

Tentamensskrivning i Mekanik för FY1100.

Onsdagen den 3 Januari 2007 i FD5

kl 9:00-15:00

Hjälpmedel:

Miniräknare och 'Physics Handbook'

Läs detta innan du börjar räkna!!

För godkänt krävs 12p av 24 möjliga.

Alla införda beteckningar och ekvationer skall förklaras. Tänk på att uträkningar och resonemang blir så utförliga att de går att förstå! Eventuella figurer måste vara stora och tydliga. Skilj noga mellan *skalärer* och *vektorer*.

Om inget annat anges räkna med tyngdaccelerationen $g=9.82 \text{ m/s}^2$.

Lycka till.

Ahmed Al-Khalili

Uppgift 1:

Två klossar A och B frontalkolliderar med varandra. Kloss A väger 1.0 kg och har en hastighet på 20.0 m/s medan Kloss B väger 1.5 kg och har en hastighet på 10.0 m/s.

- Bestäm klossarnas fart och riktning efter kollisionen om kollisionen är elastisk samt underlaget är friktionsfritt. (1p)
- Bestäm klossarnas fart och riktning efter kollisionen om kollisionen är fullständigt inelastisk samt underlaget är friktionsfritt. (1p)
- Bestäm hur långt klossarna skulle förflytta sig efter kollisionen, om friktionskoefficienten mot underlaget är 0.1 samt kollisionen hade varit fullständigt inelastisk (dvs klossarna sitter ihop efter kollisionen). (2p)



A)

Förutom lagen om rörelsemängdens bevarande gäller även att den relativa hastigheten mellan klossarna har samma magnitud fast med omvänd tecken. Alltså:

$$v_A - v_B = u_B - u_A$$

$$\text{Innan kollisionen är } v_A - v_B = 20.0 \text{ m/s} - 10.0 \text{ m/s} = 10.0 \text{ m/s}$$

$$\text{Detta ger oss } u_B = 10.0 + u_A$$

Lagen om rörelsemängdens bevarande ger:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A u_A + m_B u_B = m_A u_A + m_B (10.0 + u_A), \text{ vi får då } u_A = -4.0 \text{ m/s samt } u_B = 6.0 \text{ m/s}$$

B)

För fullständig inelastisk kollision gäller:

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B)u \quad \Rightarrow \quad u = +2.0 \text{ m/s}$$

C)

Från arbete-energi teoremet:

Ändringen i kinetiska energin $\Delta K = W = fs$ där f är friktionskraften och s är förflyttningssträckan. DVS

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)u^2 = (m_A + m_B)g\mu s \quad \Rightarrow \quad s = 2.0 \text{ m}$$

Uppgift 2:

En fjäder sitter fast med ena änden i en vägg. En kloss med massan 0.50 kg kopplas till den andra änden av fjädern. Klossen vilar på ett friktionsfritt underlag och har ett startläge som är 0.020 m förskjutet från fjäderns jämviktsläge. Fjäderkonstanten är 200 N/m.

- A) Beräkna den minsta och den högsta hastigheterna hos klossen. (1)
- B) Beräkna den maximala accelerationen. (1)
- C) Beräkna hastigheten samt accelerationen när klossen är halvvägs till jämviktsläget. (1)
- D) Beräkna potentiella och kinetiska energin när klossen befinner sig halvvägs från jämviktsläget. (1)

Start läge $x = 0.020$ m, Fjäderkonstanten. $k=200$ N/m, klossen massa, $m = 0.50$ kg

A)

Den minsta och högsta hastigheterna inträffar när klossen passerar jämvikts avståndet (beroende på hur du väljer din positiva riktning)

Ur $v = \pm(k/m)^{1/2} (A^2 - x^2)^{1/2}$; A är amplituden och är lika stor som startläget dvs 0.020 m

Maximal/minimal hastighet, $v_{\max/\min}$, uppnås då klossens läge $x = 0$

$$v_{\max/\min} = \pm 0.4 \text{ m/s}$$

B)

Den maximala accelerationen $a_{\max}$ (den mest positiva) uppstår vid vändningen när förskjutningens läge är som mest negativ, dvs:

$$a_{\max} = -kx/m = -200 \text{ N}(-0.020 \text{ m}) / (0.50 \text{ kg}) = 8.0 \text{ m/s}^2$$

C)

Hastigheten och accelerationen när $x = \pm A/2 = \pm 0.010$ m

$$v = \pm(k/m)^{1/2} (A^2 - x^2)^{1/2} = \pm 0.35 \text{ m/s}$$

$$a = \pm kx/m = \pm 4.0 \text{ m/s}^2$$

tecknen framför accelerationen och hastigheten beror på hur ni väljer er referens.

D)

$$\text{Kinetiska energin } K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.50 \text{ kg})(-0.35 \text{ m/s})^2 = 0.030 \text{ J}$$

$$\text{Potentiella energin } U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(200 \text{ N/m})(0.010 \text{ m})^2 = 0.010 \text{ J}$$

Uppgift 3:

En väderraket skjuts iväg från marken. Skjutkraften på raketen är konstant 2000 N netto och raketten håller en konstant riktning på 70° mot marken under de 10 första sekunderna, därefter tar bränslet slut. Raketens vikt är 50 kg (försumma luftmotståndet samt viktändringen som uppstår vid bränsleminskningen).

A) Bestäm raketens hastighet 10 s efter utskjutningen (2p)

B) Bestäm hur långt från utskjutningsplatsen raketten landar. (2p)

A)

$$F = ma \quad \Rightarrow \quad \text{accelerationen } a = F/m = 2000 \text{ N}/50 \text{ kg} = 40 \text{ m/s}^2$$

Hastigheten efter 10 sekunder fås ur: $v = v_0 + at$; där $v_0 = 0 \Rightarrow v = 400 \text{ m/s}$

B)

Under de första 10 sekunderna förflyttar sig raketten:

$$x\text{-led } x = v_x t/2 = (400 \text{ m/s})\cos(70^\circ) (10 \text{ s})/2 = 684 \text{ m}$$

$$y\text{-led } y = v_y t/2 = (400 \text{ m/s})\sin(70^\circ) (10 \text{ s})/2 = 1879 \text{ m}$$

Tiden som raketten spenderar ovanpå marken efter att bränslet har tagit slut fås m.h.a.:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 = 1879 \text{ m} + (400 \text{ m/s})\sin(70^\circ)t - \frac{1}{2}(9.82 \text{ m/s}^2)t^2 = 0 \Rightarrow t = 81.26 \text{ s}$$

sträckan som raketten förflyttar sig i x led efter att bränslet har tagit slut är:

$$s = (81.26 \text{ s}) (400 \text{ m/s})\cos(70^\circ) = 11117 \text{ m}$$

Totala förflyttningen är $11117 \text{ m} + 684 \text{ m} = 11800 \text{ m}$

Uppgift 4:

Du har till uppgift att konstruera en färja som ska bära människor till planeten Mars. Mars har en radie på 3.40×10^6 m och massan 6.42×10^{23} kg. Färjans vikt mätt på jorden är 39200 N. Beräkna både färjans vikt och accelerationskonstanten:

A) vid ytan av mars

(2p)

B) 6.0×10^6 m ovan ytan av Mars.

(2p)

A)

En kropps vikt, W , vid jordensyta ges av:

$$w = Gm_E m / R_E^2$$

Ersätter vi m_E jordens massa med m_M mars massa samt R_E med det aktuella avståndet R från Mars centrum fås:

$$w = Gm_M m / R^2 \quad R = 3.40 \times 10^6 \text{ m och } m_M = 6.42 \times 10^{23} \text{ kg.}$$

Färjans massa, m , fås ur dess vikt vid jordytan

$$m = 39200 \text{ N} / 9.8 \text{ m/s}^2 = 4000 \text{ kg}$$

Detta ger accelerations konstanten vi mars yta som är:

$$\underline{g_M = w/m = Gm_M / R^2 = 3.7 \text{ m/s}^2}$$

B)

Denna gång ges färjans avstånd från Mars centrum av:

$$R = 3.40 \times 10^6 \text{ m} + 6.0 \times 10^6 \text{ m} = 9.4 \times 10^6$$

Detta ger oss accelerationskonstanten $\underline{g = 0.48 \text{ m/s}^2}$

Uppgift 5:

Två roterande homogena skivor A och B sätts koncentriskt mot varandra i en kopplingsanordning. Skiva A har en massa på 2.0 kg, radien 0.20 m och en rotationshastighet på 50 rad/s. Skiva B har massan 4.0 kg, radien 0.10 m och en rotationshastighet på 200 rad/s. Båda skivorna har samma rotationsriktning. Utgå från att skivorna kopplas ihop utan att de slirar.

- A) Bestäm rotationshastigheten på skivorna efter att de har kopplats ihop. (2)
B) Är den kinetiska energin bevarad? Räkna ut samt motivera dit svar. (2)

A)

$$I_A = \frac{1}{2}m_A r_A^2 = \frac{1}{2}(2.0 \text{ kg})(0.20 \text{ m})^2 = 0.040 \text{ kgm}^2$$

$$I_B = \frac{1}{2}m_B r_B^2 = \frac{1}{2}(4.0 \text{ kg})(0.10 \text{ m})^2 = 0.020 \text{ kgm}^2$$

Lagen om rörlsemängdsmomentets bevarande

$$I_A \omega_A + I_B \omega_B = (I_A + I_B) \omega \Rightarrow \underline{\omega = 100 \text{ rad/s}}$$

B)

Kinetiska energin före ihopkopplingen, K_i :

$$K_i = \frac{1}{2}I_A \omega_A^2 + \frac{1}{2}I_B \omega_B^2 = 450 \text{ J}$$

Kinetiska energin efter ihopkopplingen K_f :

$$K_f = \frac{1}{2}(I_A + I_B) \omega^2 = 300 \text{ J}$$

1/3 av energin försvann på grund av den roterande kollisionen som är fullständigt inelastisk.

Uppgift 6:

- A) Beräkna den maximala hastigheten en bil ska ha om den kör på en plan vägkurva med radien 230 m och en friktionskoefficient på 0.87. (1p)
- B) Bestäm vilken lutning (dosering) kurvan måste ha om friktionen är försumbar och bilen inte ska sladda vid en hastighet på 90 km/h. (3p)

A)

$$\Sigma F_x = f = mv^2/R, \quad R = 230 \text{ m}$$

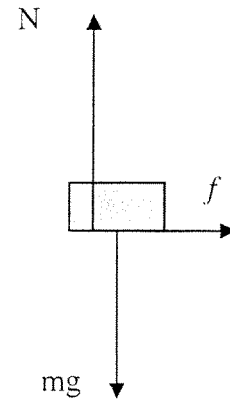
$$\Sigma F_y = N - mg = 0$$

$$f = N\mu_s, \quad \mu_s = 0.87$$

den maximala hastigheten $v_{\max}$ bestäms av den maximala statiska friktionskraften dvs $f = f_{\max} = mg\mu_s$.

Därför:

$$f_{\max} = mv_{\max}^2/R \quad \Rightarrow \quad \underline{v_{\max} = 44 \text{ m/s}}$$



B)

$$\Sigma F_x = N\sin\beta = mv^2/R, \quad R = 230 \text{ m}$$

$$\Sigma F_y = N\cos\beta - mg = 0$$

$$\tan\beta = v^2/(gR) \quad v = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$$

$$\underline{\beta = \arctan [v^2/(gR)] = 15^\circ}$$

