

Tentamensskrivning i Mekanik för FK2002

Måndagen den 29 september 2008 kl. 9.00 – 15.00

Hjälpmedel: Miniräknare och formelsamling

För godkänt krävs 12 p av 24 möjliga.

Alla införda beteckningar och ekvationer skall förklaras. Eventuella figurer måste vara tydliga.

Lycka till!

Roger Carlsson

LÖSNINGAR

1. En tunn homogen stav har längden 1,0 m.

- a) Hur stor blir svängningstiden om den utför små svängningar kring en axel 20 cm från ena ändpunkten? (2p)
- b) Hur stor blir farten hos stavens nedre ände om den släpps från horisontalläge och får rotera kring en axel genom ena ändpunkten? (2p)

Lösning:

a) Svängningstiden $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$ där I är tröghetsmomentet med avseende på rotations-

axeln och d är avståndet mellan stavens masscentrum och rotationsaxeln. $I = \frac{m\ell^2}{3}$ och $d = 0,5$ m.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot 1^2}{3 \cdot m \cdot 9,8 \cdot 0,5}} \approx 1,64 \text{ s}$$

b) Svängningstiden är $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$ där I är tröghetsmomentet med avseende på rotations-axeln och d är avståndet mellan stavens masscentrum och rotationsaxeln.

Parallellaxelteoremet ger: $I = I_{\text{CM}} + md^2 = \frac{m \cdot 1}{12} + m \cdot 0,3^2 = m(\frac{1}{12} + 0,09)$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(\frac{1}{12} + 0,09)}{m \cdot 9,8 \cdot 0,3}} \approx 1,53 \text{ s}$$

Svar : a) 1,6 s

b) 1,5 s

2. Två klossar med massorna $m_1 = 2,0 \text{ kg}$ och $m_2 = 1,0 \text{ kg}$ kan glida på en friktionsfri bordsyta. m_2 trycker ihop en fjäder 18 cm från dess jämviktsläge. Fjäderkonstanten är 1000 N/m. Då m_2 släpps träffar den m_1 som är stillastående och klossarna fastnar i varandra.

- a) Hur stor blir klossarnas gemensamma hastighet efter kollisionen? (2p)
 b) Klossarna lämnar bordet, som är 1,1 m högt. Hur långt från bordskanten träffar de fastsatta klossarna golvet och vad är då deras hastighet? (2p)

Lösning:

a) Vi beräknar först m_2 's hastighet då den lämnar fjädern. Elastisk potentiell energi omvandlas till rörelseenergi:

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} kx^2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{kx^2}{m_2}} = \sqrt{\frac{1000 \cdot 0,18^2}{1}} \approx 5,7 \text{ m/s}$$

Vi kallar den gemensamma hastigheten V . Vid kollisionen bevaras rörelsemängden för systemet $m_1 + m_2$:

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V$$

$$V = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{1 \cdot 5,7}{3} \approx 1,9 \text{ m/s}$$

b) Vi beräknar först tiden för luftfärden:

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 + 0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,1}{9,8}} \approx 0,47 \text{ s}$$

Avståndet från bordskanten blir då: $x = v_{0x} t = V \cdot t = 1,9 \cdot 0,47 \approx 0,89 \text{ m}$

Hastigheten fås ur energiprincipen:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = (m_1 + m_2) gh + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 1,1 + 1,9^2} \approx 5,0 \text{ m/s}$$

Svar: a) 1,9 m/s

b) 0,89 m och 5,0 m/s

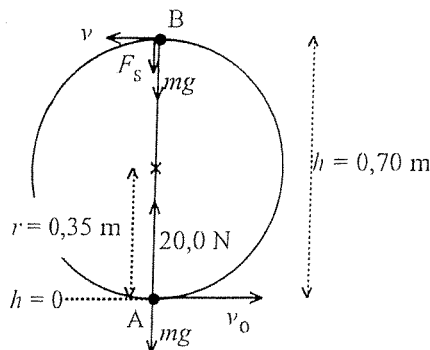
3. En kula, fastsatt i ett snöre, tvingas rotera i en cirkulär vertikal bana. Spännkraften i snöret, när kulan är i nedersta läget är 20,0 N. Kulan väger 200 g och snörets längd är 35 cm. Under rörelsen tillförs ingen extra energi.

a) Bestäm kulans fart i nedersta läget. (2p)

b) Bestäm spännkraften i snöret då kulan är i översta läget. (2p)

Lösning:

Nedre läget kallas här för A och övre läget för B.



a) Kulans fart v_0 i läge A bestäms.

Resultande kraft $20,0 - mg$ är centripetalkraft.

$$20,0 - mg = \frac{mv_0^2}{r}$$

$$v_0^2 = \frac{r \cdot 20,0}{m} - r \cdot g = \frac{0,35 \cdot 20,0}{0,200} - 0,35 \cdot 9,82 = 31,6$$

$$v_0 = \sqrt{31,6} \text{ m/s} = 5,62 \text{ m/s}$$

b) Vi sätter lägesenergin till noll då kulan befinner sig i läge A. Energiprincipen ger att den totala energin i läge A och B är lika, eftersom ingen extra energi tillförs utifrån.

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gh = 5,62^2 - 2 \cdot 9,82 \cdot 0,70 = 17,8$$

$$v = \sqrt{17,8} \text{ m/s} = 4,22 \text{ m/s}$$

Detta är kulans fart i läge B.

I läge B verkar de två krafterna mg och spännkraften F_s i snöret. Summan av dessa krafter är

$$\text{centripetalkraft. } F_s + mg = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow F_s = \frac{mv^2}{r} - mg =$$

$$= \left(\frac{0,200 \cdot 4,22^2}{0,35} - 0,200 \cdot 9,82 \right) \text{ N} = 8,22 \text{ N}$$

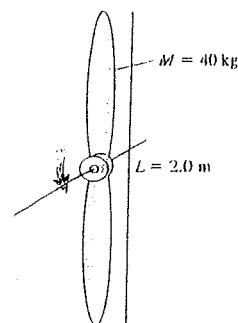
Svar: a) 5,6 m/s

b) 8,2 N

4. En flygplansmotor har vridmomentet 60 Nm och driver en propeller med längden 2,0 m och massan 40 kg.

a) Vad blir propellerns vinkelacceleration när den startas?

b) Hur lång tid tar det för propellern att från start nå rotationshastigheten 200 varv per minut? Försumma friktion och betrakta propellern som en tunn stav.



(2p)

(2p)

Lösning:

a) Tröghetsmomentet för propellern med avseende på rotation kring en axel genom dess centrum är: $I = \frac{1}{12} ML^2 = \frac{1}{12} \cdot 40 \cdot 2^2 \approx 13,33 \text{ kgm}^2$.

Vinkelaccelerationen blir:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{60}{13,33} \approx 4,50 \text{ rad/s}^2$$

b) Tiden att nå rotationshastigheten 200 varv/min $= \frac{200 \cdot 2\pi}{60} \approx 20,94 \text{ rad/s}$ fås ur:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{20,94 - 0}{4,5} \approx 4,6 \text{ s}$$

Svar: a) 4,50 rad/s²

b) 4,6 s

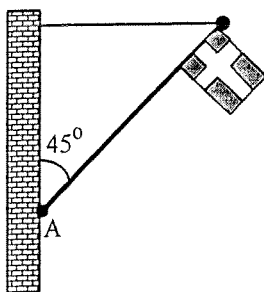
5. En flaggstång väger med flagga 53 kg. Flaggstången är 8,4 m lång. Flaggstången är fäst vid väggen dels vid punkten A, dels med en horisontell lina som går från flaggstångens översta ände. Tyngdpunkten hos flaggstång och flagga finns i stången 5,0 m från punkten A.

a) Bestäm kraften i linan.

(3p)

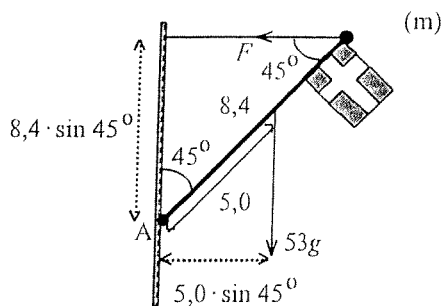
b) Bestäm kraften på flaggstången i punkten A.

(1p)



Lösning:

a) På flaggstången verkar dels tyngdkraften 53g, dels kraften F från linan. Dessutom verkar en kraft i punkten A. Vi väljer A som momentpunkt. Tyngdkraften har momentarmen $5,0 \cdot \sin 45^\circ$ m och F har momentarmen $8,4 \cdot \sin 45^\circ$ m. Se figur nedan.

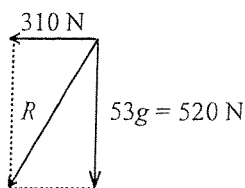


Flaggstången befinner sig i jämvikt. Momentlagen ger:

$$F \cdot 8,4 \cdot \sin 45^\circ = 53g \cdot 5,0 \cdot \sin 45^\circ$$

$$F = \frac{53 \cdot 9,82 \cdot 5,0 \cdot \sin 45^\circ}{8,4 \cdot \sin 45^\circ} \text{ N} = 310 \text{ N}$$

b) I figuren nedan konstrueras resultanten R till ovannämnda två krafter. Eftersom summan av alla krafter på flaggstången skall vara noll, måste kraften som verkar i A vara lika stor som R men motsatt riktad.



Pythagoras' sats ger: $R^2 = 310^2 + 520^2$

$$R = \sqrt{310^2 + 520^2} \text{ N} = 606 \text{ N}$$

Svar: a) 310 N

b) 610 N

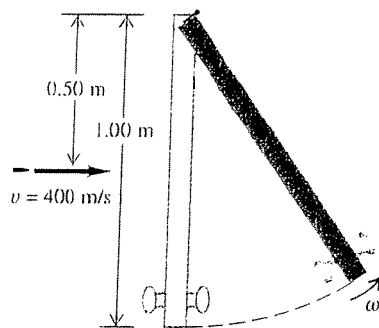
6. En dörr som har formen av en rektangulär skiva är 1,0 m bred och har massan 15 kg. Den kan rotera utan friktion kring en vertikal axel genom gångjärnen.

Tröghetsmomentet för dörren är $I = \frac{Md^2}{3}$ där M är

dörrens massa och d dess bredd. En kula med massan 10 g avfyras med hastigheten 400 m/s vinkelrätt mot en punkt i dörrens centrum. Kulan fastnar i dörren som börjar rotera kring sin axel.

a) Beräkna dörrens vinkelhastighet omedelbart efter att kulan träffat dörren. (3p)

b) Hur mycket värmeenergi utvecklas i dörren då kulan tränger in i densamma? (1p)



Lösning:

a) Vi betraktar dörren och kulan som ett system. Systemet påverkas inte av något totalt yttre kraftmoment med avseende på rotationsaxeln genom gångjärnen. Då bevaras det totala rörelsemängdsmomentet med avseende på denna axel.

Innan kulan träffar dörren är det totala rörelsemängdsmomentet lika med kulans rörelsemängdsmoment.

$$L_{\text{före}} = mv\ell = 0,01 \cdot 400 \cdot 0,5 = 2,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}$$

Rörelsemängdsmomentet efter att kulan träffat dörren ges av:

$$L_{\text{efter}} = I\omega \quad \text{där } I = I_{\text{dörr}} + I_{\text{kula}} = \frac{Md^2}{3} + m\ell^2 = \frac{15 \cdot 1}{3} + 0,01 \cdot 0,5^2 = 5,0025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$L_{\text{före}} = L_{\text{efter}} \Rightarrow 2 = 5,0025 \cdot \omega$$
$$\omega = \frac{2}{5,0025} \approx 0,40 \text{ rad/s}$$

b) Kollisionen mellan kula och dörr är fullständigt inelastisk, så vi förväntar oss inte att rörelseenergin bevaras.

Systemets rörelseenergi före kollisionen: $K_1 = \frac{1}{2}mv^2 = 0,5 \cdot 0,01 \cdot 400^2 = 800 \text{ J}$

Rörelseenergin efter kollisionen är $K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = 0,5 \cdot 5,0025 \cdot 0,4^2 \approx 0,40 \text{ J}$

Friktionskraften som verkar då kulan tränger in i dörren omvandlar så gott som all rörelseenergi hos kulan till värmeenergi.

Svar: a) 0,40 rad/s
b) 800 J