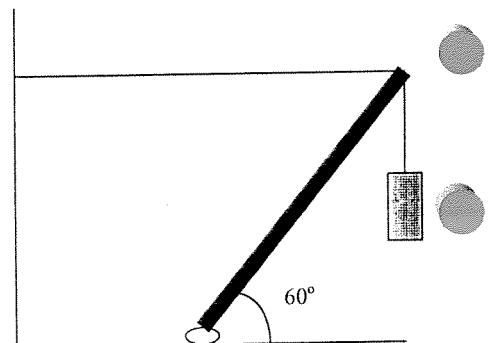
$$0 = 1 - \frac{1}{2}gt^2 = 1 - \frac{1}{2}g \frac{3^2}{V^2} \Rightarrow V \approx 6,64 \text{ m/s}$$

Rörelsemängden för systemet kula + kloss bevaras: $mv_0 = (m + M) \cdot V$

$$v_0 = \frac{m + M}{m} \cdot V = \frac{0,005 + 1}{0,005} \cdot 6,64 \approx 1240 \text{ m/s}$$

Svar: 1240 m/s

4. En homogen lastbom har massan 35 kg. Bommen som är fäst vid en friktionsfri led hålls i 60° lutning av en horisontell lin. Lasten som hänger i bommens övre ända har massan 80 kg. Beräkna spänningen i linan och den totala kraften på bommen från leden.

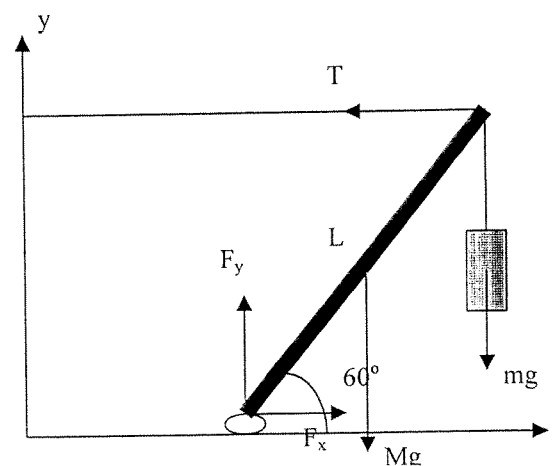


Med leden som momentpunkt erhålles:

$$Mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos 60^\circ + mg \cdot L \cdot \cos 60^\circ - T \cdot L \cdot \sin 60^\circ = 0$$

Insatta värden på m och M ger $T \approx 552 \text{ N}$

Jämviktsvillkor i horisontell och vertikal led ger:



$$F_x = T = 552 \text{ N och } F_y - Mg - mg = 0 \Rightarrow F_y \approx 1128 \text{ N}$$

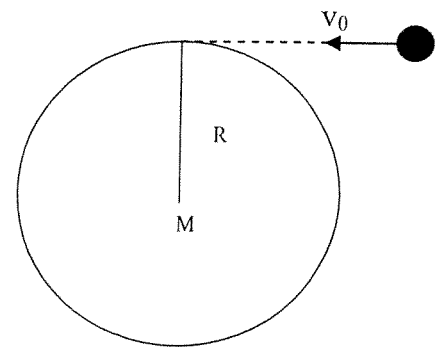
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{552^2 + 1128^2} \approx 1,2 \text{ kN}$$

Svar: 552 N och 1,2 kN

5. En liten partikel med massan 10 g och hastigheten 5,0 m/s kolliderar med en homogen cirkulär skiva och fastnar på dess kant. Skivan har radien 20 cm och massan 1,0 kg och kan rotera kring en fix axel genom dess centrum.

a) Hur stor blir systemets vinkelhastighet efter kollisionen om skivan från början är i vila?

b) Hur stor rörelseenergi förloras i kollisionen?



a) Rörelsemängdsmomentet bevaras:

$$mv_0 R = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right) \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{mv_0}{\left(\frac{1}{2}M + m\right) \cdot R} = \frac{0,01 \cdot 5}{(0,5 + 0,01) \cdot 0,2} \approx 0,49 \text{ rad/s}$$

b) Rörelseenergin före kollisionen $K_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 = 0,5 \cdot 0,01 \cdot 5^2 = 0,125 \text{ J}$

Rörelseenergin efter kollisionen

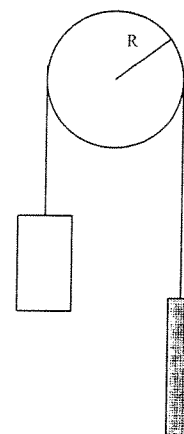
$$K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right) \cdot \omega^2 = 0,5 \cdot (0,5 \cdot 0,2^2 + 0,01 \cdot 0,2^2) \cdot 0,49^2 \approx 0,002 \text{ J}$$

$$K_1 - K_2 = 0,125 - 0,002 = 0,123 \text{ J}$$

Svar: a) 0,49 rad/s

b) 0,12 J

6 En hiss är förbunden med sin motvikt med en stålvajer som löper över ett drivhjul med radien $R = 1,0 \text{ m}$ och tröghetsmomentet $50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Hiss med passagerare väger 1500 kg och motvikten har massan 1000 kg. Vajerns massa försummas. Bestäm hissens acceleration om drivhjulet roterar fritt. Vajern förutsätts att inte glida mot hjulet.

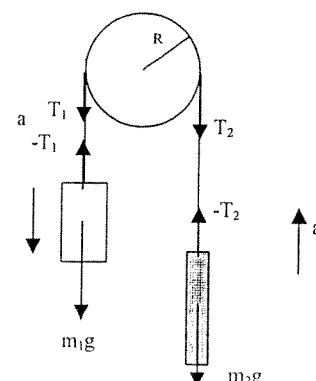


Drivhjulets ekvation: $I \cdot \alpha = (T_1 - T_2) \cdot R$

$$\alpha = \frac{a}{R} \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Ia}{R^2} \quad (i)$$

Hissens och motviktens ekvationer:

$$\begin{aligned} m_1 g - T_1 &= m_1 \cdot a \\ T_2 - m_2 g &= m_2 \cdot a \end{aligned} \Rightarrow (m_1 - m_2)g - (T_1 - T_2) = a(m_1 + m_2)$$



(i) insatt ger: $(m_1 + m_2)a + \frac{Ia}{R^2} = (m_1 - m_2)g$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2) + \frac{I}{R^2}} = \frac{500g}{2500 + 50} \approx 2,0 \text{ m/s}^2$$

Svar: $2,0 \text{ m/s}^2$