

# STOCKHOLMS UNIVERSITET

## FYSIKUM

### Tentamensskrivning i Mekanik för FK2002

Måndagen den 28 september 2009 kl. 9.00 – 15.00

Hjälpmedel: Miniräknare och formelsamling.

Varje problem ger maximalt 4 poäng. För godkänt krävs 12 p av 24 möjliga.  
Alla införda beteckningar och ekvationer skall förklaras. Eventuella figurer måste vara tydliga.

Lycka till!

Roger Carlsson

## LÖSNINGAR

1.

- a) Hur stor ska pendelländen hos en matematisk pendel vara för att perioden ska bli densamma som för en fysisk pendel i form av en homogen stav med längden 90 cm och massan 40 g som utför små svängningar kring en axel genom dess ena ändpunkt?  
b) Hur ändras perioden hos stängen om en vikt med massan 20 g fästs i dess tyngdpunkt?

a) Perioden för matematisk pendel:  $T_m = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

Perioden för fysisk pendel:  $T_f = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$  där  $I = \frac{mL^2}{3}$  och  $d = \frac{L}{2}$

$$T_m = T_f \text{ ger } \frac{\ell}{g} = \frac{2L}{3g} \Rightarrow \ell = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3} \cdot 0,9 = 0,6 \text{ m}$$

- b) Tröghetsmomentet blir nu enligt parallellaxelteoremet.:

$$I = I_{CM} + md^2 = \frac{mL^2}{3} + m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{11mL^2}{12} \text{ eftersom } M = 2m.$$

$$T'_f = 2\pi\sqrt{\frac{11m \cdot L^2 \cdot 2}{12 \cdot L \cdot 3m \cdot g}} = \sqrt{\frac{11}{12}} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}} = \sqrt{\frac{11}{12}} \cdot T_f \approx 0,96 \cdot T_f$$

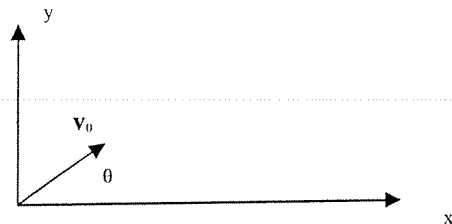
**Svar:** a) 0,6 m   b) 4,3% kortare

2 En kanon kan riktas maximalt  $15^\circ$  upp från horisontalplanet. Kanonen kan då träffa ett mål 600 m bort och som befinner sig på samma höjd som kanonen.

a) Beräkna kulans fart då den lämnar kanonröret.

b) beräkna kulans högsta höjd.

Bortse från luftmotståndet.



$$a) \quad y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{och} \quad x = v_{0x} \cdot t$$

$$0 = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v_0 \sin \theta = \frac{1}{2}gt \quad (i)$$

$$600 = v_0 \cos \theta \cdot t \Rightarrow t = \frac{600}{v_0 \cos \theta} \quad (ii)$$

(ii) insatt i (i) ger

$$v_0 \sin \theta = \frac{g \cdot 600}{2v_0 \cos \theta} \Rightarrow v_0^2 \cdot 2 \sin \theta \cdot \cos \theta = g \cdot 600$$

$$v_0^2 \cdot \sin 2\theta = g \cdot 600$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 600}{\sin 30^\circ}} \approx 108 \text{ m/s}$$

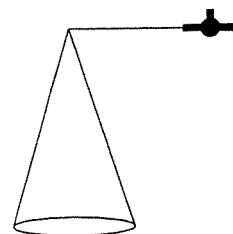
$$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g \cdot \Delta y$$

$$b) \quad 0 - v_0^2 \sin^2 \theta = -2g \cdot \Delta y$$

$$\Delta y = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{108^2 \cdot \sin^2 15^\circ}{2 \cdot 9,8} \approx 39,8 \text{ m}$$

**Svar:** a) 108 m/s b) 40 m

3. Ett modellflygplan med massan 1,0 kg flyger med hastigheten 10 m/s. Planet är med en lina fastsatt i toppen av ett 1,5 m högt torn i form av en homogen kon så att det kan flyga runt i en cirkel kring tornets topp. Tornets bas har diametern 0,4 m. Hur långt från toppen av tornet måste planet flyga för att tornet inte ska välta? Tornet kan inte glida på marken.



Då tornet är på väg att vända verkar normalkraften i en punkt A på basytans kant. Tornet välter om linans kraftmoment överstiger tyngdkraftens. Momenten beräknas m.a.p. punkten A.

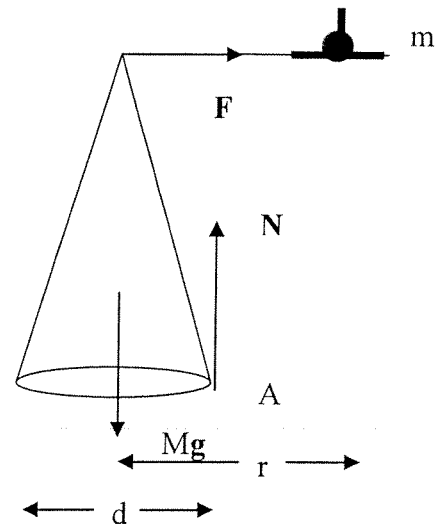
Kraften i linan ges av centripetalkraften  $F = \frac{mv^2}{r}$

Kraften ökar när planets avstånd från tornet minskar.

Kraftmomenten är lika då

$$Fh = Mg \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = Mg \frac{d}{2} \Rightarrow r = \frac{2 \cdot 1,5 \cdot 1 \cdot 10^2}{10 \cdot 9,8 \cdot 0,4} \approx 7,6 \text{ m}$$

**Svar:** 7,6 m

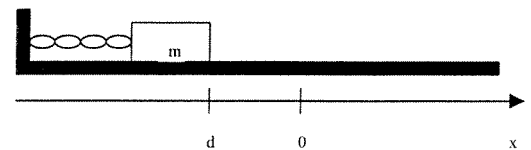


4. En kloss med massan  $m = 200 \text{ g}$  hålls intryckt mot en fjäder på avståndet  $d$  från fjäderns jämviktsläge. Fjäderkonstanten är  $k = 40 \text{ N/m}$  och den statiska och kinetiska friktionskoefficienten mellan kloss och underlag är  $\mu_s = 0,50$  resp.  $\mu_k = 0,30$ .

a) Vad är det minsta värdet på  $d$  för vilket klossen börjar röra på sig då den släpps?

b) Klossen trycks in avståndet  $d = 10 \text{ cm}$  och släpps.

Beräkna den sträcka som klossen förflyttas efter att ha lämnat fjädern vid  $x = 0$ .



a) Fjäderkraften måste vara större än den maximala statiska friktionskraften.

Klossen börjar glida då dessa är lika stora.

$$kd = f_s = \mu_s \cdot mg \Rightarrow d = \frac{\mu_s \cdot mg}{k} = \frac{0,5 \cdot 0,2 \cdot 9,8}{40} \approx 0,025 \text{ m}$$

b) Då klossen släpps är dess totala energi lika med potentiella energin  $U = \frac{1}{2} kd^2$ .

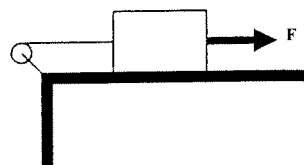
När klossen har stannat har denna energi omvandlats till friktionskraftens uträttade arbete.

$$\frac{1}{2} kd^2 = f_k (d + x) = \mu_k \cdot mg (d + x)$$

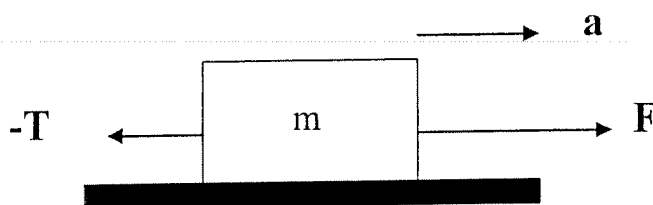
$$x = \frac{kd^2}{2\mu_k \cdot mg} - d = \frac{40 \cdot 0,1^2}{2 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 9,8} - 0,1 \approx 0,24 \text{ m}$$

**Svar:** a) 2,5 cm b) 24 cm

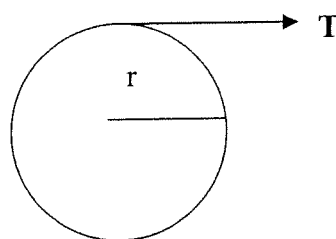
5. Ett hjul med radien 0,20 m är monterat på en friktionsfri horisontell axel. Hjulets tröghetsmoment relativt axeln är  $0,050 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Ett rep, vars massa kan försummas, är lindat kring hjulet och fäst i en kloss med massan 2,0 kg. Hur stor blir hjulets vinkelacceleration om klossen påverkas av den horisontella kraften  $F = 3,0 \text{ N}$ ? Vi förutsätter att repet inte glider på hjulet samt att friktionen mellan klossen och underlaget kan försummas.



Klossen:  $F - T = ma$  (i)



Hjulet:  $T \cdot r = I \cdot \alpha \Rightarrow T = \frac{I \cdot \alpha}{r}$  (ii)



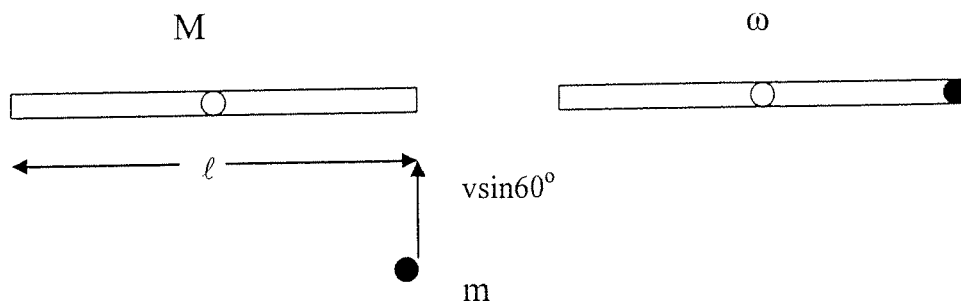
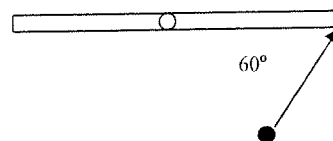
Ingen glidning ger  $a = r\alpha$  (iii)

(ii) och (iii) i (i) ger

$$F - \frac{I \cdot \alpha}{r} = m r \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F r}{I + m r^2} = \frac{3 \cdot 0,2}{0,05 + 2 \cdot 0,2^2} \approx 4,6 \text{ rad/s}^2$$

**Svar:**  $4,6 \text{ rad/s}^2$

6. En homogen tunn stav med längden 0,50 m och massan 4,0 kg kan rotera i ett horisontalplan kring en axel genom dess centrum. Staven befinner sig i vila då en kula med massan 3,0 g avfyras i stavens horisontalplan. Kulan träffar i dess ena ändpunkt under vinkeln  $60^\circ$  och fastnar i staven. Staven erhåller omedelbart efter kollisionen vinkelhastigheten  $10 \text{ rad/s}$ . Hur stor är kulans hastighet då den träffar staven?



Rörelsemängdsmomentet bevaras under kollisionen för systemet stav + kula.

Före kollisionen är det totala rörelsemängdsmomentet  $L_1 = mv \sin 60^\circ \cdot \frac{\ell}{2}$

Efter kollisionen är det totala rörelsemängdsmomentet

$$L_2 = (I_{\text{stav}} + I_{\text{kula}}) \cdot \omega = \left( \frac{M\ell^2}{12} + m \cdot \frac{\ell^2}{4} \right) \cdot \omega$$

$$L_1 = L_2 \text{ ger } mv \sin 60^\circ \cdot \frac{\ell}{2} = \left( \frac{M\ell^2}{12} + m \cdot \frac{\ell^2}{4} \right) \cdot \omega$$

$$0,003 \cdot \sin 60^\circ = \left( \frac{4 \cdot 0,5}{6} + \frac{0,003 \cdot 0,5}{2} \right) \cdot 10 = \frac{20,045}{6} \Rightarrow v \approx 1,3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

**Svar:**  $1,3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$

