

Lösningar

Tentamensskrivning i Mekanik för FYSIK1100 och MMT - linjen vid Södertörns Högskola.

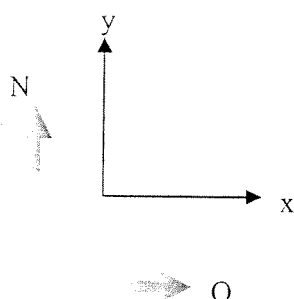
Tisdagen den 3 januari 2006 i FD5

kl 9:00-15:00

Uppgift 1:

Två bilar krockar i en korsning och sitter ihop efter kollisionen. Före kollisionen åker Annas Alfa med massan 900 kg österut med farten 120 km/h. Birger åker norrut i 90.0 km/h i sin Bentley som har massan 2 100 kg.

A(2p): I vilken riktning rör sig de sammanhängande bilvraken efter kollisionen? (Ange t ex. vinkeln i förhållande till öst.



Vi väljer ett koordinatsystem med x mot ost och y mot nord som visad.

Rörelsemängdens bevarande ger att

$$\vec{p}_{\text{efter}} = \vec{p}_A + \vec{p}_B = (m_A v_A, 0) + (0, m_B v_B) = (m_A v_A, m_B v_B)$$

Vinkeln i förhållande till x -axlen ges av:

$$\tan \theta = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = 1.75 \Leftrightarrow \theta = 60.3^\circ$$

B(1p): Vad är bilvrakens gemensamma fart?

Farten är beloppet av hastighetsvektorn:

$$v_{\text{efter}} = \frac{|\vec{p}_{\text{efter}}|}{m_A + m_B} = \frac{\sqrt{(m_A v_A)^2 + (m_B v_B)^2}}{m_A + m_B} = 20.2 \text{ m/s}$$

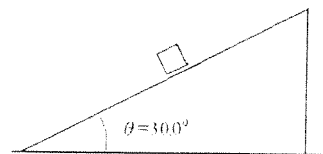
C(1p): Hur mycket mekanisk energi har omformats till andra energiformer vid kollisionen?

Förlusten av kinetisk energi är (kom ihåg SI-enheter för hastigheten)

$$\begin{aligned} -\Delta K &= K_{\text{före}} - K_{\text{efter}} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 - \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_{\text{efter}}^2 \\ &= 500,0 \text{ kJ} + 656,3 \text{ kJ} - 609,4 \text{ kJ} = 547 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Uppgift 2:

A(2p): En kloss glider ned för ett lutande plan (lutning 30.0°) som visad i figuren. Klossen starter från vila och när den har rört sig stycket 60.0 cm har den farten $v=1.86 \text{ m/s}$. Vad är den kinetiska friktionskoefficienten mellan klossen och underlaget?



Arbete-Energi teoremet ger: $K = W_G + W_f$

$$s = 60.0 \text{ cm}, v = 1.86 \text{ m/s}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$W_G = mgs \sin \theta$$

$$W_f = -sf_k = -s\mu_k N = -s\mu_k mg \cos \theta$$

Arbete-Energi teoremet ger alltså följande

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs \sin \theta - s\mu_k mg \cos \theta = mgs(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2}{2gs} = \sin \theta - \mu_k \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \mu_k \cos \theta = \sin \theta - \frac{v^2}{2gs}$$

$$\Leftrightarrow \mu_k = \tan \theta - \frac{v^2}{2gs \cos \theta} = 0,238 \approx 0,24$$

B(2p): En skiva på en skivspelare roterar med 33 varv per minut. På avståndet 15 cm från mitten av skivan ligger ett mynt. Vad är det minsta möjliga värdet för den statiska friktionskoefficienten mellan skiva och mynt för att detta ska vara möjligt?

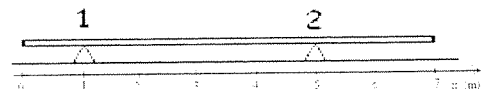
Centripetalkraften är här den statiska friktionskraften och är då mindre än eller lika med det maximalt möjliga värdet för den statiska friktionen

$$m \frac{v^2}{R} \leq \mu_s mg$$

$$\Leftrightarrow \mu_s \geq \frac{v^2}{gR} = \frac{R}{g} \omega^2 = \frac{R}{g} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{R}{g} \left(2\pi \frac{33}{60s} \right)^2 = 0,182 \approx 0,18$$

Uppgift 3:

En plankan med massan 75.0 kg och längden 7.00 m vilar på två stöd 1.00 m från ena ändan och 2.00 m från andra ändan som visad i figuren.



A(2p): Beräkna normalkrafterna från stöden N_1 och N_2 .

Eftersom plankan är i vila och förblir så vet vi dels att summan av alla krafter är noll och dels att summan av alla vridmoment kring varje punkt är noll. Vi betraktar vridmomenten kring stödpunkterna 1 och 2. Moturs vridmoment räknas positiva.

Vridmoment kring 1:

$$0 = N_2 \cdot 4.00m - 75.0kg \cdot g \cdot 2.50m \Leftrightarrow N_2 = \frac{2.50}{4.00} 75.0kg \cdot g = 460N$$

Vridmoment kring 2:

$$0 = 75.0kg \cdot g \cdot 1.50m - N_1 \cdot 4.00m \Leftrightarrow N_1 = \frac{1.50}{4.00} 75.0kg \cdot g = 276N$$

Det är alltid klokt att testa att resultatet kan stämma. Här kan vi utnyttja att summan av beloppen av N_1 och N_2 måste vara lika med tyngden på plankan. $75.0kg \cdot g = 736,5 N$. Det stämmer.

En homogen stång med längden 2.00 m och massan 12.0 kg kan rotera fritt kring en axel vid ena ändpunkten. Stången hänger vågrätt idet andra ändan hålls uppe av ett snöre med försumbar massa som visad i figuren.

B(2p): Vad blir spännkraften i snöret?

Vridmoment kring axeln: (positivt värde = moturs)

$$0 = T \cdot 2.00m \sin 45^\circ - 12.0kg \cdot g \cdot 1.00m \Leftrightarrow T = \frac{1.00m}{2.00m \sin 45^\circ} 12.0kg \cdot g = 83.3N$$

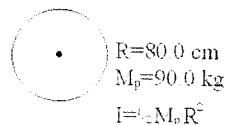
Uppgift 4:

A(2p): En pendel som består av ett snöre med försumbar massa och ett lod med $m=60.0$ g utför 400 svängningar på 514 s. Vad är snörets längd?

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Leftrightarrow l = \frac{g}{\omega^2} = g \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 = g \left(\frac{514s/400}{2\pi} \right)^2 = 41.1cm$$

Uppgift 5:

$\vec{v}$
 $M_f = 35.0kg$
 $v = 5.95 m/s$



En flicka, som vi vill betrakta som punktformig, springer mot och hoppar upp på en plattform som visad i figuren. Plattformen står stilla innan flickan hoppar på men kan rotera friktionsfritt kring en lodrätt central axel.

A(2p): Använd de värden som ges i figuren och beräkna vinkelhastigheten ω för flickan och plattformen efter hon hoppar på.

Totala rörelsemängdsmomentet kring skivans axel är oförändrat:

$$M_f v R = I \omega + M_f R^2 \omega = \left(\frac{1}{2} M_p + M_f \right) R^2 \omega$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{v}{R} \frac{M_f}{\frac{1}{2} M_p + M_f} = 3.25 s^{-1}$$

Flickan går in och ställer sig precis mitt på plattformen.

B(2p): Beräkna arbetet hon utför för att ta sig från kanten och in till centrum.

Totala rörelsemängdsmomentet kring skivans axel är oförändrat:

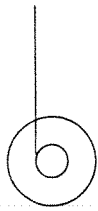
$$M_f v R = I \omega_{\text{slut}} = \frac{1}{2} M_p R^2 \omega_{\text{slut}}$$

$$\Leftrightarrow \omega_{\text{slut}} = \frac{v}{R} \frac{2 M_f}{M_p} = 5.78 s^{-1}$$

Enligt arbete-energi-teoremet har hon utfört ett arbete som är lika stort som ökningen av den totala kinetiska energin

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} I \omega_{\text{slut}}^2 - \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} M_f R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{1}{2} M_p \omega_{\text{slut}}^2 - \left(\frac{1}{2} M_p + M_f \right) \omega^2 \right) = 211 J$$

Uppgift 6:



Figuren till vänster föreställer en jojo. Radien av axeln kring vilken snöret är lindad är $r=1.25$ cm. Radien av hela jojon är $R=3.43$ cm. Tröghetsmomentet av jojon är något mindre än för en hel cylinder med samma radie och ges av $I=0.462 mR^2$, där m är massan av jojon. Snörets massa kan försummas. Snöret hålls fast medan jojon faller.

A(2p): Vad blir jojons acceleration?

Vi räknar accelerationen positiv nedåt och vinkelacceleration positiv medurs.

Vi använder Newtons 2 lag för linjär rörelse ('vanlig acceleration'), Newtons andra lag för rotation samt sambandet $a=r\alpha$:

$ma = mg - T$ och $I\alpha = Tr \Leftrightarrow \frac{Ia}{r} = T$ dessa samband kombineras till:

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)a = mg \Leftrightarrow a = \frac{mg}{\left(m + \frac{0.462mR^2}{r^2}\right)} = \frac{g}{\left(1 + 0.462(R/r)^2\right)} = 2.1926 \text{ m/s}^2 \approx 2.19 \text{ m/s}^2$$

Det visar sig att spännkraften i snöret blir 0.84 N

B(2p): Vad är då jojons massa m ?

$$ma = mg - T \Leftrightarrow T = m(g - a) \Leftrightarrow m = \frac{T}{(g - a)} = 0.11 \text{ kg}$$

Uppgift 7:

A(2p): En kvinna med massa $m=63.0$ kg står på en badrumsvåg inne i en hiss som accelererar uppåt med $a=2.35 \text{ m/s}^2$. Vilken massa visar vågen?

Newtons 2 lag ger normalkraften som vågen påverkar kvinnan med:

$$ma = N - mg \Leftrightarrow N = mg + ma = m(g + a)$$

Enligt Newtons 3 lag påverkas vågen med en lika stor kraft och visar då den felaktiga massan:

$$m_{acc} = N / g = m \frac{g + a}{g} = 78.1 \text{ kg}$$