

Tentamensskrivning i Mekanik för FYSIK1100. (inkl. lösningar)

Måndagen den 2 Oktober 2006 i FR4

kl 12:30-18:30

Hjälpmedel: Miniräknare och 'Physics Handbook'

Läs detta innan du börjar räkna!!

För godkänt krävs 12p av 24 möjliga.

Alla införda beteckningar och ekvationer skall förklaras. Tänk på att uträkningar och resonemang blir så utförliga att de går att förstå! Eventuella figurer måste vara stora och tydliga. Skilj noga mellan *skalärer* och *vektorer*.

Om inget annat anges räkna med tyngdaccelerationen $g=9.82 \text{ m/s}^2$.

Lycka till.

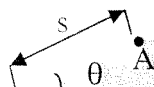
Ahmed Al-Khalili

Uppgift 1:

En kloss på ett friktionsfritt underlag skjuts iväg av en fjäder med fjäderkonstanten $k = 300 \text{ N/m}$. Fjäders är komprimerad med $x = 2 \text{ cm}$ från jämviktsläget. Den iväg



skjutna klossen lämnar underlaget via en $s = 5 \text{ cm}$ lång ramp vars lutning är $\theta = 30^\circ$. Klossen har massan $m = 5 \text{ g}$. (försumma luftmotståndet)



A(2p): Beräkna klossen hastighetsvektor vid punkt A.

B(1p): Hur långt från punkt A landar klossen?

C(1p): Vad är den högsta höjden (relativt punkt A) klossen når?

Lösning:

Enligt energiprincipen bör klossen totala energi före utskjutningen, E_0 vara lika med energin efter utskjutningen, E .

Klossen energi före utskjutning:

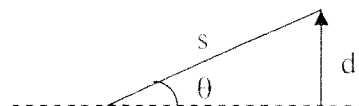
$$E_0 = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(300)(0.02)^2 = 60 \text{ mJ}$$

Klossen energi vid punkt A:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgd = \frac{1}{2}mv^2 + smg\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + smg\sin\theta = E_0 \Rightarrow v = [(E_0 - smg\sin\theta) / (\frac{1}{2}m)]^{1/2} = 4.8 \text{ m/s}$$

$$\text{Hastighetsvektorn } \mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = v\cos\theta\mathbf{i} + v\sin\theta\mathbf{j} = \underline{4.2\mathbf{i} + 2.4\mathbf{j} \text{ m/s}}$$



Tiden där klossen tillbringar i luften fås ur rörelseekvationen $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$.

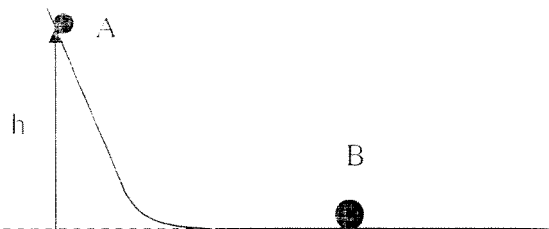
För $y = y_0 = 0$, $v_{0y} = v_y$ samt $a = -g$ fås $t = 0$ eller 0.49 s , vi är intresserad av $t = 0.49 \text{ s}$

Sträckan L från punkt A fås ur $L = v_x t = 4.2 (0.49) = \underline{2.1 \text{ m}}$

När klossen når sin högsta läge har den ingen hastighet i y-lede, dvs $v_y = 0$. Från rörelseekvationen $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a(y - y_0)$ får vi höjden y . Vid $y_0 = 0$, $v_{0y} = 2.4 \text{ m/s}$ och $a = -g$, fås höjden $y = v_{0y}^2 / (2g) = \underline{0.30 \text{ m}}$

Uppgift 2:

Partikel A glider nedför ett friktionsfritt lutande plan. Partikeln startar från vila och höjden $h = 50$ cm. När Partikel A når den plana delen av banan gör den en fullständigt inelastisk kollision med en stillastående partikel B som befinner sig på ett underlag med friktionskoefficienten $\mu_k = 0.2$. Partikel A har massan $m_A = 0.2$ kg och partikel B har massan $m_B = 0.3$ kg. Behandla underlaget för partikel A som friktionsfritt ända fram till kollisionen.



A(1p): Beräkna farten hos partikel A strax före kollisionen

B(1p): Beräkna farten hos partikel A och B strax efter kollisionen

C(2p): Beräkna hur lång partiklarna förflyttar sig innan de stannar.

Lösning:

Farten hos partikel A fås ur energiprincipen. $U = K$

Partikel A har potentiell energi $U = m_A gh$ innan den börjar glida nerför lutningen. När den når den plana delen av banan har hela den potentiella energin övergått till kinetisk energi $K = \frac{1}{2}m_A v^2$. Farten hos partikel A strax före kollisionen fås ur:

$$m_A gh = \frac{1}{2}m_A v^2 \Rightarrow v = (2gh)^{1/2} = \underline{3.1 \text{ m/s}}$$

Fullständigt elastisk kollision innebär att partikel A och partikel B sitter ihop och har samma hastighet. Från lagen om rörelsemängdens bevarande fås, u , hastigheten för partikel A och B:

$$m_A v = (m_A + m_B)u \Rightarrow u = m_A v / (m_A + m_B) = \underline{1.25 \text{ m/s}}$$

Från arbete energi teoremet fås det arbetet som friktionskraften, f , utför för att stoppa partiklarna under inbromsningssträckan s :

Arbete-energi teoremet: $W = \Delta K$

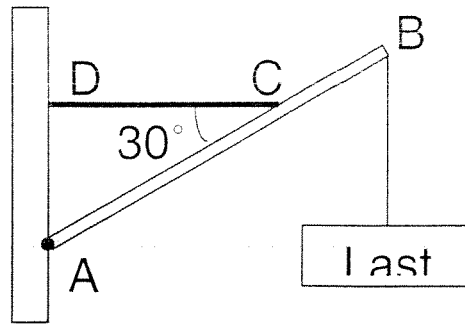
$$W = -fs = -(m_A + m_B)g\mu_k s$$

$$\Delta K = K - K_0 = 0 - \frac{1}{2}(m_A + m_B)u^2$$

$$s = \frac{1}{2}(m_A + m_B)u^2 / ((m_A + m_B)g\mu_k) = u^2 / (2g\mu_k) = \underline{3.9 \text{ m}}$$

Uppgift 3:

A(2p): En $L = 2$ m lång stang med massan $m = 10$ kg är upphängt enligt figuren. Stangen används för att hissa upp laster. Stålkabeln som är fäst mellan punkterna C och D klarar en maximal dragkraft på $F = 5000$ N. Beräkna den maximala vikten M som punkt B får lastas med. Sträckan AC är 1.5 m.



B(2p): Beräkna kraften F_A som påverkar stängen i led A vid maximal last.

Lösning:

Vi har statisk jämvikt så om vi väljer A som momentpunkt, blir den totala vridmomentet som verkar på stängen lika med noll.

$$\Sigma \tau = MgL \cos 30^\circ + mg(L/2) \cos 30^\circ - F(AC) \sin 30^\circ = 0$$

$$m = 10 \text{ kg}, AC = 1.5 \text{ m}, L = 2 \text{ m} \text{ och } F = 5000 \text{ N}$$
$$M = \underline{215 \text{ kg}}$$

Jämvikt villkor ger:

X-led:

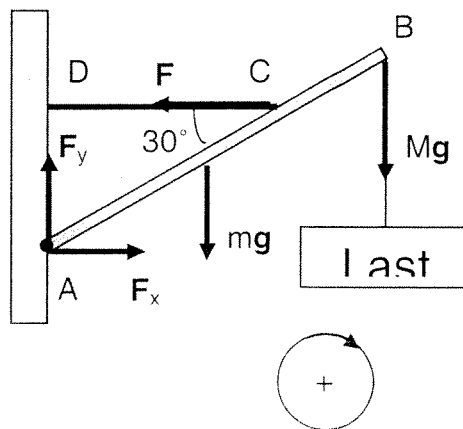
$$F_x - F = 0$$
$$F_x = F = 5000 \text{ N}$$

y-led:

$$F_y - mg - Mg = 0$$
$$F_y = (m+M)g = 2210 \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_A = 5000\mathbf{i} + 2210\mathbf{j} \text{ N}$$

$$F_A = (5000^2 + 2210^2)^{1/2} = \underline{5466 \text{ N}}$$



Uppgift 4:

- A(2p) En bil med massan $m = 1500$ kg kör i en kurva med radien $R = 20$ m. Vägen har friktionskoefficienten $\mu_s = 0.2$. Beräkna den maximala hastigheten som bilen bör ha för att den inte ska sladda
- B(2p) En berg och dalbanevagn startar sin färd från höjden h och avslutar i ett loop med radien $R = 5$ m. I vagnen sitter en flicka med massan $m = 30$ kg. När vagnen är i sitt högsta läge i loopet blir flickans skenbara vikt 200 N. Beräkna höjden h .

Lösning:

Bilens rörelse i kurvan kan beskrivas som en cirkulär rörelse i en cirkulär bana med radien R . Det som håller bilen kvar på banan är friktionskraften som motsvarar centripetalkraften F :

$$F = mv^2/R,$$

Friktionskraften f ges av:

$$f = mg\mu_k$$

$$F = f \Rightarrow v = (Rg\mu_k)^{1/2} = 6.3 \text{ m/s}$$

Vid högsta punkten i loopet har vagnen och flickan en kinetisk energi som motsvarar ändringen i potentiella energin mellan vagnen starthöjd h och loopets topphöjd $2R$, dvs:

$$K = \frac{1}{2}(m+M)v^2 = \Delta U = (m+M)g(h-2R)$$

Flickans hastighet vid toppen av loopet blir:

$$v = (g(2h-4R))^{1/2}$$

Kraftsumman vid högstaläget i loopet ges av:

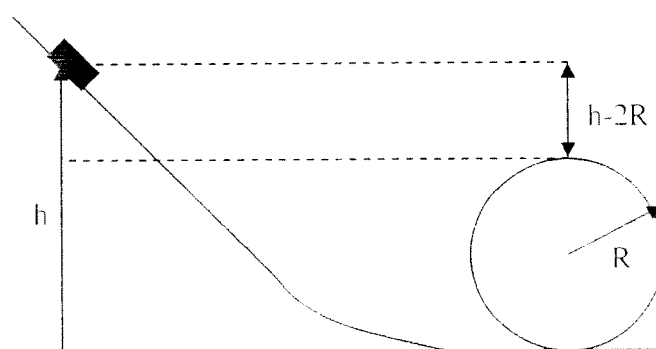
$$N + mg = \text{centripetalkraften} = mv^2/R$$

N är normalkraften från banan mot flickan, dvs samma magnitud som den skenbara vikten.

Detta ger oss:

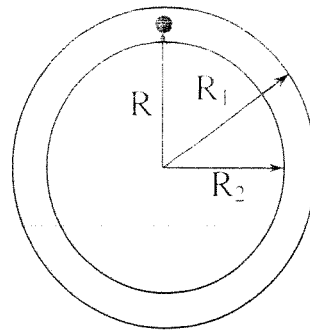
$$N + mg = mg(2h-4R)/R$$

$$h = \frac{1}{2}(R/(mg))(N + mg) + 2R = \underline{14.2 \text{ m}}$$



Uppgift 5:

Ett cykelhjul med massan $M = 2 \text{ kg}$ har formen av en ihålig skiva med ytterdiametern $R_1 = 30 \text{ cm}$ och innerdiametern $R_2 = 26 \text{ cm}$. En bromskloss är placerad på avståndet $R = 28 \text{ cm}$ från hjulets centrum. När bromsen appliceras så verkar den med en kraft $F = 500 \text{ N}$ mot hjulskivan. Friktionskoefficienten mellan skivan och klossen är $\mu_k = 0.01$. När hjulet har en konstant vinkelhastighet $\omega_0 = 31 \text{ rad/s}$, applicerar man bromsen. Tröghetsmomentet för hjulet ges av $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$



A(2p): Beräkna vinkelaccelerationen.

B(1p): Beräkna tiden det tar för hjulet att stanna.

C(1p): Hur lång hinner cykeln åka innan den stannar?

Lösning:

Vinkelaccelerationen, α fås ur sambandet

$\tau = I\alpha$ där τ är vridmomentet som ges av:

$\tau = fR = F\mu_k R = 1.4 \text{ Nm}$, f är friktionskraften längs hjulskivan.

$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) = 0.1576 \text{ kgm}^2$

$\alpha = \tau/I = 1.4/0.1576 = \underline{8.88 \text{ rad/s}^2}$

Tiden det tar för hjulet att stanna fås ur rörelseekvationen $\omega = \omega_0 + \alpha t$, där $\omega = 0$ och $\alpha = -8.88 \text{ rad/s}^2$ (negativt = inbromsning)

$t = \omega_0/\alpha = \underline{3.5 \text{ s}}$

från rörelse ekvationen $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ och för $\theta_0 = 0$, $\omega_0 = 31 \text{ rad/s}$, $\alpha = -8.88 \text{ rad/s}^2$ och $t = 3.5 \text{ s}$ fås $\theta = 54.11 \text{ rad}$

Antal varv som hjulet gör innan den stannar är $n = \theta/2\pi = 8.6$ varv

Hjulets omkrets $C = 2\pi R_1 = 1.88 \text{ m}$

Sträckan som cykeln åker innan den stannar är $S = nC = \underline{16 \text{ m}}$

Uppgift 6:

Du har till uppgift att konstruera en fysikalisk pendel som ska ha en periodtid $T=1$ s. Allt du får är en likformig stav med längden $L = 20$ cm och massan $m = 200$ g. Tröghetsmomentet för staven är $I = (1/12)ML^2$

A(2p): Beräkna hur långt från stavens masscentrum rotationsaxeln bör placeras för att uppnå 1 s periodtid?

B(2p): Beräkna den maximala masscentrumhastigheten på staven om vinkeln mellan stavens vändlägen är $\theta = 40^\circ$.

Lösning:

För fysikalisk pendel gäller:

$$T = 2\pi(l/mgd)^{1/2} \Rightarrow d = 4\pi^2 l / (mgT^2)$$

Tröghetsmomentet för staven kring en rotationsaxel som ligger d från masscentrum ges av parallellaxel teoremet:

$$I = md^2 + I_{cm} = md^2 + (1/12)mL^2 \quad (i)$$

$$d = 4\pi^2(md^2 + (1/12)mL^2)/(mgT^2) \Rightarrow (4\pi^2/g)d^2 - d + (\pi^2 L^2)/(3g) = 0$$

$$4d^2 - d + 0.0134 = 0 \Rightarrow d = 0,014 \text{ m och } d = 0.23 \text{ m}$$

0.23 m ligger utanför staven så vi väljer $d = 0,014 \text{ m}$

Vinkeln mellan vertikalen och pendeln vändläge är $\alpha = \theta/2 = 20^\circ$

Vid vänd läget har pendeln endast potentiell energi $U = mgh$, där h är höjd skillnaden mellan pendelns masscentrumläge vid vändläge och pendelns masscentrumläge när den är vertikal dvs när den har maximal hastighet.

$$h = d - d\cos\alpha \Rightarrow U = mgd(1 - \cos\alpha) = 1.66 \text{ mJ}$$

Pendeln har en kinetisk energi $K = \frac{1}{2}I\omega^2$

Från energiprincipen $U = K$, fås ω :

$$\omega = (2U/I)^{1/2}$$

För $d = 0,014 \text{ m}$ fås I från (i):

$$I = 7.07 \text{E-4 kgm}^2 \Rightarrow \omega = 2.166 \text{ rad/s} \Rightarrow v = \omega d = \underline{0.031 \text{ m/s}}$$

