

Tentamensskrivning i Mekanik för FK2002

Fredagen den 2 januari 2009 kl. 9.00 – 15.00

Hjälpmedel: Miniräknare och formelsamling.

För godkänt krävs 12 p av 24 möjliga.

Alla införda beteckningar och ekvationer skall förklaras. Eventuella figurer måste vara tydliga.

Lycka till!

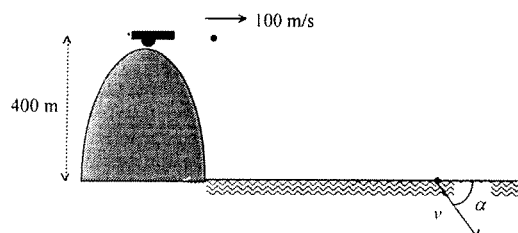
Roger Carlsson

LÖSNINGAR

1. Från toppen av ett 400 m högt berg som ligger vid havet, skjuts en kula ut i horisontell riktning. Kulans hastighet är 100 m/s.

- a) Hur lång tid tar det tills kulan slår i vattnet?
- b) Vilken fart har kulan när den slår i vattnet?
- c) Hur stor är vinkeln α när kulan slår i vattnet?

Vid beräkningarna behöver ingen hänsyn tas till luftmotståndet.



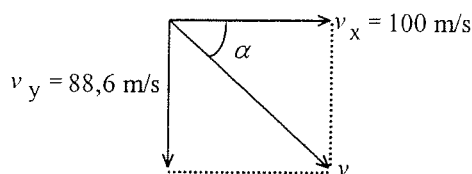
a) I vertikal led är utgångshastigheten lika med noll. I vertikal led beskriver kulan således ett fritt fall utan begynnelsehastighet.

$$s = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 400}{9,82}} \text{ s} \approx 9,026 \text{ s}$$

b) Kulans hastighet i vertikal led är vid nedslaget

$$v_y = gt = 9,82 \cdot 9,026 \text{ m/s} \approx 88,6 \text{ m/s}$$

Låt v vara kulans fart vid nedslaget. v bestäms med Pythagoras' sats.



$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad v = \sqrt{100^2 + 88,6^2} \text{ m/s} \approx 134 \text{ m/s}$$

c) Vinkeln α bestäms ur sambandet:

$$\tan \alpha = \frac{88,6}{100} \Rightarrow \alpha \approx 41,55^\circ$$

Svar: a) 9,0 s b) 134 m/s c) 42°

2. En fjäder har längden 22,0 cm. En vikt hängs i fjädern. Då blir fjäderns längd 35,3 cm. Vikten dras sedan nedåt ett par centimeter och släpps. Hur lång tid dröjer det tills vikten når sitt övre vändläge?

Fjäderns förlängning

$$\Delta l = (35,3 - 22,0) \text{ cm} = 13,3 \text{ cm} = 0,133 \text{ m}.$$

I jämviktsläget är fjäderkraften F lika stor som viktens tyngd mg .

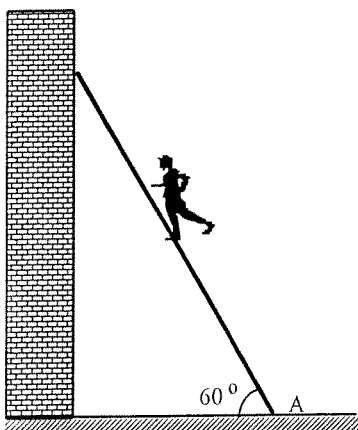
$$F = k \Delta l = mg \text{ ger fjäderkonstanten } k = \frac{mg}{\Delta l}.$$

$$\text{Svängningens period } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{\Delta l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,133}{9,82}} \text{ s} \approx 0,731 \text{ s}$$

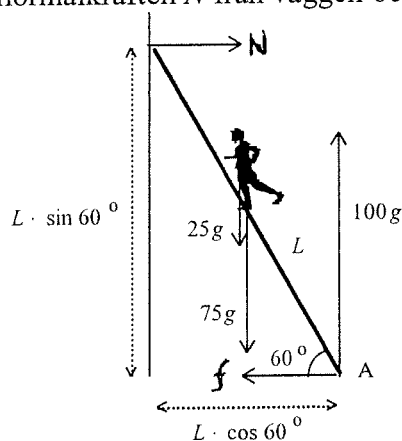
Tiden från det nedre vändläget till det övre är en halv period $\frac{0,731}{2} \text{ s} \approx 0,37 \text{ s}.$

Svar: 0,37 s

3. Stegen väger 25 kg och lutar mot väggen med en vinkel på 60° . Mannen som väger 75 kg har klättrat upp och står mitt på stegen. Väggen är så våt och hal att friktionen mellan stege och vägg är försumbar. Bestäm storleken på den resulterande kraften på stegen i punkten A, där stegen vilar mot marken.



På stegen verkar fem krafter, mannens tyngd, stegens tyngd, friktionskraften f från marken, normalkraften N från väggen och normalkraften från marken.



Mannens och stegens sammanlagda tyngd är

$$(25g + 75g) = 100g$$

Normalkraften från marken måste vara lika stor som denna eftersom stegen är i vila. Likaså måste normalkraften från väggen vara lika med friktionskraften från marken.

Kraftjämvikt råder.

Låt stegens längd vara L . Avståndet från A till husväggen är då $L \cdot \cos 60^\circ$ och höjden längs husväggen är $L \cdot \sin 60^\circ$. Momentjämvikt råder. Vi väljer punkten A som momentpunkt. De nedåtriktade krafterna på $100g$ har momentarmen $0,5 \cdot L \cdot \cos 60^\circ$ och normalkraften N från väggen har momentarmen $L \cdot \sin 60^\circ$.

$$\text{Momentlagen: } N \cdot L \cdot \sin 60^\circ = 100g \cdot 0,5 \cdot L \cdot \cos 60^\circ$$

$$N = \frac{100 \cdot 9,82 \cdot 0,5 \cdot \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} \quad N \approx 283 \text{ N}$$

I punkten A verkar således kraften 283 N åt vänster och $100g = 982 \text{ N}$ uppåt.

Resulterande kraft F_R i punkten A bestäms då med Pythagoras' sats.

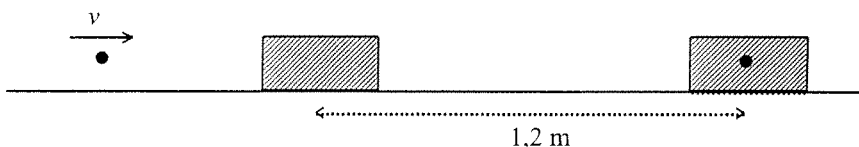
$$F_R^2 = 283^2 + 982^2$$

$$F_R \approx 1022 \text{ N}$$

Svar: $1,0 \text{ kN}$

4. En kloss av trä väger $3,5 \text{ kg}$. Klossen ligger på ett horisontellt bord. En kula med massan 20 g skjuts in och fastnar i klossen, som därvid får fart och glider $1,2 \text{ m}$ längs bordet innan den stannar. Under inbromsningen verkar en friktionskraft som är 28% av tyngdkraften.

Bestäm kulans hastighet v .



$m = 0,020 \text{ kg}$, $M = 3,5 \text{ kg}$, v_0 = kulans hastighet före träffen med klossen, v_1 = kulans och klossen gemensamma hastighet direkt efter träffen.

Först kolliderar kulan och träklossen i en helt oelastisk stöt. Rörelsemängdens bevarande ger:

$$m \cdot v_0 + M \cdot 0 = (m + M) \cdot v_1$$

$$v_0 = \frac{(m + M) \cdot v_1}{m} \quad (1)$$

Sedan överförs hela den återstående rörelseenergin till friktionsvärme under inbromsningen. Vid inbromsningen gäller:

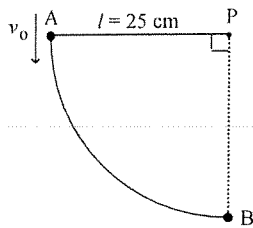
$$F_f \cdot s = \frac{(m + M) \cdot v_1^2}{2} \quad \text{där } F_f = 0,28 \cdot (m + M) \cdot g \Rightarrow v_1 = \sqrt{2 \cdot 0,28 \cdot g \cdot s} = \sqrt{2 \cdot 0,28 \cdot 9,82 \cdot 1,2} \text{ m/s} \approx 2,57 \text{ m/s}$$

$$\text{Ekv. (1) ger: } v_0 = \frac{(0,020 + 3,5) \cdot 2,57}{0,020} \text{ m/s} \approx 452 \text{ m/s}$$

Svar. 450 m/s

5. En kula är fäst i en tråd med längden $l = 25$ cm. Trådens andra ände är fäst i en punkt P. Tråden sträcks horisontellt och kulan ges farten v_0 riktad nedåt i läge A. Se figur. Tråden tål precis 4 gånger kulans tyngd, dvs tråden går av om den belastas med en kraft större än $4mg$, där m är kulans massa.

Vilken är den största fart v_0 som man ge kulan, så att inte tråden går av vid läge B?



Låt spännkraften i snöret i punkten B vara $4mg$, riktad uppåt. I punkten B verkar också tyngden mg på kulan riktad nedåt. Resultaterande kraft på kulan i punkten B blir då

$(4mg - mg) = 3mg$, riktad uppåt. Detta är en centripetalkraft och kan således skrivas $\frac{mv^2}{l}$, där

$l = 0,25$ m är snörets längd och v är kulans hastighet i punkten B. $\frac{mv^2}{l} = 3mg$ ger $v^2 = 3 \cdot g \cdot l$

Låt lägesenergin i punkten B vara noll. Lägesenergin i punkten A är då $m \cdot g \cdot l$. Rörelseenergin i punkten A är $\frac{mv_0^2}{2}$. Rörelseenergin i punkten B är $\frac{mv^2}{2}$. Energiprincipen ger att den totala

energin i punkterna A och B är lika. Vi får $m \cdot g \cdot l + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$

Efter division med m och multiplikation med 2 erhålls:

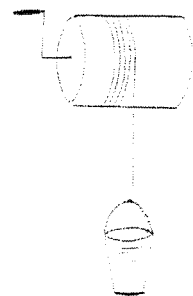
$$v_0^2 = v^2 - 2 \cdot g \cdot l = 3 \cdot g \cdot l - 2 \cdot g \cdot l = g \cdot l = 9,82 \cdot 0,25 = 2,455$$

$$v_0 = \sqrt{2,455} \text{ m/s} \approx 1,57 \text{ m/s}$$

Kulan kan inte ges större fart än 1,6 m/s.

Svar: 1,6 m/s

6. Figuren visar en enkel hissanordning till en vattenbrunn. Repet till hinken lindas på en homogen cylinder med diametern 4,0 dm. Vid ett tillfälle råkar vattenhämtaren tappa taget när en fylld hink (total massa 10 kg) hänger i repet. Hinken accelererar nedåt med $3,8 \text{ m/s}^2$. Bestäm cylinderns tröghetsmoment. Försumma repetets och vevens massor samt anta att repet inte glider mot cylindern.



$$\text{Hinken: } mg - T = ma \Rightarrow T = m(g - a) = 10(9,8 - 3,8) = 60 \text{ N}$$

$$\text{Cylindern: } \tau = I \cdot \alpha$$

$$R \cdot T = I \cdot \frac{a}{R}$$

$$I = \frac{T \cdot R^2}{a} = \frac{60 \cdot 0,2^2}{3,8} \approx 0,63 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Svar: $0,63 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$