

# Föreläsning 1

## Vektorer (Kapitel 2)

- Definition
- Addition
- Subtraktion
- Enhetsvektorer
- Skalärprodukt
- Vektorprodukt

## Kinematik i en dimension ( Kapitel 3)

- Förflyttning
- Hastighet
- Acceleration

En **vektor** har både en **storlek** och en **riktning**.

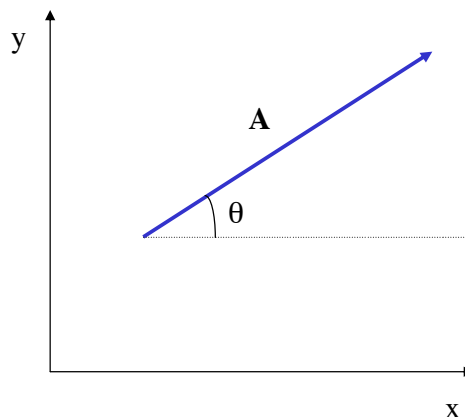
Betecknas **A** och ritas som en pil.

Storleken av en vektor skrivs som  $A$  eller  $|A|$ .

Hastighet, acceleration och kraft är exempel på vektorer.

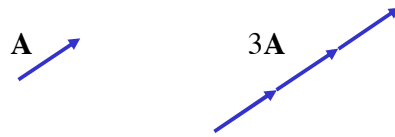
En **skalär** har en storlek men inte en riktning.

Massa och temperatur är skalärer.



## Multiplikation av tal/skalär med vektor

Vid multiplikation av ett positivt tal (ej 1) med en vektor ändras vektorns storlek men inte dess riktning.

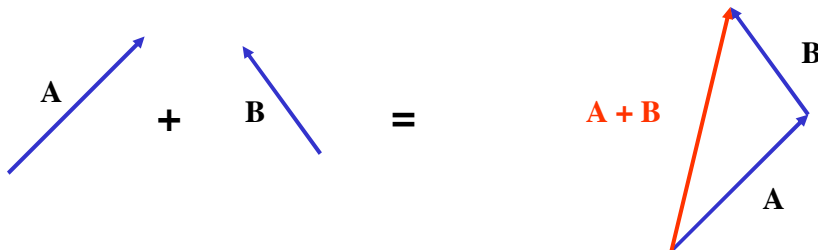


Vid multiplikation av ett negativt tal med en vektor, ändras både vektorns storlek och riktning.

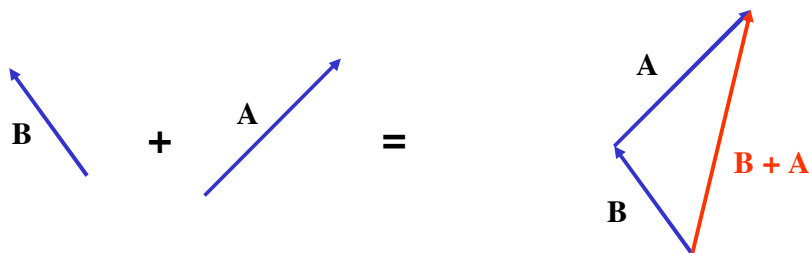


## Vektoraddition

Summan av två vektorer **A** och **B** kan illustreras så här:



Vi adderar **B + A** istället för **A + B**:



Resultatet blir samma vektor.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{Kommutativa lagen})$$

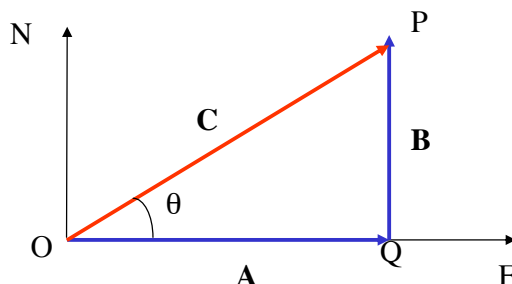
### Exempel

En bil startar från punkt O och kör 40 km mot öst till punkt Q. Plötsligt svänger bilen norrut och stannar efter 30 km vid punkt P. Hur stor är bilens förflyttning? (förväxla ej med körsträcka). Ange också riktningen  $\theta$ .

**A** = förflytningsvektorn mot öst (O till Q) med storleken 40 km

**B** = förflytningsvektorn mot norr (Q till P) med storleken 30 km

**C** = bilens förflyttningsvektor (O till P)



$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Men hur stort är beloppet av **C**? Är det summan av beloppen av vektorerna **A** och **B**?

Är  $C = A + B = 40 + 30$  km?

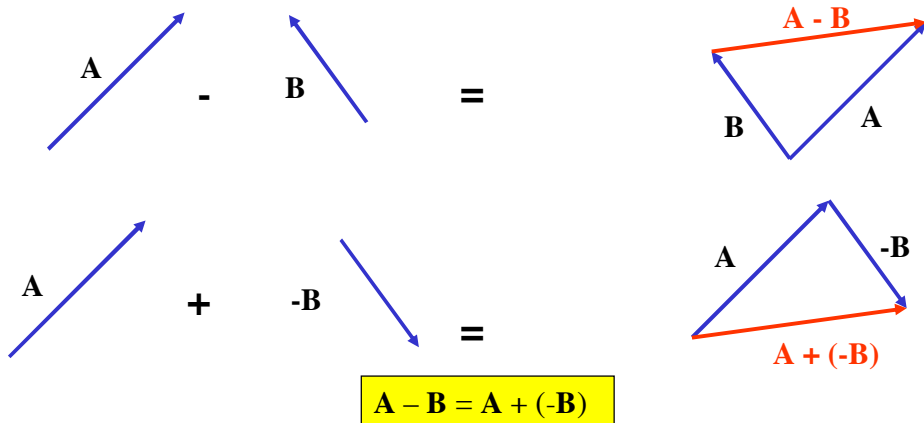
Svaret är nej.

Beloppet är  $C = (A^2 + B^2)^{1/2} = (1600 + 900)^{1/2} = 50$  km och  $\theta = \arctan(30/40) \approx 36,7^\circ$

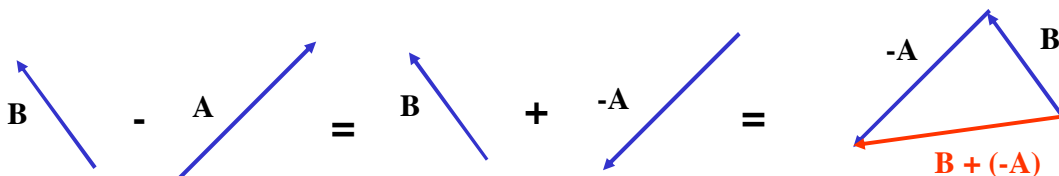
Beloppet av summan av två vektorer är inte lika med summan av vektorernas belopp:

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq A + B$$

### Vektorsubtraktion

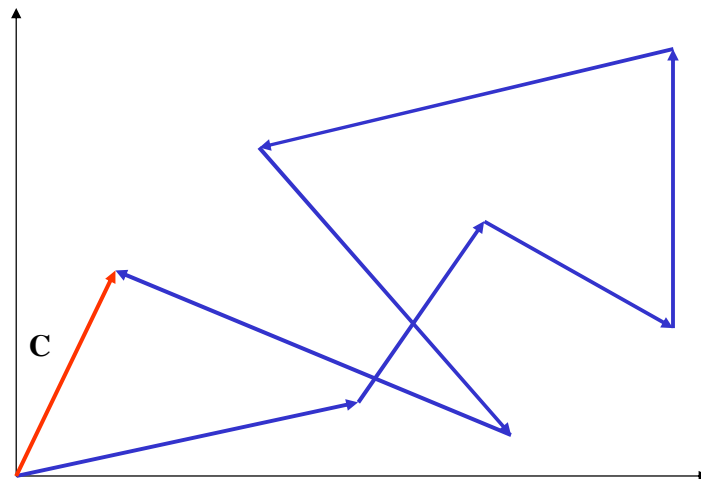


Vad blir  $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ ?



OBS!: vektorns **riktning** ändras.

Låt oss anta att bilisten i föregående exempel kört vilse och rör sig på ett sätt som redovisas nedan.

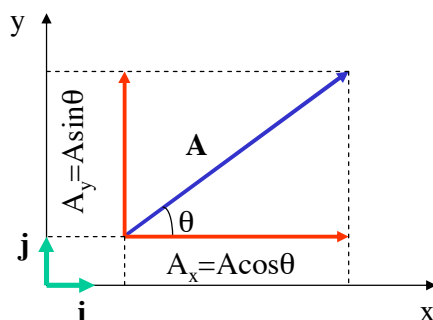


Antag att vi känner till storleken och riktningen på alla förflyttningsvektorer. Kan vi då bestämma förflyttningsvektorn **C**?

Svaret är ja, men det finns ett enklare sätt.

## Enhetsvektorer

Betrakta vektorn **A** med beloppet  $A$  och riktningen  $\theta$  i ett x-y - system.



Vi delar upp **A** i två komponenter:

$$A_x = A \cos \theta$$

$$A_y = A \sin \theta$$

Beloppet av **A** är

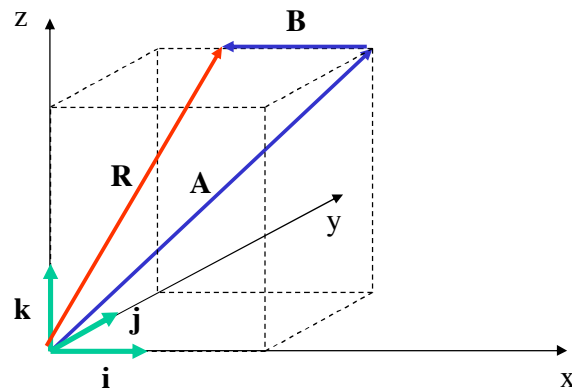
$$A = (A_x^2 + A_y^2)^{1/2}$$

**Enhetsvektorerna **i** och **j**** är riktade längs x- resp. y-axeln. Båda vektorerna har beloppet  $i = j = 1$ .

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} \text{ med storleken } A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \text{ och riktningen } \theta = \arctan(A_y/A_x)$$

### 3-dimensionella vektorer

Vi inför en tredje enhetsvektor  $\mathbf{k}$  som pekar i z riktningen i xyz-systemet.



Vektor  $\mathbf{A}$  i 3 dimensioner ges av

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \text{ och har beloppet } A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}.$$

På samma sätt blir summan av två vektorer  $\mathbf{A}$  och  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} + B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} = (A_x + B_x) \mathbf{i} + (A_y + B_y) \mathbf{j} + (A_z + B_z) \mathbf{k} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} = \mathbf{R}$$

### Skalärprodukten

Skalärprodukten av vektorerna  $\mathbf{A}$  och  $\mathbf{B}$  definieras som

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$$

där  $\theta$  är vinkeln mellan vektorerna  $\mathbf{A}$  och  $\mathbf{B}$ . Skalärprodukten är oberoende av ordningsföljden av vektorerna, dvs.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

För skalärprodukten av enhetsvektorerna gäller följande:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Skalärprodukten är distributiv:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

Skalärprodukten av två vektorer uttryckt med enhetsvektorer och komponenter ges av

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

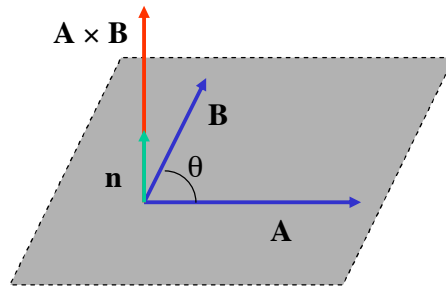
Skalärprodukten av en vektor med sig själv:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$$

Slutligen är skalärprodukten av en vektor och en enhetsvektor

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A_x, \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = A_y, \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = A_z$$

## Vektorprodukten (Kryssprodukten)



**Vektorprodukten** av vektorerna **A** och **B** definieras som

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \mathbf{n}$$

där **n** är enhetsvektorn längs normalen vinkelrät mot planet som **A** och **B** spänner upp.

Vektorprodukten är icke-kommutativ:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

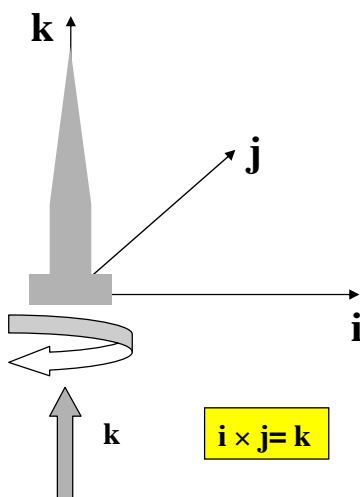
Vektorprodukten är distributiv :

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

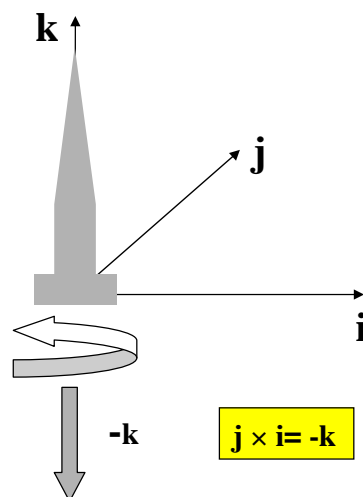
## Vektorprodukten av enhetsvektorerna

Först placerar vi en hörgängad skruv på **ij** - planet med spetsen pekande längs **k**.

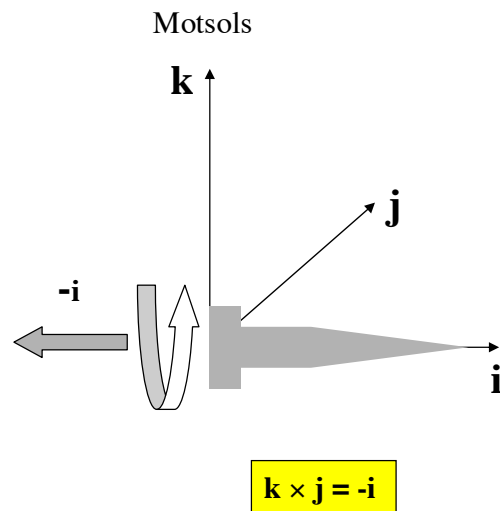
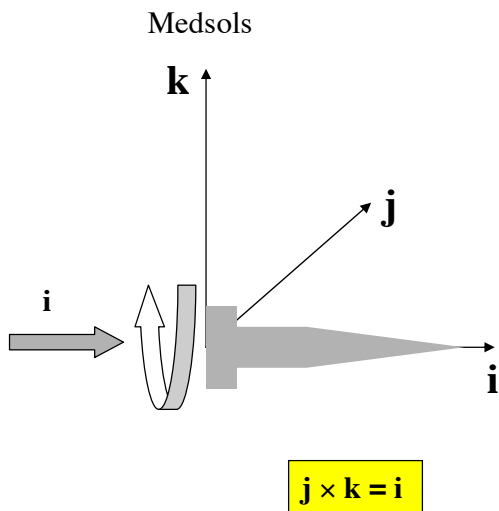
Medsols



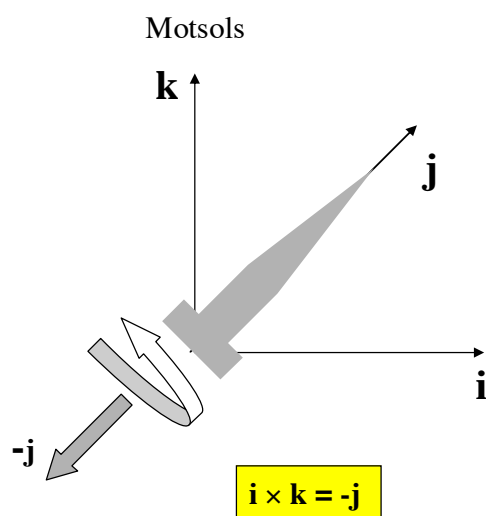
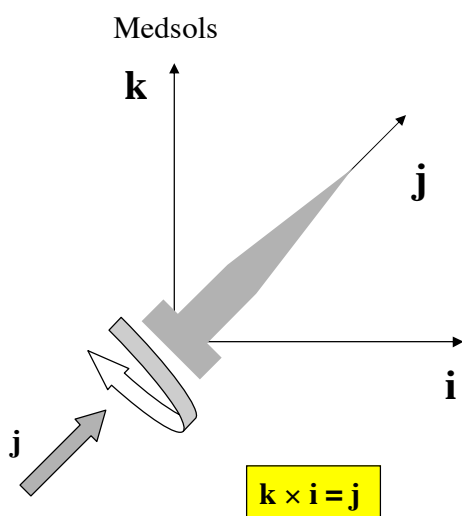
Motsols



Vi placerar skruven på **kj** - planet med spetsen pekande längs **i**.



Vi placerar skruven på **ki** - planet med spetsen pekande längs **j**.



$\mathbf{A}$  och  $\mathbf{B}$  är parallella vektorer.  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB\sin\theta\mathbf{n} = 0\mathbf{n}$  eftersom  $\theta = 0^\circ$ .

Resultatet från vektorprodukterna av enhetsvektorerna sammanfattas nedan.

|                                              |                                              |                                              |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$           | $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$           | $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$           |
| $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$  | $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ | $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$  |
| $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ | $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$  | $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ |

Vektorprodukten av två vektorer uttryckt med enhetsvektorer och komponenter ges av:

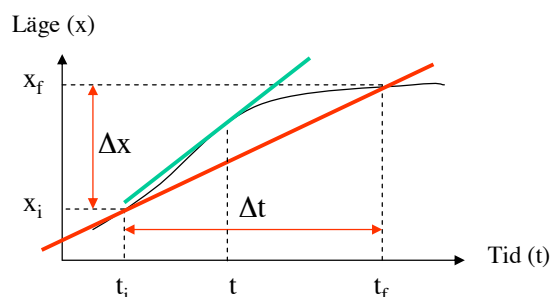
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) = (A_xB_y\mathbf{k} - A_xB_z\mathbf{j}) + (-A_yB_x\mathbf{k} + A_yB_z\mathbf{i}) + (A_zB_x\mathbf{j} - A_zB_y\mathbf{i}) = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k} = C_x\mathbf{i} + C_y\mathbf{j} + C_z\mathbf{k}$$

Komponenterna för  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{aligned} C_x &= A_yB_z - A_zB_y \\ C_y &= A_zB_x - A_xB_z \\ C_z &= A_xB_y - A_yB_x \end{aligned}$$

## Förflyttning och hastighet

Om ett föremål rör sig längs en bana (endimensionell) så kan man beskriva dess förflyttning med hjälp av en funktion  $x(t)$ , där  $x$  är föremålets position vid tiden  $t$ .



Föremålet befinner sig i position  $x_i$  vid tiden  $t_i$  samt i position  $x_f$  vid tiden  $t_f$ .

**Förflyttningen** under tidsintervallet  $\Delta t = t_f - t_i$  är  $\Delta x = x_f - x_i$ .

$$\text{Medelhastighet } v_{av} = \Delta x / \Delta t$$

Den **momentana** hastigheten  $v(t)$ , dvs. föremålets hastighet vid tidpunkten  $t$  ges av uttrycket  $v(t) = \lim(\Delta t \rightarrow 0) \Delta x / \Delta t$  som är lika med derivatan av läget för  $x$  med avseende på tiden  $t$ , dvs.

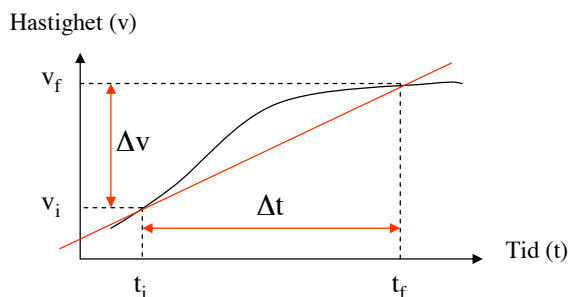
$$\text{Momentanhastighet } v(t) = dx/dt$$

## Acceleration

**Acceleration** definieras som ändringen av hastigheten per tidsenhet.

Medelaccelerationen  $a_{av}$  är ändringen av föremålets hastighet  $\Delta v = v_f - v_i$  under tidsintervallet  $\Delta t = t_f - t_i$ .

$$\text{Medelacceleration } a_{av} = \Delta v / \Delta t$$



Föremålets acceleration vid en given tidpunkt, dvs. den momentana accelerationen  $a(t)$  ges av:  $a(t) = \lim(\Delta t \rightarrow 0) \Delta v / \Delta t$ .

Alltså derivatan av hastigheten  $v$  med avseende på tiden  $t$ .

$$\text{Momentanacceleration } a(t) = dv/dt$$

## Rörelseekvationer vid konstant acceleration

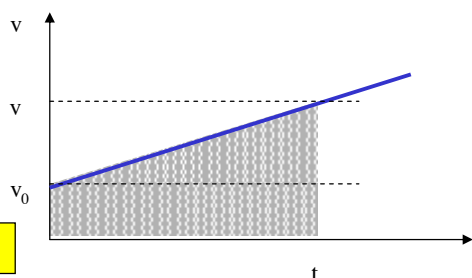
Vid konstant acceleration är medelaccelerationen = momentanaccelerationen

$v_0$  är hastigheten vid tiden  $t = 0$ .

$v$  är hastigheten vid tiden  $t$ .

Definition:  $a = (v - v_0)/(t - 0)$  ger

$$v = v_0 + at$$



Förflyttningen  $\Delta x = x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)t$  ger

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$$

Ersätter vi  $v$  med  $v_0 + at$  fås:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Slutligen genom att ersätta  $t$  med  $(v - v_0)/a$  och lite omflyttning fås den fjärde och sista rörelseekvationen:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

## Fritt fall

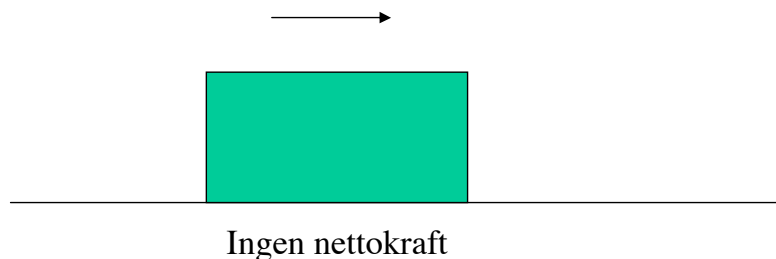
I avsaknad av luftmotstånd faller alla kroppar med samma hastighet oberoende av vikt och form. Fritt fall är ett exempel på likformig acceleration, där accelerationen är tyngdaccelerationen  $g = 9,82 \text{ m/s}^2$ .

# Föreläsning 2

## Kinematik i flera dimensioner ( Kapitel 4)

- Newtons första lag
- 2- och 3-dimensionell rörelse
- Projektilrörelse
- Likformig cirkulär rörelse
- Tröghetssystem
- Relativ hastighet
- Galileitransformationen
- Icke likformig cirkulär rörelse

### Newton's första lag (Tröghetslagen)



#### Newton's första lag:

Varje kropp förblir i vila eller rätlinjig likformig rörelse om den inte genom inverkan av krafter tvingas ändra sitt rörelsetillstånd.

Trögheten hos en kropp är dess förmåga att göra motstånd mot förändringar av dess rörelse.

## 2- och 3-dimensionell rörelse

Vi börjar med att definiera lägesvektorn  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Förflyttningsvektorn  $\Delta\mathbf{r}$  från läge  $\mathbf{r}_1$  till  $\mathbf{r}_2$  kan uttryckas på följande sätt:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}$$

Medelhastigheten  $\mathbf{v}_{av}$  under tidsintervallen  $\Delta t$ :

$$\mathbf{v}_{av} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t = (\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k})/\Delta t = (\Delta x/\Delta t)\mathbf{i} + (\Delta y/\Delta t)\mathbf{j} + (\Delta z/\Delta t)\mathbf{k} = v_{ax}\mathbf{i} + v_{ay}\mathbf{j} + v_{az}\mathbf{k}$$

Momentanhastigheten  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v} = \lim(\Delta t \rightarrow 0) \Delta\mathbf{r}/\Delta t = d\mathbf{r}/dt = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

Momentanaccelerationen  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d/dt(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}) = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

## Rörelseekvationer vid konstant acceleration

### En dimension

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

### Tre dimensioner

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \quad (1)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0)t \quad (2)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \quad (3)$$

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}_0^2 + 2\mathbf{a}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (4)$$

Om vi delar upp den tredimensionella ekvationen (1) i de olika komponenterna får vi följande:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j} + v_{0z}\mathbf{k} + (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})t = (v_{0x} + a_xt)\mathbf{i} + (v_{0y} + a_yt)\mathbf{j} + (v_{0z} + a_zt)\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

$$v_x = v_{0x} + a_xt,$$

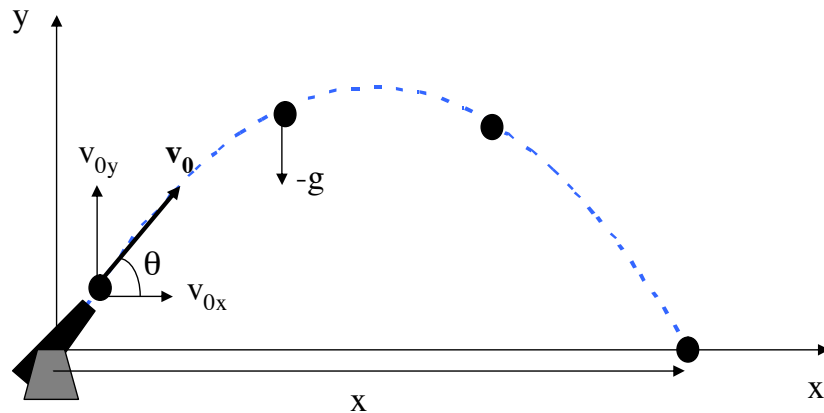
$$v_y = v_{0y} + a_yt$$

$$v_z = v_{0z} + a_zt$$

På samma sätt kan man dela upp ekvationerna 2 - 4 i x-, y- och z- komponenter, vilket gör att man kan behandla varje komponent separat.

# Projektilrörelse

Vi har en kanon, riktad med en vinkel  $\theta$  relativt marken och som skjuter iväg en kula med starthastighet  $v_0$ . Hur ska vi beräkna var kulan träffar marken?



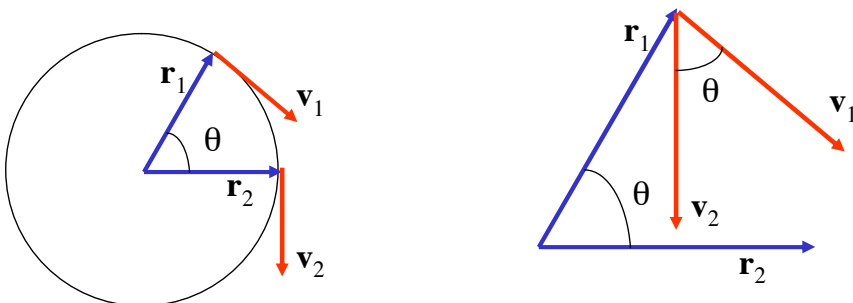
Två av varandra oberoende rörelser (luftmotståndet försummas).

**Horisontell** rörelse:  $v_{0x}$  är konstant (ingen kraft påverkar rörelsen i x - riktningen).

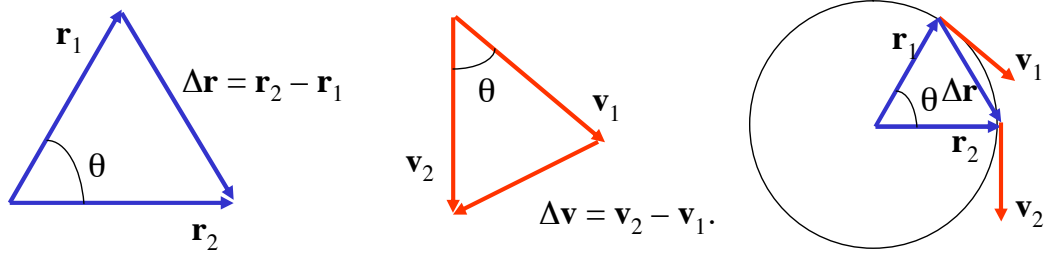
**Vertikal** rörelse: Kulan påverkas av gravitationen.

# Likformig cirkulär rörelse

Ett föremål rör sig med konstant fart i en cirkulär bana. Hastighetsvektorn är riktad tangentiellt och är därför vinkelrät mot cirkelradien. Om föremålet förflyttar sig från läge  $\mathbf{r}_1$  till läge  $\mathbf{r}_2$  med vinkeländringen  $\theta$ , så måste hastighetsvektorerne  $\mathbf{v}_1$  och  $\mathbf{v}_2$  ändras med samma vinkel.



Beloppen  $r_1 = r_2$  samt  $v_1 = v_2 = v$ .



Vi har två likformiga trianglar.

$$\Delta r/r = \Delta v/v \quad \Rightarrow \quad \Delta v = v \cdot \Delta r/r$$

Momentanaccelerationen :  $a_r = \lim(\Delta t \rightarrow 0) v/r \cdot \Delta r/\Delta t = v/r \cdot \lim(\Delta t \rightarrow 0) \Delta r/\Delta t = v^2/r$

$a_r$  kallas **centripetalacceleration** och betecknas  $a_r$  och är riktad mot banans centrum.

$$\mathbf{a}_r = -v^2 \mathbf{e}_r/r$$

## Tröghetssystem (inertialsystem)

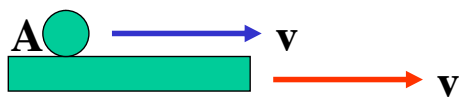
### Fråga

Du sitter i en bil som åker med en konstant hastighet. Bilen bromsar kraftigt och ni åker framåt. Vad är det för kraft som påverkar dig?

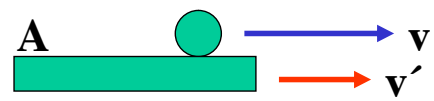
I ett tröghetssystem förblir en kropp i sitt tillstånd (stillastående eller med konstant hastighet) om den inte utsätts för någon kraft.

En kula placerad på ett friktionsfritt underlag rör sig tillsammans med underlaget med en konstant hastighet  $v$ . Om underlaget bromsar kraftigt kommer kulan att fortsätta som om inget har hänt. Observatör A, som befinner på underlaget, observerar att kulan accelererar iväg relativt underlaget medan observatör B som sitter stilla längre bort från båda kulan och underlaget observerar att kulan fortsätter att röra sig med konstant hastighet medan underlagets hastighet minskar.

Observatör B och kulan är två typiska tröghetssystem medan underlaget är ett accelererat system där Newtons första lag inte gäller och alltså inte ett tröghetssystem.



**B**



**B**

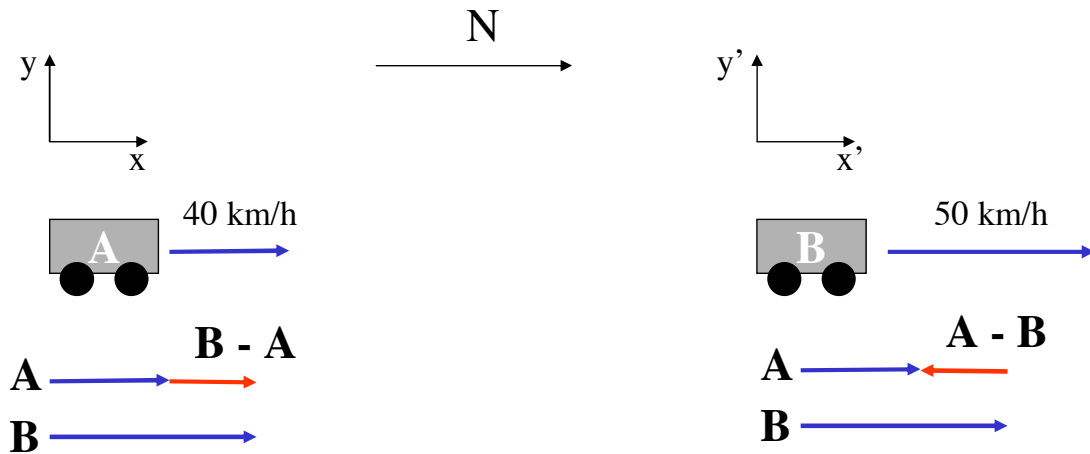
Varje system som rör sig med en konstant hastighet relativt ett givet tröghetssystem är också ett tröghetssystem.

Om accelerationen hos en partikel är noll i ett tröghetssystem, är den också noll i alla andra tröghetssystem.

Men finns det ett sådant system på riktigt?

## Relativ hastighet

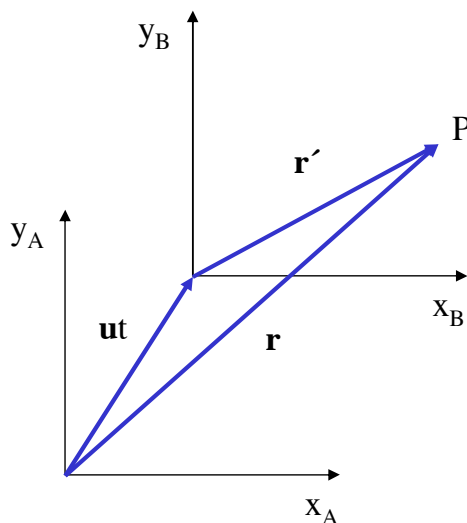
Alla kroppars hastighet måste anges relativt ett referenssystem. Två bilar A och B åker norrut med hastigheten 40 km/h resp. 50 km/h. Observatören i referenssystemet A (bil A) ser att bilen B åker norrut med en hastighet på 10 km/h medan observatören i referenssystem B (bil B) uppfattar att A åker söderut med en hastighet på 10 km/h.



## Galileitransformationen

En partikel P befinner sig i lägesvektorn  $\mathbf{r}$  relativt referenssystemet A. Partikelns läge relativt ett annat referenssystem B, som har den konstanta hastigheten  $\mathbf{u}$  relativt A, är  $\mathbf{r}'$ .

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$$



Om nu P rör sig i förhållande till A och B är hastigheterna

$$d\mathbf{r}'/dt = d/dt(\mathbf{r} - \mathbf{u}t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} \quad \text{Galileitransformationen}$$

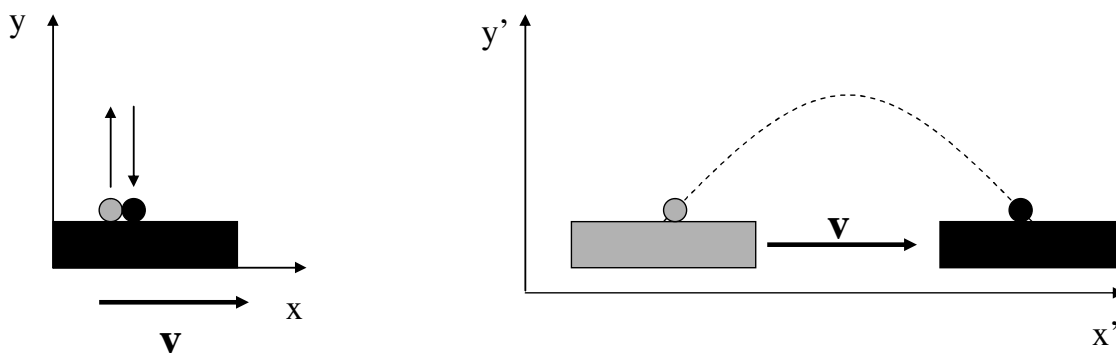
I båda systemen kommer partikeln att ha olika hastighet. A och B konstaterar däremot att hastigheten hos partikeln är konstant. I fallet där partikeln accelererar så får vi

$$\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt = d/dt(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = (\mathbf{u} = \text{konstant}) = \mathbf{a}$$

Observatörer i alla tröghetssystem observerar samma acceleration hos en partikel.

### Exempel

Om du sitter i en bil som åker med konstant hastighet och kastar upp en boll, så kommer bollen att hamna på samma ställe, medan en annan observatör som befinner sig utanför bilen kommer att se en parabelformad rörelse av bollen.

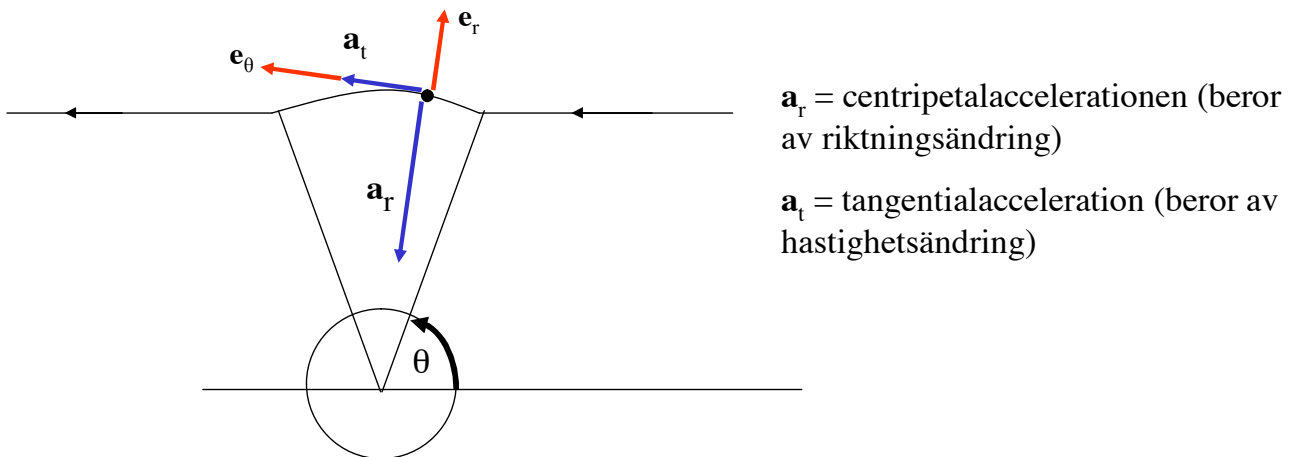


Båda observatörerna kommer att bestämma samma värde på accelerationen (i det här fallet tyngdaccelerationen), dock inte samma hastighet. Vi kan heller inte avgöra vilket av dessa två system som är fixt eller i rörelse.

Mekanikens lagar har samma form i alla tröghetssystem.

## Icke likformig cirkulär rörelse

Allmänt, om en partikel rör sig längs en böjd bana kan både farten och riktningen ändras.



Resultande acceleration  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$

$\mathbf{a}_r$  är alltid vinkelrät mot  $\mathbf{a}_t$  vilket betyder att den resulterande accelerationen  $a = (a_r^2 + a_t^2)^{1/2}$

Om vi introducerar enhetsvektorn  $\mathbf{e}_\theta$  som pekar mot ökande vinkel  $\theta$ :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t = -v^2 \mathbf{e}_r / r + (dv/dt) \mathbf{e}_\theta$$

# Föreläsning 3

## Partikeldynamik I (Kapitel 5)

- Kraft och massa
- Newtons andra lag
- Tyngd
- Newtons tredje lag
- Skenbar tyngd
- Tillämpningar av Newtons lagar

1

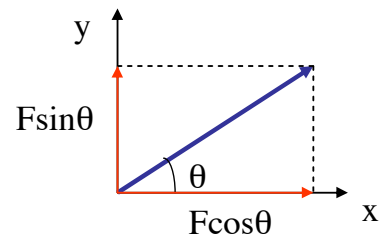
### Kraft och massa

Kraften  $\mathbf{F}$  är en fysikalisk storhet och beskrivs som en vektor med beloppet  $F$  och riktningen  $\theta$ .

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = F \cos \theta \mathbf{i} + F \sin \theta \mathbf{j}$$

Man indelar krafter i två olika typer:

1. Kontaktkrafter (friktion, tryck, dragkraft m.m.)
2. Avståndskrafter ( gravitationskraft, magnetisk kraft, elektrisk kraft m.m.)



Massan  $m$  är en skalär och är ett mått på en kropps förmåga att motstå ändringen av dess hastighet eller hastighetsriktning. En kropps massa är ett mått på dess tröghet.

## Newtons andra lag

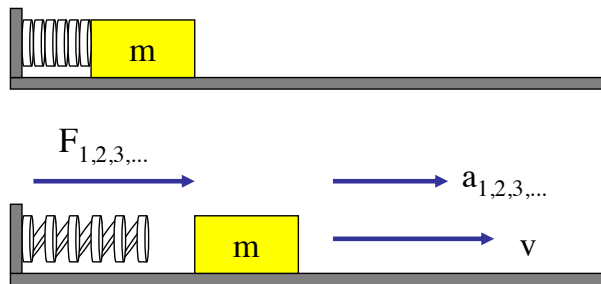
Ett föremål med massan  $m$  är placerat på ett friktionsfritt underlag.

Föremålet skjuts iväg med hjälp av en ihoptryckt fjäder.

Beroende på hur mycket fjädern trycks ihop (olika krafter), får vi olika accelerationer för föremålet.

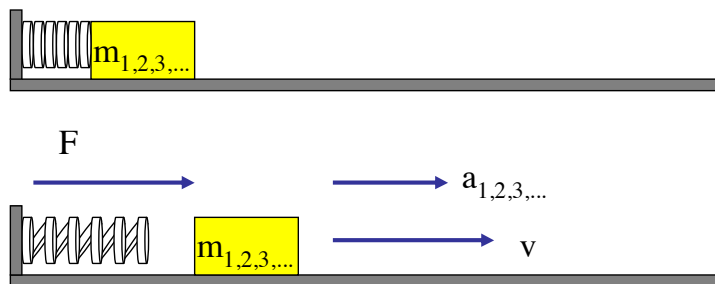
Accelerationen ökar när fjäderkraften ökar och omvänt.

$$F \propto a \quad (i)$$



Om vi gör samma experiment med en konstant fjäderkraft, men med olika massor, fås en omvänd proportionalitet mellan accelerationen  $a$  och massan  $m$ :

$$a \propto 1/m \quad (ii)$$



Från sambanden (i) och (ii) fås sambandet  $a \propto F/m \Rightarrow F = kma$  där  $k$  är en proportionalitetskonstant.

I SI- enheterna är  $k = 1$ .

**Newtons andra lag:**

Den resulterande kraften  $\Sigma F$  som verkar på en kropp är direkt proportionell mot kroppens massa  $m$  och mot kroppens acceleration  $a$  i kraftens riktning.

$$\Sigma F = ma$$

# Tyngd

Tyngden **W** en vektor och är ett mått på gravitationskraftens påverkan.

Två kroppar attraherar varandra ömsesidigt med en kraft **F** som är direkt proportionell mot deras massor  $m$  och  $M$  och omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet  $r$  mellan dem:

Allmänna gravitationslagen:

$$F = GmM/r^2$$

$G$  är gravitationskonstanten  $= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

Tyngden  $W$  av en kropp med massan  $m$  vid jordens yta:

$$W = GmM_j/R_j^2 = mg$$

$$g = GM_j/R_j^2$$

och kallas för **gravitationsfältstyrkan**.

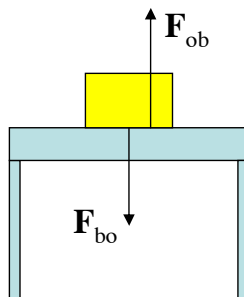
Gravitationsfältstyrkan kallas därför också för tyngdacceleration och är lika med  $9,82 \text{ m/s}^2$ .

## Newtons tredje lag

Newtons tredje lag:

När en kropp A påverkar en kropp B med en kraft, verkar B med en lika stor kraft på A, men i motsatt riktning.

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

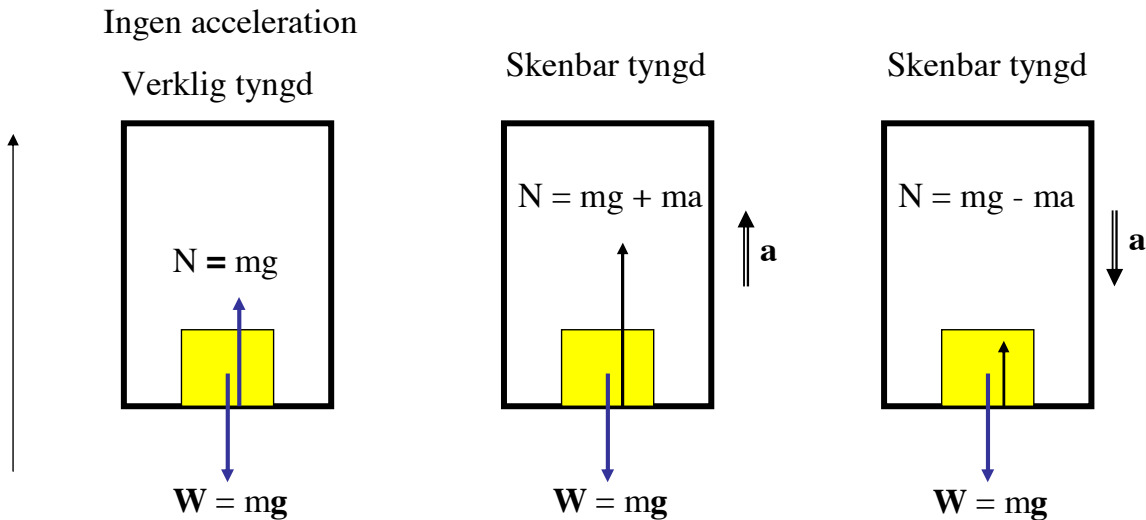


Om ett objekt placeras på ett bord så verkar objektet med en kraft  $\mathbf{F}_{bo}$  mot bordet. Bordet i sin tur verkar med en reaktionskraft  $\mathbf{F}_{ob}$  mot objektet.  $\mathbf{F}_{ob}$  har samma storlek som  $\mathbf{F}_{bo}$  men är motsatt riktad. Denna kraft kallas även för **normalkraften N**.

# Skenbar tyngd

Ett föremål befinner sig på en våg i en hiss. Vågen visar normalkraften som verkar på föremålet.

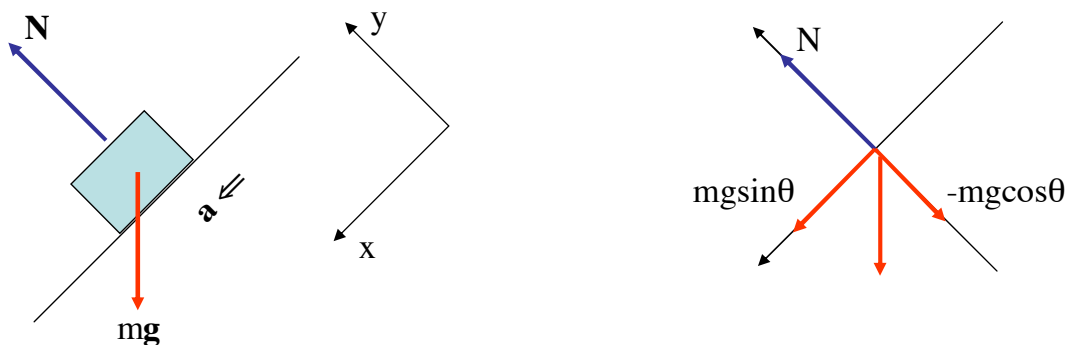
$$\Sigma F = ma$$
$$N - mg = ma$$



## Problemlösningssguide

Identifiera och rita ut alla krafter som verkar på varje kropp separat.

1. Visa accelerationsriktningen. Välj lämpliga koordinatsystem för varje kropp, accelerationen skall peka antingen längs x- eller y- koordinaten.
2. Rita ut koordinatsystemet utan kroppen och rita kraftvektorer.
3. Märk varje komponentvektor med dess storlek.



# Föreläsning 4

## Partikeldynamik II (Kapitel 6)

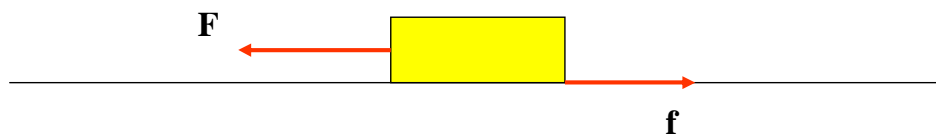
- Friktion
- Cirkulär rörelse
- Satellitbanor

1

### Friktion

Friktion är en kontaktkraft som motverkar den relativa rörelsen mellan två ytor.

En kloss som dras med kraften  $\mathbf{F}$  på ett underlag utsätts för en friktionskraft  $\mathbf{f}$  som är riktad i motsatt riktning.

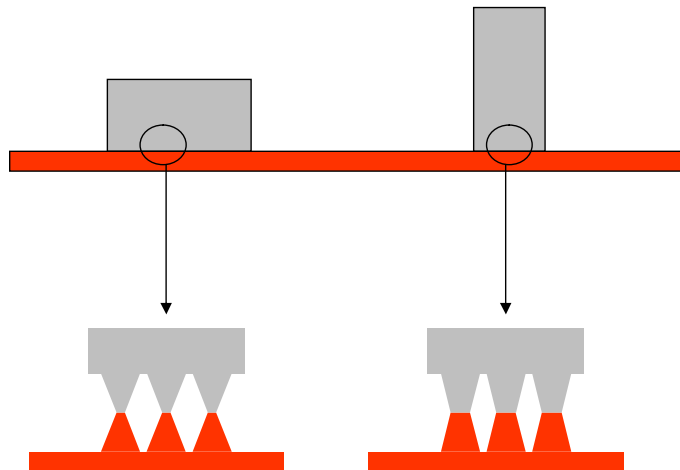


Man har funnit följande egenskaper hos friktionskraften:

1. Friktionskraften är proportionell mot normalkraften.
2. Friktionskraften är oberoende av kontaktytans area.
3. Friktionskraften är (i första approximationen) oberoende av farten.

2

Det finns alltid oregelbundenheter i en yta. Den verkliga kontaktytan mellan två kroppar är därför endast en liten del av den totala ytan. Om klossen nedan placeras på en yta på två olika sätt, kommer den totala ytan att minska, men topparna i fallet med liten yta kommer att utsättas för en större tryckkraft än i fallet med stor yta. Större tryckkraft innebär större kontaktyta och därmed är den totala kontaktytan lika i båda fallen.



3

## Statisk och kinetisk friktion

**Statisk friktion  $f_s$ :**  $F$  är mindre än friktionskraften. Föremålet står stilla.

**Kinetisk friktion  $f_k$ :**  $F$  är större än friktionskraften. Föremålet rör sig.

Övergången mellan statisk friktion och kinetisk friktion sker vid den statiska friktionskraften  $f_{\max}$ , som ges av

$$f_{\max} = \mu_s N$$

där  $\mu_s$  är den **statiska friktionskoefficienten** (dimensionslös) och  $N$  är normalkraften på föremålet.

$$f_s \leq f_{\max}$$

$f_k$  ges av sambandet

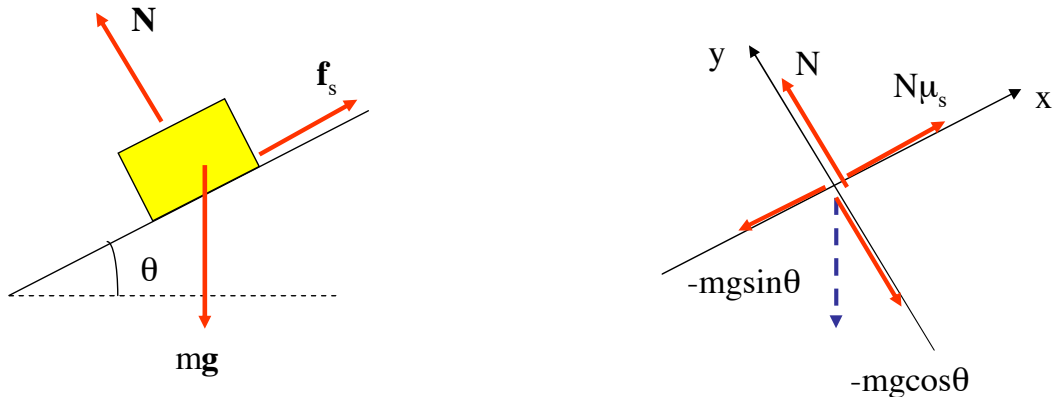
$$f_k = \mu_k N$$

där  $\mu_k$  är den **kinetiska friktionskoefficienten**.

4

## Exempel med statisk friktion

Om vi placerar en kloss på ett lutande plan så kan vi, om vi känner den statiska friktionskoefficienten  $\mu_s$ , bestämma den maximala vinkeln planet kan ha innan klossen börjar röra på sig. Låt  $m$  vara klossens massa och  $\theta$  planets lutning.



Krafterna längs  $y$ -axeln bidrar inte till klossens rörelse. Vi har statisk jämvikt när summan av krafterna längs  $x$ -axeln är lika med noll, dvs.

$$N\mu_s - mgsin\theta = 0$$

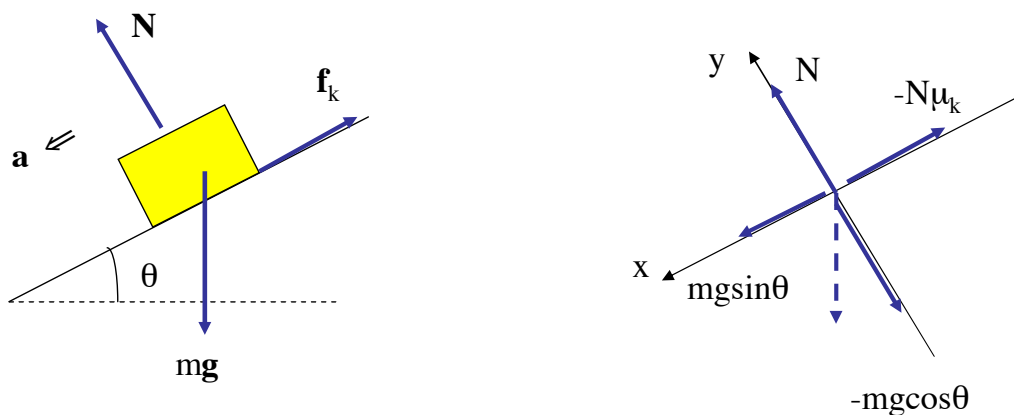
Insättning av  $N = mgcos\theta$  ger  $\mu_s mgcos\theta - mgsin\theta = 0$

$$\mu_s mgcos\theta = mgsin\theta \Rightarrow \sin\theta/cos\theta = \mu_s \Rightarrow \theta = \arctan(\mu_s)$$

5

## Exempel med kinetisk friktion

Samma exempel som i det statiska fallet med skillnaden att klossen glider ner och har en kinetisk friktionskoefficient  $\mu_k$ . Ge ett uttryck för accelerationen som funktion av lutningsvinkeln.



Även här bidrar inte krafterna längs  $y$ -axeln till klossens acceleration. Från Newtons andra lag får vi för kraftkomponenterna i  $x$ -led:

$$mgsin\theta - N\mu_k = mgsin\theta - \mu_k mgcos\theta = ma \Rightarrow a = g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$$

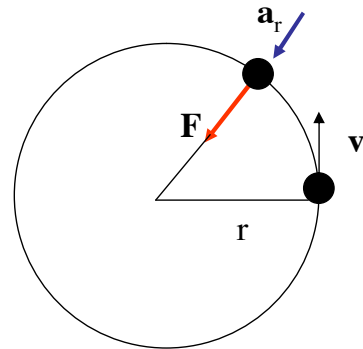
6

# Cirkulär rörelse

En sten med massan  $m$  är fäst i en tråd med längden  $r$ .

Newtons andra lag:  $F = ma_r$

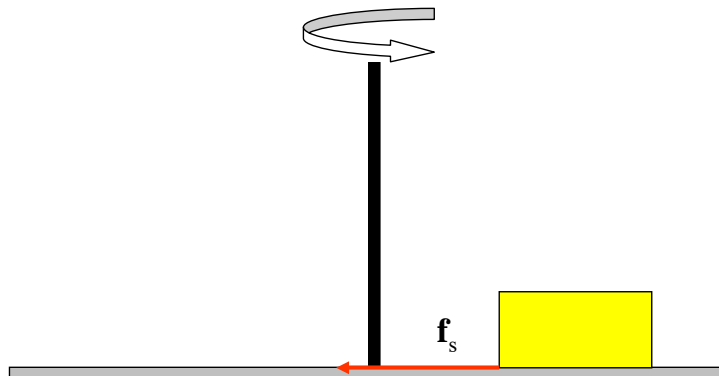
$$F = mv^2/r$$



$F$  kallas **centripetalkraft** och är i det här fallet spännkraften i tråden som tvingar stenen att röra sig i en cirkulär bana.

7

## Exempel: låda på roterande skiva

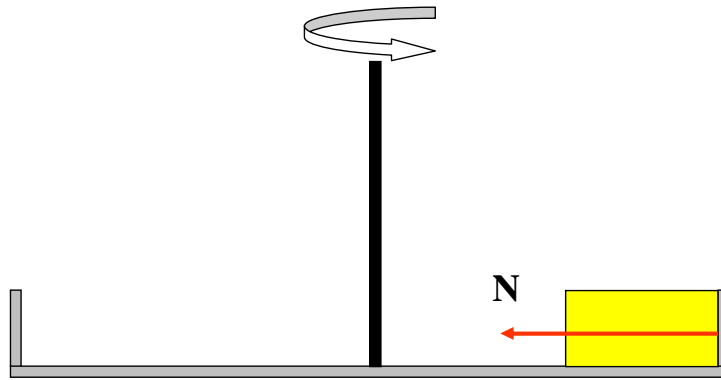


Lådan hålls kvar i en cirkulär bana av den statiska friktionskraften  $f_s$ .

I det här fallet är centripetalkraften = friktionskraften.

8

### Exempel: låda på roterande skiva med kant



En låda på en friktionsfri roterande skiva med hög kant hålls kvar av kantens normalkraft som utgör centripetalkraften.

9

### Slutsats

Centripetalkraften är ingen ny form av kraft, utan en kraft som kan ha olika former för att hålla en kropp i en cirkulär bana. Den kan vara spännkraft, friktion, normalkraft m.m. eller en kombination av dessa. Centripetalkraften är alltid riktad mot centrum av cirkelbanan.

Ett vanligt fel är att man balanserar centripetalkraften med en motriktad kraft som man kallar för **centrifugalkraft**. Detta är fel. En sådan kraft finns inte. Den är en så kallad fiktiv kraft.

10

## Satellitbanor

Sätter vi (i) = (ii) fås

$$GmM/r^2 = mv^2/r .$$

Satellitens rotationshastighet blir

$v = (GM/r)^{1/2}$  En kropp med massan  $m$  roterar med en konstant hastighet  $v$  i en cirkulär bana med radien  $r$  kring en annan kropp med en avsevärt mycket större massa  $M$  som kan betraktas som fix.

Centripetalkraften  $F$  är riktad mot  $M$  och ges av

$$F = mv^2/r \quad (i)$$

Centripetalkraften är den inåtriktade gravitationskraften

$$F = GMm/r^2 \quad (ii)$$

11

Omloppstiden är

$$T = 2\pi r/v \quad (i)$$

Om vi ersätter  $v$  med  $(GM/r)^{1/2}$  i (i) får vi följande relation:

$$T = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \sqrt{r^3}$$

Kvadrerar vi får vi

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 = kr^3$$

Detta är **Keplers tredje lag**.

12

# Föreläsning 5

## Arbete och energi (Kapitel 7)

- Arbete
- Kinetisk energi
- Arbete-energiteoremet
- Effekt

## Skalärprodukten

För skalärprodukten av två vektorer **A** och **B** gäller

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$$

Skalärprodukten av vektorerna **A** och **B** är oberoende av ordningsföljden av vektorerna:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

För skalärprodukten av enhetsvektorer gäller följande:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Skalärprodukten är distributiv:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

Skalärprodukten av två vektorer uttryckt med enhetsvektorer och komponenter ges av

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Skalärprodukten av en vektor med sig själv:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$

Slutligen skalärprodukten av en vektor och en enhetsvektor ges av:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A_x, \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = A_y, \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = A_z$$

# Arbete

Vi börjar först med att definiera arbetet  $W$  i de fall vi har en konstant kraft.

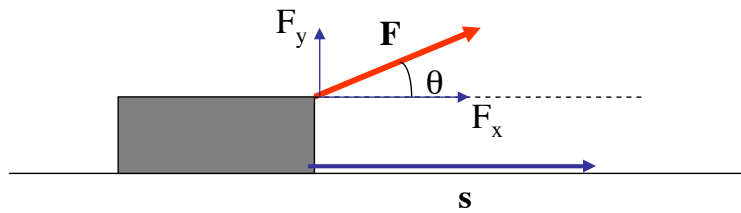
**Mekaniskt arbete:**

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$$

eller

$$W = F s \cos \theta$$

$\theta$  är vinkeln mellan kraft- och förflyttningsvektorn. Observera att det är endast kraftkomponenten längs förflyttningen som bidrar till arbetet. Enheten för arbete är joule, J.



$\Delta \mathbf{s} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k}$  och  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$

Arbetet  $W$  uttryckt i komponentform:

$$W = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

Om flera krafter verkar på en kropp gäller

$$W_{\text{net}} = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{s}_2 + \dots + \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{s}_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

En stel kropp och endast translation:

$$W_{\text{net}} = \mathbf{F}_{\text{net}} \cdot \mathbf{s}$$

$\mathbf{F}_{\text{net}}$  är lika med summan av alla på kroppen verkande krafter.

Arbete kan vara negativt. A påverkar B med en kraft  $\mathbf{F}_{AB}$ .

Enligt Newtons tredje lag svarar B med en motsatt reaktionskraft  $\mathbf{F}_{BA}$ .

$$W_{AB} = \mathbf{F}_{AB} \cdot \mathbf{s} = -\mathbf{F}_{BA} \cdot \mathbf{s} = -W_{BA}$$

A uträttar ett positivt arbete på B och B uträttar lika stort negativt arbete på A.



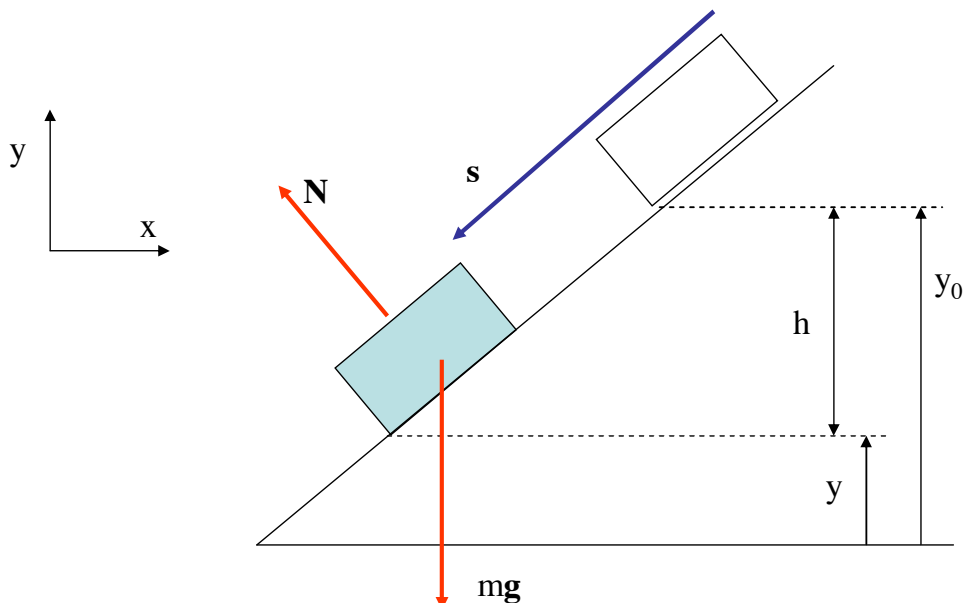
En kloss rör sig på ett underlag med kinetisk friktion  $\mathbf{f}_k$ .

Friktionskraften är riktad i motsatt riktning mot förflyttningen.

$$W_f = \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{s} \cos 180^\circ = -\mathbf{f}_k \cdot \mathbf{s}$$



Arbetet  $W_g$  uträttat av gravitationskraften då ett föremål förflyttas nerför en backe.



$$\mathbf{s} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j}$$

$$\mathbf{mg} = -mg \mathbf{j}$$

$$W_g = -mg \mathbf{j} \cdot (\Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j}) = -mg \Delta y = -mg(y - y_0) = mgh$$

Från den härledningen drar vi två slutsatser:

Arbetet som uträttas av gravitationskraften beror endast av de vertikala start- och slutkoordinaterna och ej av vägen.

Sätter vi  $y = y_0$  får vi  $W_g = 0$ , vilket leder till den andra slutsatsen:

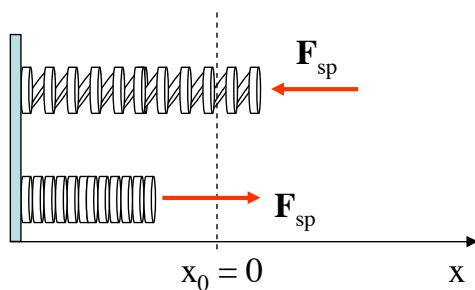
Det av gravitationen uträttade arbetet är noll för alla vägar som återkommer till startpunkten.

### Arbete uträttat av variabel kraft

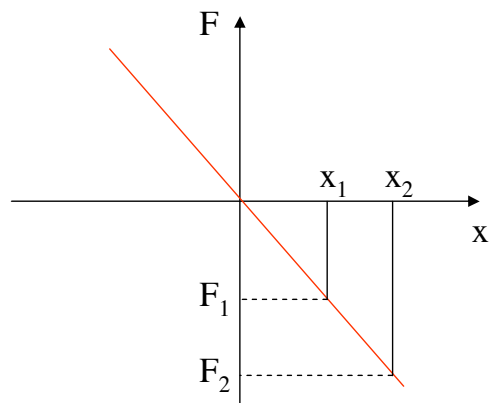
Fjäderkraften  $F_{sp}$  är proportionell mot och motverkar fjäderns utdragning eller komprimering.

$$F_{sp} = -kx$$

där  $k$  är **fjäderkonstanten** samt  $x$  är förflyttningen från jämviktsläget.



Jämvikt  $F_{sp} = 0$



En utdragen fjäder befinner sig i läge  $x_1$ . Arbetet  $W_{sp}$  är arean mellan  $x_1$  och  $x_2$ :

$$W_{sp} = F_1(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(F_2 - F_1) \quad (i)$$

Sätter vi  $F_1 = -kx_1$  och  $F_2 = -kx_2$  i (i) får vi:

$$W_{sp} = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

# Kinetisk Energi

En konstant kraft  $F$  verkar på en partikel med massan  $m$  under förflyttningen  $\Delta x$ .

$$W = F\Delta x \quad (i)$$

Vi ersätter  $F$  i (i) med  $ma$  från Newton andra lag.

$$W = ma\Delta x \quad (ii)$$

Vi löser ut  $a$  ur  $v^2 = v_0^2 + 2a(\Delta x)$ .

$$a = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)/\Delta x$$

$a$  insatt i (ii) :

$$W = mv^2/2 - mv_0^2/2 \quad (iii)$$

Storheten  $K = mv^2/2$  kallas för **kinetisk energi**. Kinetisk energi är en skalär och har samma enhet som arbete, dvs. joule.

Ekvation (iii) kan skrivas:

$$W_{\text{net}} = \Delta K$$

Sambandet kallas **arbete-energiteoremet**.

## Arbete uttryckt som en integral

Om vi har en funktion som beror av variabeln  $x$  så kan vi bestämma arean mellan  $x_1$  och  $x_2$  genom att integrera denna funktion.

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx$$

Arbetet som uträttas av en fjäder blir  $W_{sp} = \int_{x_1}^{x_2} F_{sp}(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$

En alternativ härledning till arbete-energiteoremet kan vi göra om vi håller i minnet att accelerationen  $a = dv/dt$ , hastigheten  $v = dx/dt$  och  $F = ma$ .

$$W = \int_{x_0}^x F dx = \int_{x_0}^x m a dx = \int_{x_0}^x m \frac{dv}{dt} v dt = \int_{v_0}^v m v dv = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

## Arbete och energi i tre dimensioner

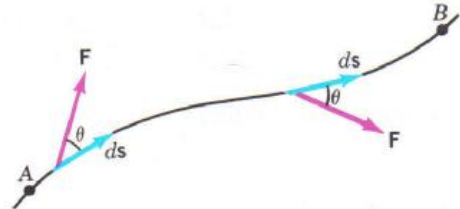
En partikel rör sig i en bana under inverkan av en varierande kraft  $\mathbf{F}$ . Arbetet under förflyttningen  $d\mathbf{s}$  är

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Det totala arbetet som uträttas om partikeln förflyttar sig från läge A till läge B är

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F \cos \theta ds$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \text{ och } d\mathbf{s} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$



$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$$

## Effekt

Effekt P definieras som uträttat arbete per tidsenhet.

Medeleffekt  $P_{av}$  definieras

$$P_{av} = \Delta W / \Delta t$$

där  $\Delta W$  är arbetet som uträttas under tidsintervallet  $\Delta t$ .

Enheten är J/s = watt, W.

Momentana effekten är

$$P = dW/dt$$

Vi ersätter  $dW$  med  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ , dvs. arbetet som uträttas av kraften  $\mathbf{F}$  under en infinitesimal förflyttning  $d\mathbf{s}$ .

$$P = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Den allmänna definitionen av effekt är förändringstakten av energi i ett system:

$$P = dE/dt$$

# Föreläsning 6

## Energiprincipen (Kapitel 8)

- Potentiell energi
- Konservativa krafter
- Energiprincipen
- Energi och icke-konservativa krafter
- Gravitationell potentiell energi

## Potentiell energi

(a) En boll kastas vertikalt uppåt.

Gravitationen utför ett negativt arbete som leder till att bollens hastighet, dvs. kinetiska energin minskar.

(b) Bollen återvänder och faller vertikalt neråt.

Gravitationen utför ett positivt arbete som ökar bollens hastighet, dvs. kinetiska energin ökar.

Men vad händer med den energi som ”försvinner” från bollens kinetiska energi? Och varifrån får man den energi som behövs för att åter ge bollen dess kinetiska energi när den faller tillbaka?

I det första fallet utför gravitationen ett negativt arbete där den omvandlar bollens kinetiska energi till en ny form av energi som beror på bollens höjdläge. Den nya formen av energi når sitt maximala värde då bollen är i sitt högsta läge (all kinetisk energi har blivit omvandlad). Det är den energin som gör att bollen återigen kan falla och återfå sin kinetiska energi. Den typen av energi kallas för **potentiell energi** och betecknas  $U$  och definieras:

Potentiell energi är en form av energi som förknippas med det relativa läget mellan två eller fler interaktiva partiklar.

## Konservativa och dissipativa krafter

Både gravitationskraftens och fjäderkraftens arbete beror endast av ändringen av start- och slutpositionerna.

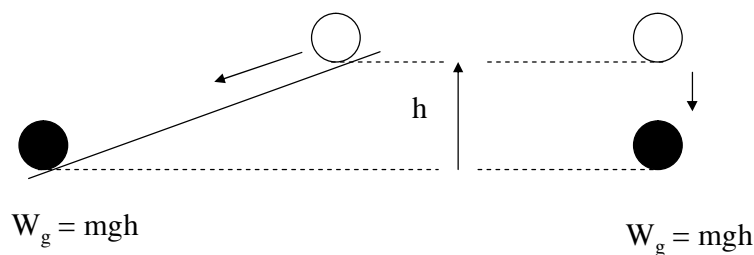
Krafterna kallas **konservativa krafter**.

Friktionskraftens arbete beror av vägen (den egentliga sträckan vid förflyttningen).

Kraften är en **dissipativ kraft**.

Det av en konservativ kraft uträttade arbetet är oberoende av vägen.

Det av gravitationen uträttade arbetet när en boll rullar utför en backe beror endast av skillnaden mellan bollens vertikala start- och slutlägen.

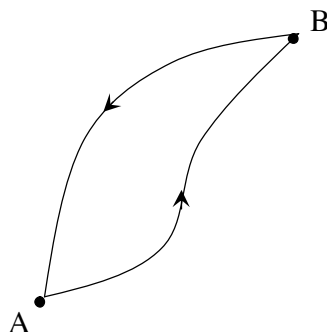


Från den tidigare slutsatsen ser vi att om ett objekt av en konservativ kraft förflyttas från läge A till läge B, så bör det uträttade arbetet  $W_{AB}$  vara lika stort som arbetet  $W_{BA}$  från B till A, fast med ändrat tecken, dvs.

$$W_{AB} = -W_{BA} \Rightarrow W_{AB} + W_{BA} = 0$$

Detta leder till den andra slutsatsen:

För en sluten bana är det av en konservativ kraft uträttade arbetet lika med noll.



För en konservativ kraft  $\mathbf{F}_c$  kan vi definiera en potentiell energi.

Ändringen i potentiell energi är lika med det negativa värdet av det uträttade arbetet.

Detta gäller generellt för konservativa krafter.

$$W_c = -\Delta U$$

För en infinitesimal förflyttning gäller  $dW_c = -dU = -\mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s}$ .

$$U_B - U_A = -\int_A^B \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s}$$

## Potentiell energifunktion

### Gravitationell potentiell energi

Vi antar att gravitationskraften är konstant i närheten av jordytan. Gravitationskraftens arbete för att flytta ett objekt med massa  $m$  från startposition  $y_0$  till slutposition  $y$  är

$$W_g = -mg(y - y_0) = -\Delta U_g = -(U - U_0)$$

Väljer vi  $U_0 = 0$  för  $y_0 = 0$  (nollnivå) får vi ett uttryck för  $U_g$

$$U_g = mgy$$

### Elastisk potentiell energi

Arbetet uträttat av fjäderkraften då en fjäder sträcks från läge  $x_0$  till läge  $x$  är

$$W_{sp} = -\frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2) = -\Delta U_{sp} = -(U - U_0)$$

Väljer vi  $x_0 = 0$  som fjäderns jämviktsläge med potentiella energin  $U_0 = 0$ , så blir uttrycket för fjäderns potentiella energi  $U_{sp}$

$$U_{sp} = \frac{1}{2}kx^2$$

## Konservativa krafter och potentiella energifunktioner

Hur får vi kraften om vi har en känd potentiell energifunktion?

$$dU = -\mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s}$$

I en dimension gäller:

$$dU = -F_x dx$$

$$F_x = -dU/dx$$

I tre dimensioner fås kraften  $\mathbf{F}$  genom partiell derivering av potentiella energifunktionen:

$$\mathbf{F} = -((\delta U/\delta x)\mathbf{i} + (\delta U/\delta y)\mathbf{j} + (\delta U/\delta z)\mathbf{k}) = -\nabla U \quad (\nabla = \text{gradientvektor})$$

## Energiprincipen

Nettoarbetet uträttat av en konservativ kraft är

$$W_{\text{net}} = W_c = -\Delta U = \Delta K \quad (\text{arbete-energiteoremet})$$

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad (\text{i})$$

Vi ersätter  $\Delta K$  och  $\Delta U$  i (i) med  $K_2 - K_1$  och  $U_2 - U_1$ .

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \quad (\text{ii})$$

Summan av den kinetiska energin  $K$  och den potentiella energin  $U$  är alltid konstant även om  $U$  och  $K$  ändras.

$U + K$  är den **mekaniska energin** och betecknas  $E$ .

Från relation (ii) får vi **energiprincipen**:

$$E_1 = E_2$$

Energiprincipen är endast tillämpbar i de fall där inget nettoarbete har uträttats av dissipativa krafter.

## Mekanisk energi och icke - konservativa krafter

Vi har hittills utgått från att arbetet endast utträttats av konservativa krafter, men i det verkliga livet måste man ta hänsyn till dissipativa krafter såsom friktion och dragkraft. Inkluderar man både det konservativa,  $W_c$ , och dissipativa  $W_{nc}$  arbetet i arbete –energi-teoremet får vi

$$W_{net} = W_c + W_{nc} = \Delta K \quad (i)$$

Vi ersätter  $W_c$  med  $-\Delta U$  i (i).

$$W_{nc} = \Delta K + \Delta U = K_2 - K_1 + U_2 - U_1 = E_2 - E_1 = \Delta E \quad (ii)$$

(ii) är en modifierad version av energiprincipen där arbetet från de dissipativa krafterna  $W_{nc}$ , är lika med ändringen  $\Delta E$  av systemets totala mekaniska energi.

## Gravitationell potentiell energi och flykthastighet

På långt avstånd från jorden ges gravitationskraften av Newtons allmänna gravitationslag.

$$F_r = -GmM/r^2$$

Kraften är en så kallad centralkraft riktad längs linjen som sammanbinder två kroppar, exempelvis jorden och en satellit.

Arbetet utträttat av gravitationskraften  $F_r$  vid förflyttningen från  $r_A$  till  $r_B$  är

$$W_c = \int_{r_A}^{r_B} F_r dr = \int_{r_A}^{r_B} -GmM \frac{dr}{r^2} = \frac{GmM}{r_B} - \frac{GmM}{r_A}$$

Den potentiella energifunktionen för gravitationskraften är

$$U(r) = -GmM/r$$

Om  $M \gg m$  är kinetiska energin hos  $M$  försumbar.

Den mekaniska energin är  $E = K + U = mv^2/2 - GmM/r$ .

## Flykthastighet

Flykthastigheten  $v_{\text{esc}}$  är den minsta hastighet som en kropp vid jordytan måste ha som starthastighet för att kunna färdas oändligt långt bort från jorden utan att dras tillbaka av jordens gravitation.

Vid jordytan:  $E_1 = mv^2/2 - GmM_j/R_j$

Vid flyktgränsen:  $E_2 = 0$  (Ingen kinetisk eller potentiell energi)

Energiprincipen:

$$E_1 = E_2$$

$$mv^2/2 - GmM_j/R_j = 0$$

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_j}{R_j}}$$

där  $R_j$  och  $M_j$  är jordens radie resp. massa.

# Föreläsning 7

## Rörelsemängd (Kapitel 9.1-5)

- Rörelsemängd
- Lagen om rörelsemängdens bevarande
- Kollisioner
- Impuls

## Rörelsemängd

Newtons andra lag kan skrivas (om massan är konstant):

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m d\mathbf{v}/dt = d(m\mathbf{v})/dt.$$

Den resulterande kraften som verkar på en partikel är lika med ändringen per tidsenhet av produkten  $m\mathbf{v}$ .

$m\mathbf{v}$  kallas **rörelsemängd** och betecknas  $\mathbf{p}$ .

Rörelsemängd är en vektor med beloppet  $m v$  och med samma riktning som hastigheten.

SI-enheten för rörelsemängd är  $\text{kgm/s}$ .

Newtons andra lag kan därför skrivas:

$$\Sigma \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$$

Den resulterande kraften som verkar på en partikel är lika med derivatan av dess rörelsemängd med avseende på tiden.

## Rörelsemängdens bevarande

A och B är två partiklar som utgör ett isolerat system.

A påverkar B med kraften  $\mathbf{F}_{AB}$ . Enligt Newtons tredje lag kommer B att påverka A med en kraft  $\mathbf{F}_{BA}$  med samma belopp men motsatt riktning.

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

Newtons andra lag:

$$\mathbf{F}_{AB} = d\mathbf{p}_B/dt \quad (\text{i})$$

$$\mathbf{F}_{BA} = d\mathbf{p}_A/dt \quad (\text{ii})$$

Addera (i) och (ii):

$$d\mathbf{p}_B/dt + d\mathbf{p}_A/dt = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA} = -\mathbf{F}_{BA} + \mathbf{F}_{BA} = 0 \quad (\text{iii})$$

(iii) kan skrivas:

$$d/dt(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B) = 0$$

Summan av partiklarnas rörelsemängder kallas systemets **totala rörelsemängd  $\mathbf{P}$**  och är konstant.

**Lagen om rörelsemängdens bevarande:**

Om vektorsumman av alla krafter i ett system är lika med noll så är systemets totala rörelsemängd konstant.

Om partiklarna A och B påverkas av externa krafter  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  blir summan av alla krafterna

$$\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA} + \mathbf{F}_{\text{extA}} + \mathbf{F}_{\text{extB}} = d\mathbf{P}/dt \quad \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA} = 0$$

$$\mathbf{F}_{\text{extA}} + \mathbf{F}_{\text{extB}} = d\mathbf{P}/dt$$

Om summan av alla externa krafter är skild från noll är den totala rörelsemängden ej konstant och lagen om rörelsemängdens bevarande gäller inte.

# Kollisioner

Man skiljer på två typer av kollisioner.

- **Elastisk** kollision: Totala rörelsemängden bevaras. Totala kinetiska energin bevaras.
- **Inelastisk** kollision: Totala rörelsemängden bevaras.

Två bollar A och B med massorna  $m_A$  och  $m_B$  och hastigheterna  $u_A$  och  $u_B$  kolliderar med varandra och får två nya hastigheter  $v_A$  och  $v_B$ .

$$m_A u_A + m_B u_B = m_A v_A + m_B v_B \quad (\text{i}) \quad (\text{elastisk och inelastisk})$$

$$\frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \quad (\text{ii}) \quad (\text{elastisk})$$

Med hjälp av relationerna (i) och (ii) kan vi få ett samband i fallet elastisk kollision.

$$(u_B - u_A) = -(v_B - v_A)$$

I endimensionell elastisk kollision är partiklarnas relativa hastighet före och efter kollisionen lika stor men motsatt riktad.

# Impuls

En kraft  $\mathbf{F}$  verkar under ett tidsintervall  $dt$ .

Newton andra lag:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$$

$$\mathbf{F} dt = d\mathbf{p}$$

Denna ändring av rörelsemängden kallas för **impuls** och har beteckningen  $\mathbf{I}$ .

Impuls är en vektor med samma riktning som  $\mathbf{F}$ . Den har enheten Ns eller kgm/s (samma som för rörelsemängd).

Den allmänna formeln för impuls är

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$$

Kraftens variation med tiden under en kollision är ofta mycket komplicerad. Därför är det mer lämpligt att bestämma medelkraften  $\mathbf{F}_{av}$  ur relationen

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{F}_{av} \Delta t$$

# Föreläsning 8

## Flerpartikelsystem (Kapitel 10.1 - 4)

- Masscentrum
- Masscentrums rörelse
- Kinetisk energi

### Masscentrum

Fram tills nu har vi behandlat alla våra objekt som punktpartiklar. I vissa fall är det enkelt att beskriva rörelsen hos ett objekt, exempelvis en boll, men för att beskriva rörelsen för tex. en klubba är det inte lika enkelt. I det här fallet måste man behandla klubban som ett flerpartikelsystem, där varje del av klubban har ett annat rörelsemönster än de andra delarna. Det finns en speciell punkt i klubban vars rörelse kan beskrivas med de rörelseekvationer vi känner till. Denna punkt kallas för **masscentrum**.

Masscentrum hos ett flerpartikelsystem är den punkt där hela systemets massa är koncentrerad och där alla externa krafter verkar.



Två partiklar med massorna  $m_1$  och  $m_2$  har koordinaterna  $x_1$  resp.  $x_2$ .  $s_1$  och  $s_2$  är avstånden relativt masscentrum  $x_{CM}$ . Från jämviktsförhållandet

$m_1 s_1 = m_2 s_2$  kan vi få ett uttryck för  $x_{CM}$ .

$$m_1(x_{CM} - x_1) = m_2(x_2 - x_{CM})$$

$$m_1 x_{CM} - m_1 x_1 = m_2 x_2 - m_2 x_{CM}$$

$$x_{CM} = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2)$$

Detta är definitionen av masscentrum för ett tvåpartikelsystem i en dimension. För ett system med  $n$  partiklar och totala massa  $M$  har vi

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Masscentrum i tre dimensioner:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Lägesvektorn för masscentrum:

$$\mathbf{r}_{CM} = x_{CM} \mathbf{i} + y_{CM} \mathbf{j} + z_{CM} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$$

## Masscentrum hos fasta kroppar

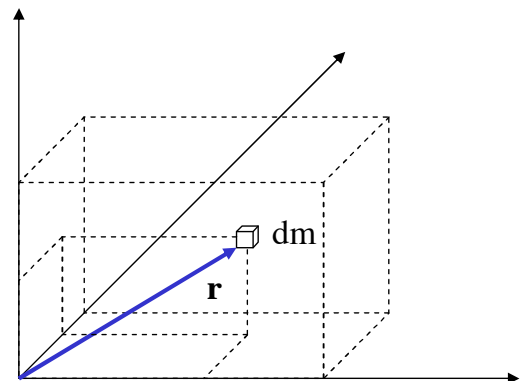
Om vi vill beräkna masscentrum för en homogen kropp måste vi integrera över kroppens volym.

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm$$

$dm$  är ett masselement i kroppen med lägesvektorn  $\mathbf{r}$ .

$m$  måste uttryckas i variablerna  $x$ ,  $y$ ,  $z$  eller  $r$ .

Vi ska endast beräkna masscentrum för symmetriska kroppar där vi endast behöver en integrationsvariabel.



## Beräkning av konens masscentrum

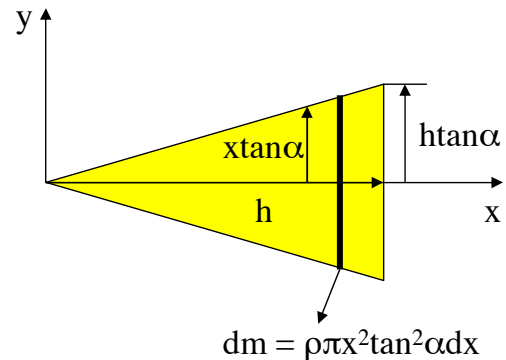
Vi vill bestämma masscentrum för en homogen kon. Vi känner till konens höjd  $h$ , halva toppvinkeln  $\alpha$  och konens densitet  $\rho$ .

Vi börjar med att beräkna konens massa  $M$ . Från figuren ser vi att radien  $y$  hos konen ges av  $x \tan \alpha$ . Om vi betraktar en tunn skiva med tjockleken  $dx$  på avståndet  $x$  från konens spets, så kan vi få dess massa  $dm$ :

$dm = \rho \pi x^2 \tan^2 \alpha dx$ . Integrerar vi denna funktion från  $x = 0$  till  $x = h$  får vi konens massa  $M$ :

$$M = \int_0^h \rho \pi x^2 \tan^2 \alpha dx = \rho \pi \tan^2 \alpha \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \rho \pi \tan^2 \alpha \frac{h^3}{3}$$

Masscentrums läge för  $y$ - och  $z$ -koordinaten är lika med noll. Det återstår bara att bestämma masscentrums läge  $x_{CM}$  längs  $x$ -koordinaten.



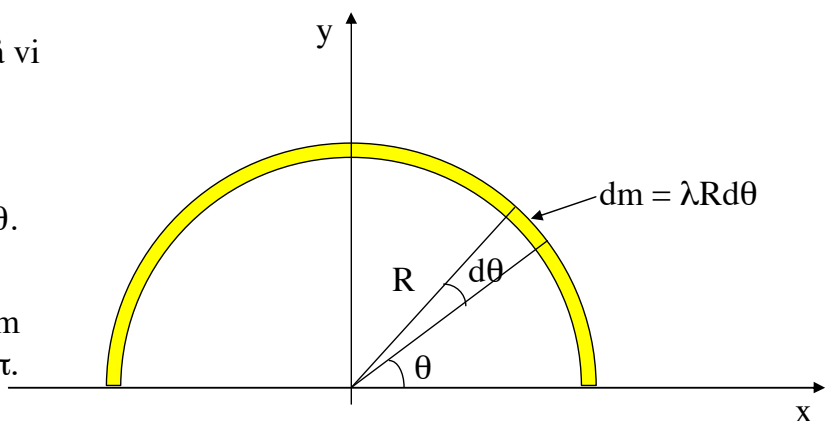
$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^h \rho \pi x^3 \tan^2 \alpha dx = \frac{1}{M} \rho \pi \tan^2 \alpha \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^h = \frac{1}{M} \rho \pi \tan^2 \alpha \frac{h^4}{4} = \frac{3h}{4}$$

## Beräkning av masscentrum hos en böjd stång

Vi har en homogen stång som är böjd till en halvcirkel med radien  $R$ . Stången har en linjär densitet  $\lambda$  (massa/längd) och vi vill bestämma dess masscentrum. Här är det lämpligt att vi uttrycker masselementet  $dm$  som funktion av  $\theta$  (i radianer) och radien  $R$ .

Av symmetriskäl är  $x_{CM} = 0$ , så vi behöver endast bestämma masscentrum längs  $y$ -axeln.  $y$ -koordinaten ges av  $R \sin \theta$  och masselementet  $dm$  ges av  $\lambda R d\theta$ . Stångens massa  $M = \lambda R \pi$

Vi kan nu bestämma  $y_{CM}$  genom att integrera från  $\theta = 0$  till  $\theta = \pi$ .



$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{M} \int_0^\pi R \sin \theta (\lambda R d\theta) = \frac{\lambda R^2}{M} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\lambda R^2}{M} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{2R}{\pi}$$

## Masscentrums rörelse

Vi börjar med att ge ett uttryck för masscentrums hastighet genom att derivera masscentrums läge med avseende på tiden.

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d(\mathbf{r}_{CM})}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d(\mathbf{r}_i)}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$$

Den totala rörelsemängden  $\mathbf{P}$  kan därför skrivas:

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$$

Ur detta samband drar vi slutsatsen:

Den totala rörelsemängden hos ett flerpartikelsystem motsvarar rörelsemängden hos en enda partikel med massan  $M = \sum m_i$  och hastigheten  $\mathbf{v}_{CM}$ .

Vi kan uttrycka kraftekvationen  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  genom att derivera masscentrums hastighet med avseende på tiden.

$$\mathbf{F} = M d(\mathbf{v}_{CM})/dt = M\mathbf{a}_{CM}. \quad (i)$$

$\mathbf{F}$  är summan av alla externa krafter som påverkar systemet.

Masscentrum får samma acceleration som en punktmassa  $M$  som påverkas av summan av partikelsystemets externa krafter.

$$\mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{CM}$$

eller

$$\mathbf{F}_{ext} = d\mathbf{P}/dt$$

Ändringen av den totala rörelsemängden hos ett flerpartikelsystem är lika med summan av alla externa krafter.

I ett isolerat system är  $\mathbf{F}_{ext} = 0$ , så från relation (i) ser vi att  $\mathbf{v}_{CM}$  måste vara konstant.

# Kinetisk energi

Lägesvektorerne  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{r}_{CM}$  och  $\mathbf{r}_i'$  anger läget för partikeln  $m_i$ , flerpartikelsystemets masscentrum resp. partikel  $m_i$ 's läge relativt masscentrum.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}_i' \quad (i)$$

Derivatan av  $\mathbf{r}_i$  med avseende på tiden ger hastigheterna:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}_i' \quad (ii)$$

Från (ii) kan vi uttrycka kinetiska energin för  $m_i$  som

$$K_i = \frac{1}{2}m_i\mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2}m_i(\mathbf{v}_{CM}^2 + \mathbf{v}_i'^2 + 2\mathbf{v}_{CM}\mathbf{v}_i') \quad (iii)$$

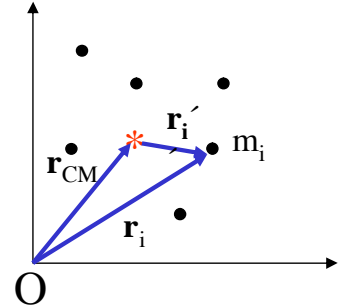
Den totala kinetiska energin för alla partiklar är

$$K = \sum K_i = \frac{1}{2}(\sum m_i)\mathbf{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum(m_i\mathbf{v}_i'^2) + \mathbf{v}_{CM}\sum(m_i\mathbf{v}_i') \quad (iv)$$

$\sum(m_i\mathbf{v}_i')$  i relation (iv) är partiklarnas totala rörelsemängd relativt masscentrum, dvs.  $M\mathbf{v}_{CM}'$  vilken är noll och (iv) kan därför skrivas som

$$K = \frac{1}{2}(\sum m_i)\mathbf{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum(m_i\mathbf{v}_i'^2) = K_{CM} + K_{rel}$$

$K_{CM}$  är kinetiska energin hos masscentrum och  $K_{rel}$  är partiklarnas kinetiska energi relativt masscentrum.



$$K = K_{CM} + K_{rel}$$

# Föreläsning 9

## Rotation hos fasta kroppar (Kapitel 11.1 - 7)

- Rotationskinematik
- Tröghetsmoment
- Kinetisk rotationsenergi
- Kraftmoment
- Newtons 2:a lag för rotationsrörelse
- Arbete och effekt

## Rotationskinematik

En cirkulär skiva roterar kring sitt centrum O. En punkt A på skivan med avståndet  $r$  från skivans centrum förflyttas till punkt B. Om förflyttningsvinkeln är  $\Delta\theta$  så är förflyttningen

$$\Delta s = r\Delta\theta.$$

Förflyttningen sker under tidsintervallet  $\Delta t$ .

**Medelvinkelhastighet:**

$$\omega_{av} = \Delta\theta/\Delta t \quad (\text{rad/s})$$

**Momentan vinkelhastighet:**

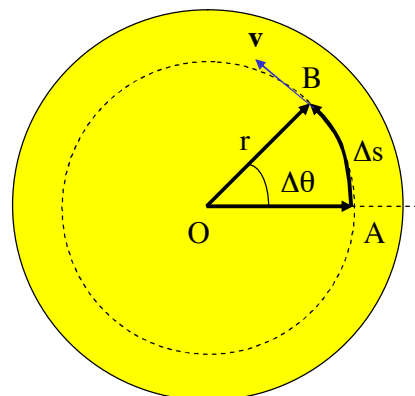
$$\omega = d\theta/dt \quad (\text{i})$$

$$v = ds/dt = d/dt(rd\theta) = r d\theta/dt = r\omega$$

Om  $f$  är rotationsfrekvensen är  $\omega = 2\pi f$

**Medelvinkelaccelerationen  $\alpha_{av}$  och momentana vinkelaccelerationen  $\alpha$  ges av**

$$\alpha_{av} = \Delta\omega/\Delta t \quad \text{resp.} \quad \alpha = d\omega/dt \quad (\text{rad/s}^2) \quad (\text{ii})$$



Från relationerna (i) och (ii) kan man på samma sätt som tidigare härleda rörelse-ekvationerna i rotationskinematiken.

Translation

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Rotation

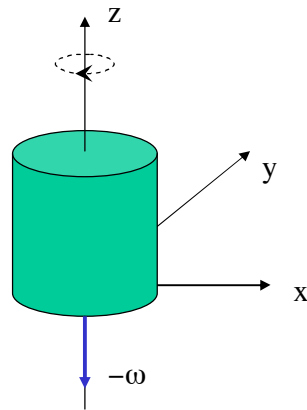
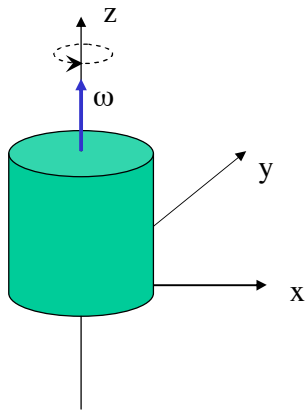
$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (1)$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t \quad (2)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (3)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (4)$$

Vinkelhastigheten är en vektorstorhet vars riktning pekar längs rotationsaxeln.



Centripetalaccelerationen  $a_r$  uttryckt i vinkelhastigheten  $\omega$ :

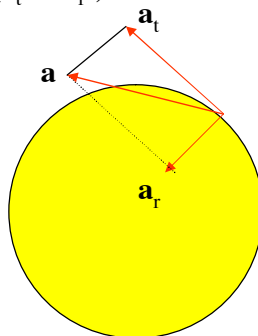
$$a_r = v^2/r = (v = \omega r) = \omega^2 r^2/r = \omega^2 r$$

Om cirkelrörelsen inte är likformig (dvs.  $v$  ej är konstant) så har vi en tangentiell acceleration som är vinkelrät mot den radiella accelerationen. Den tangentiella accelerationen är tidsderivatan av hastigheten.

$$a_t = dv/dt = (v = \omega r) = r d\omega/dt = \alpha r$$

Den totala accelerationen kan då skrivas:  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$  med beloppet

$$a = (a_t^2 + a_r^2)^{1/2}$$

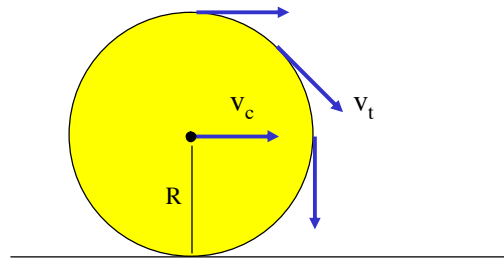


## Rullning

Ett hjul har radien  $R$  och rullar utan att glida. Om hjulet gör ett helt varv på tiden  $T$  är centrumhastigheten

$$v_c = 2\pi R/T = 2\pi R/\omega = \omega R = v_t$$

$v_t$  är den tangentiella hastigheten hos en punkt på hjulets periferi relativt hjulets centrum.

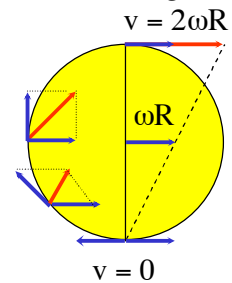


Den totala hastigheten  $\mathbf{v}$  för en punkt på periferin är

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_t$$

Hastigheten för en punkt på hjulets topp är  $2\omega R$  eftersom  $\mathbf{v}_t$  och  $\mathbf{v}_c$  har samma riktning.

I kontaktpunkten med marken är  $\mathbf{v}_t$  motriktad  $\mathbf{v}_c$  vilken leder till att  $\mathbf{v}$  är lika med noll. Den punkten kan därför ses som en momentan rotationsaxel kring vilken hjulet roterar.



## Kinetisk energi och tröghetsmoment

En fast kropp roterar kring en fix axel. Kinetiska energin hos varje punkt i kroppen är

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$v_i = \omega r_i \text{ ger}$$

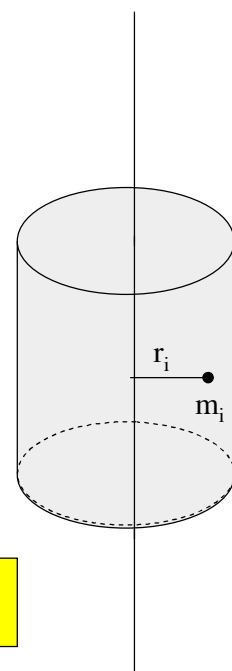
$$K_i = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2$$

Den totala energin  $K$  för hela kroppen är

$$K = \sum K_i = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

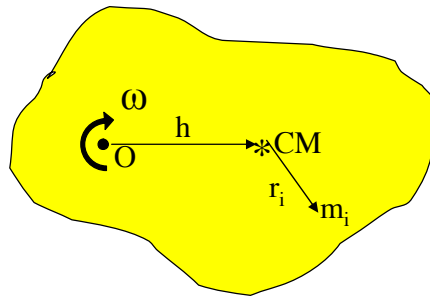
$$\text{där } I = \sum m_i r_i^2$$

$I$  kallas kroppens **tröghetsmoment** (enhet =  $\text{kgm}^2$ ) relativt en fix rotationsaxel. Tröghetsmomentet beror av hur kroppens massa är fördelad i förhållande till axeln.



En kropps tröghetsmoment är ett mått på dess rotations-tröghet, dvs. dess förmåga att motstå rotationsrörelse.

En kropp med massan  $M$  roterar kring en axel  $O$  med vinkelhastigheten  $\omega$ . Avståndet från axeln till kroppens masscentrum är  $h$ .



$m_i$  har samma vinkelhastighet kring masscentrum som kroppens vinkelhastighet. Den relativa kinetiska energin relativt CM är

$$K_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2$$

Den totala kinetiska energin är

$$K = K_{\text{CM}} + K_{\text{rel}} = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 \quad (\text{i})$$

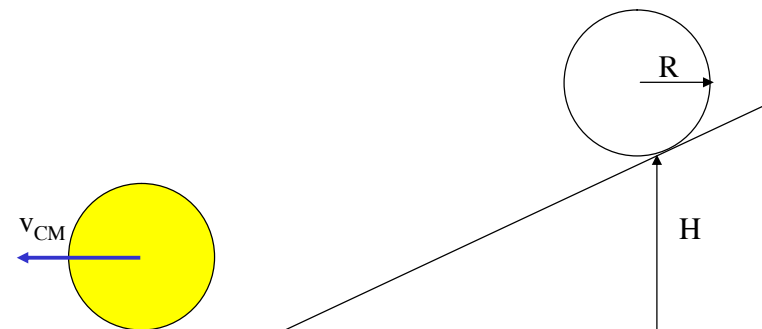
Ersätter vi  $v_{\text{CM}}$  med  $\omega h$  blir (i)

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 (Mh^2 + I_{\text{CM}}) = \frac{1}{2} I \omega^2, \text{ där } \boxed{I = Mh^2 + I_{\text{CM}}}$$

$I = Mh^2 + I_{\text{CM}}$  kallas **parallellaxelteoremet** och relaterar tröghetsmomentet kring en godtycklig axel till tröghetsmomentet kring en axel genom masscentrum.

Energiprincipen gäller även för roterande kroppar.

En skiva med radien  $R$  och massan  $M$  är placerad på höjden  $H$  på ett lutande plan.



Totala energin innan skivan börjar rulla är enbart potentiell energi:  $U = MgH$

När skivan når botten så har hela dess potentiella energi omvandlats till kinetisk energi.

$$K = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2$$

Energiprincipen:  $U = K$ .  $I_{\text{CM}} = \frac{1}{2} MR^2$  och  $v_{\text{CM}} = \omega R$  om skivan ej glider.

$$MgH = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{4} MR^2 \cdot \frac{v_{\text{CM}}^2}{R^2} = \frac{3}{4} M v_{\text{CM}}^2 \Rightarrow v_{\text{CM}} = \sqrt{\frac{4gH}{3}}$$

# Kraftmoment

I translation är kraften  $\mathbf{F}$  den storhet som påverkar rörelsen.

Motsvarande storhet i rotationsdynamiken kallas **kraftmoment** eller **vridmoment** och definieras:

$$\tau = Fr \sin \theta \quad (i)$$

$F$  är kraften som verkar på avståndet  $r$  från origo och  $\theta$  är minsta vinkeln mellan  $\mathbf{F}$  och  $\mathbf{r}$ .

Från figuren ser vi att kraftmomentet (i) också kan skrivas som

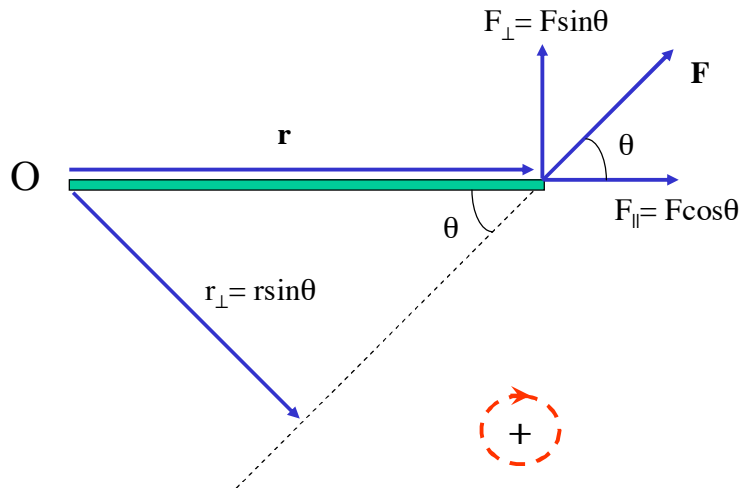
$$\tau = Fr_{\perp}$$

eller

$$\tau = F_{\perp} r$$

$$Fr_{\perp} = F_{\perp} r$$

$r_{\perp}$  kallas för **momentarmen**.



En skiva roterar kring en axel genom dess centrum. Kraften  $F_i$  som påverkar en partikel  $m_i$  på avståndet  $r_i$  från rotationscentrum kan delas upp i tre komponenter.

$F_{ir}$  (komponenten riktad längs skivans radie).

$F_{i\parallel}$  (komponenten vinkelrätt mot skivan parallell med rotationsaxeln)

$F_{it}$  (komponenten riktad tangentiellt mot  $m_i$ 's cirkulära bana).

Den kraft som påverkar skivans rörelse är den tangentiella kraften.

$$F_{it} = m_i a_{it} \quad (i)$$

$a_{it} = r_i \alpha$  där  $\alpha$  är vinkelaccelerationen.

(i) kan därför skrivas som

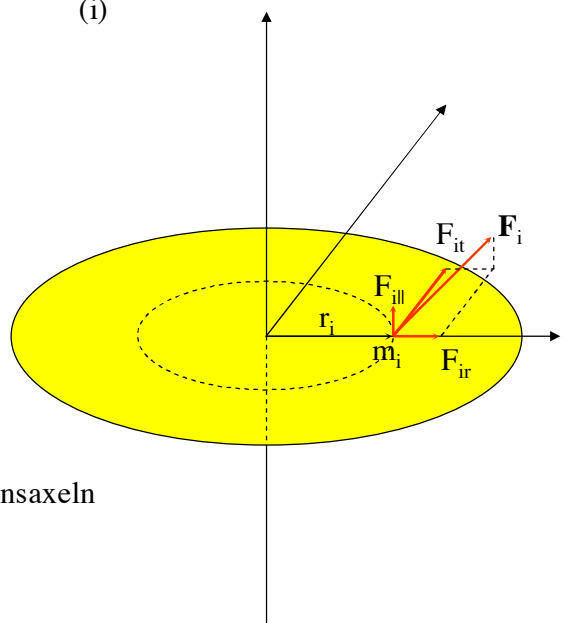
$$F_{it} = m_i a_{it} = m_i r_i \alpha$$

$$\tau_i = r_i F_{it} = m_i r_i^2 \alpha$$

Totala kraftmomentet är  $\tau = \Sigma \tau_i = (\Sigma m_i r_i^2) \alpha$

$$\tau = I \alpha \quad (ii)$$

Ekvationen (ii) gäller endast i de fall där rotationsaxeln har fixerad riktning och läge eller går genom masscentrum och har fixerad riktning.



## Arbete och effekt

Definitionen av arbete  $W$ :

$W = Fs$  där  $s$  är förflyttningen och  $F$  är kraften i förflyttningens riktning.

För rotationsrörelse är  $ds = r d\theta$  och  $F_t$  är den tangentiella komponenten av den verkande kraften. Arbetet blir:

$$dW = F_t r d\theta = \tau d\theta$$

Effekten  $P$  definieras som tidsderivatan av arbetet:

$$P = dW/dt = \tau d\theta/dt$$

$$P = \tau \omega$$

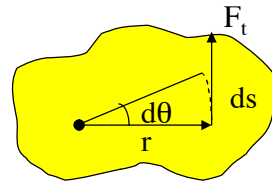
vilket är analogt med  $P = Fv$  för translationsrörelse.

Arbete-energielementet för rotationsrörelse:

$$W = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

Motsvarande teorem för translationsrörelse är

$$W = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$



# Föreläsning 10

## Rörelsemängdsmoment och gravitation

(Kapitel 12.1 - 6 och kapitel 13)

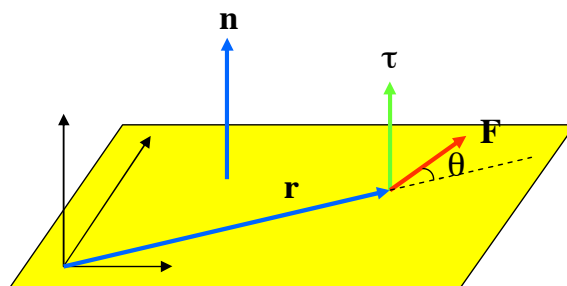
- Kraftmoment som vektor
- Rörelsemängdsmoment
- Rotationsdynamik
- Rörelsemängdsmomentets bevarande
- Statisk jämvikt
- Gravitation

### Kraftmoment som vektor

Den allmänna definitionen av kraftmoment är en vektorstorhet som ges av vektorprodukten av lägesvektorn  $\mathbf{r}$  och kraftvektorn  $\mathbf{F}$ :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = rF\sin\theta\mathbf{n}$$

$\mathbf{n}$  är enhetsvektorn för normalen vinkelrät mot planet som spänns upp av  $\mathbf{r}$  och  $\mathbf{F}$  och vars riktning bestäms av högerhandsregeln.

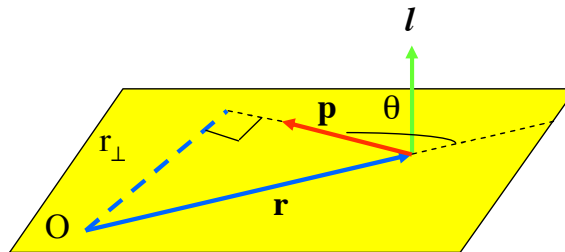


# Rörelsemängdsmoment

I rotationsrörelse kallas den storhet som motsvarar rörelsemängd i translationsrörelse för **rörelsemängdsmoment** och definieras:

$$l = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$\mathbf{p}$  är rörelsemängden för en partikel med lägesvektorn  $\mathbf{r}$  relativt origo O.



Beloppet av rörelsemängdsmomentet är

$$l = r p \sin \theta$$

eller

$$l = r_{\perp} p$$

där  $r_{\perp}$  är momentarmen. SI- enheten för rörelsemängdsmoment är  $\text{kgm}^2/\text{s}$ .

Rörelsemängdsmoment behöver inte nödvändigtvis innebära en rotation.

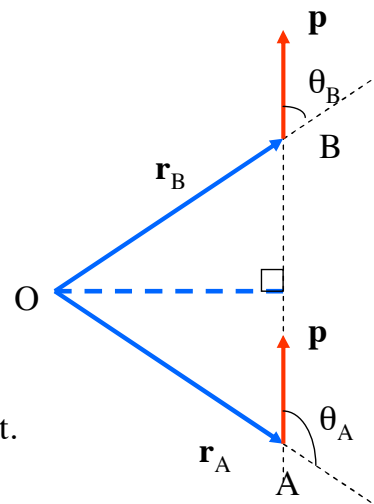
En partikel befinner sig i A med lägesvektorn  $\mathbf{r}_A$ . Partikeln förflyttar sig i en rak linje med konstant fart till läge B med lägesvektorn  $\mathbf{r}_B$ .

$$l_A = r_A p \sin \theta_A$$

$$l_B = r_B p \sin \theta_B$$

$$r_B \sin \theta_B = r_A \sin \theta_A = r_{\perp}, \text{ dvs.}$$

$$l_A = l_B = r_{\perp} p$$



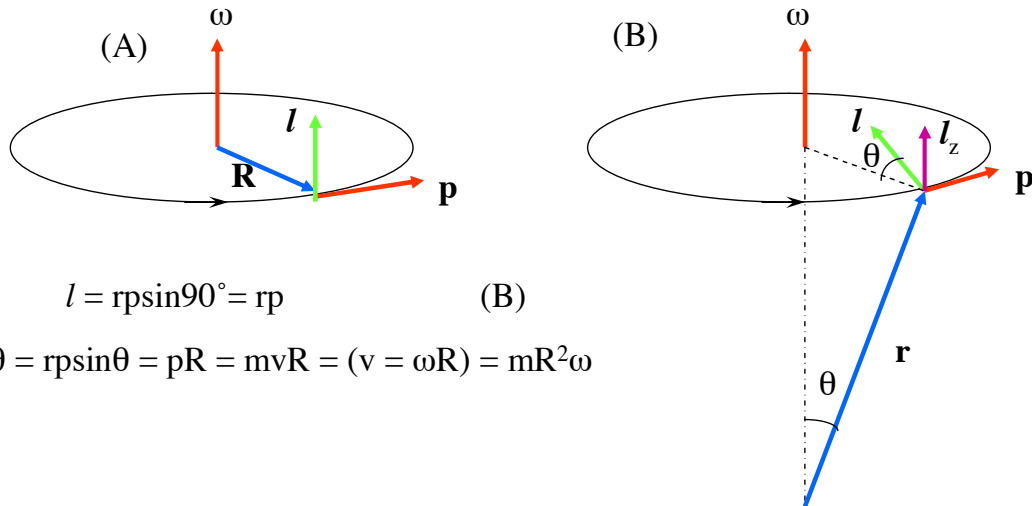
Eftersom momentarmen  $r_{\perp}$  och rörelsemängden  $p$  är konstant blir även rörelsemängdsmomentet  $l$  konstant.

## Rörelsemängdsmoment i cirkulär rörelse

En partikel rör sig med konstant fart i en cirkulär bana med radien  $R$ .

$$l = pR \sin 90^\circ = mvR = (v = \omega R) = mR^2\omega \quad (\text{A})$$

Vi väljer en annan referenspunkt utanför cirkelbanans mitt. Rörelsemängdsmomentet är inte längre vinkelrätt mot cirkelns plan, men dess  $z$ -komponent  $l_z$  är däremot vinkelrät mot cirkelns plan och är lika stor som rörelsemängdsmomentet då referenspunkten var cirkelns centrum.



$$l = rp \sin 90^\circ = rp \quad (\text{B})$$

$$l_z = l \sin \theta = rp \sin \theta = pR = mvR = (v = \omega R) = mR^2\omega$$

## Rörelsemängdsmoment för flerpartikelsystem

För ett flerpartikelsystem ges det totala rörelsemängdsmomentet  $\mathbf{L}$  av

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

vi betraktar  $z$ -komponenten av rörelsemängdsmomentet.

$$L_z = \sum l_{iz} = \sum \omega m_i R_i^2$$

$$L_z = I\omega$$

Detta är rörelsemängdsmomentet för en fast kropp som roterar kring en fix axel. Observera att  $L_z$  är en skalär och ej en vektor.

# Rotationsdynamik

Vi deriverar rörelsemängdsmomentet med avseende på tiden.

$$d\mathbf{L}/dt = d/dt (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}$$

Newton andra lag för rotationsrörelse:

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$$

Tidsderivatan av en partikels rörelsemängdsmoment är lika med kraftmomentet som verkar på den.

I ett flerpartikelsystem är det endast de externa kraftmomenten  $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$  som påverkar rörelsen. De interna kraftmomenten tar ut varandra (Newtons 3:e lag).

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = d\mathbf{L}/dt$$

där  $\mathbf{L}$  är  $\sum \mathbf{L}_i$  och  $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$  är  $\sum \boldsymbol{\tau}_i$ . För en fast kropp som roterar kring en fix axel är  $L = I\omega$ .

$$\tau = dL/dt = I d\omega/dt$$

$$\tau = I\alpha$$

## Rörelsemängdsmomentets bevarande

Analogt med lagen om rörelsemängdens bevarande kan vi formulera lagen om rörelsemängdsmomentets bevarande:

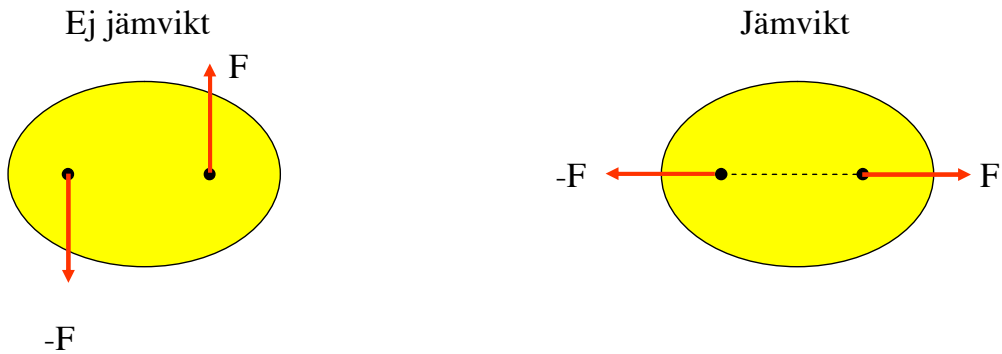
Om det resulterande externa kraftmomentet som verkar på ett system är lika med noll så måste systemets totala rörelsemängdsmoment vara konstant till både storlek och riktning.

$\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = d\mathbf{L}/dt$  ger att om  $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = 0$  så måste  $\mathbf{L}$  vara konstant..

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

## Statisk jämvikt

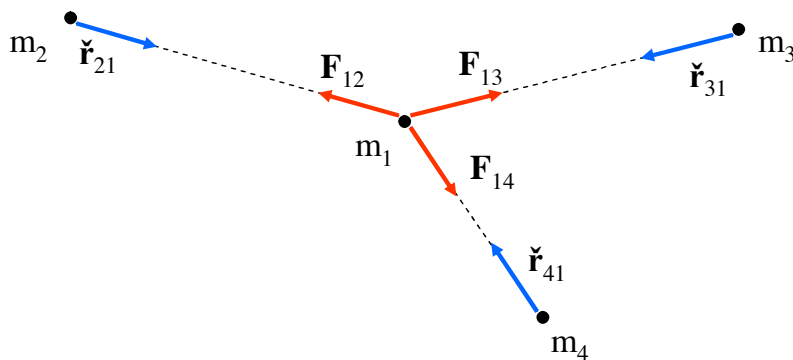
Villkoret för jämvikt vid translation är att summan av alla krafter är lika med noll. Detta villkor är tillräckligt för att uppnå antingen statisk jämvikt (stillastående föremål), eller dynamisk jämvikt (konstant hastighet). Detta villkor är inte tillräckligt för att uppnå rotationsjämvikt. Bilden nedan illustrerar varför jämvikt ej kan uppnås även om nettokraften är lika med noll.



Villkoret för både translationsjämvikt och rotationsjämvikt:

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F} &= 0 \\ \Sigma \tau &= 0\end{aligned}$$

## Gravitation



$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14}$$

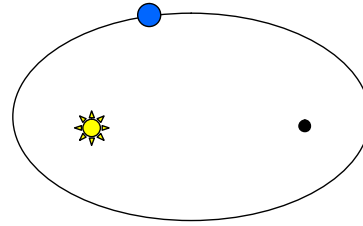
**Superpositionsprincipen:**

Nettokraften som verkar på massan  $m_1$  är vektorsumman av alla parvisa krafter.

# Keplers lagar

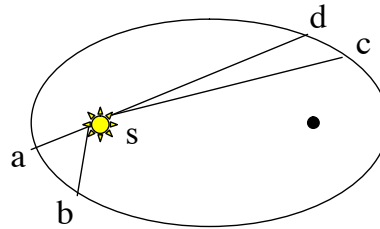
## Keplers första lag:

Planetbanorna är ellipser med stjärnan i den ena brännpunkten.



## Keplers andra lag:

Om tidsintervallet mellan a och b är lika med tidsintervallet mellan c och d så är arean scd lika med arean sab.



## Keplers tredje lag:

$$T^2 = \kappa r^3$$

där  $T$  = omloppstiden,  $r$  = avståndet mellan planeten och den himlakropp den roterar runt och  $\kappa$  är en konstant som beror på himlakroppens egenskaper och är lika med  $4\pi^2/GM$ .

## Bevis av Keplers andra lag

En planet cirklar runt en stjärna. Gravitationskraften som verkar på planeten är riktad längs sammanbindningslinjen mellan stjärnan och planeten. Detta innebär att kraftmomentet som verkar på planeten är lika med noll, dvs. rörelsemängdsmomentet är konstant.

Vi börjar med att bestämma arean som linjen mellan stjärnan och planeten sveper under tiden  $\Delta t$ . Om planeten förflyttar sig under tiden  $\Delta t$  så får vi en triangel vars area är

$$\Delta A = \frac{1}{2}rv\Delta t \sin\theta$$

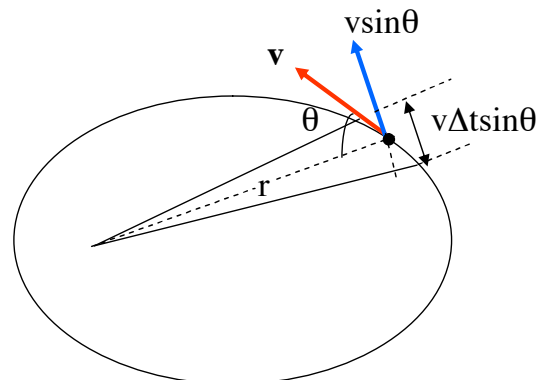
Areahastigheten är

$$\Delta A/\Delta t = \frac{1}{2}rv \sin\theta$$

$rv \sin\theta$  är beloppet av vektorprodukten  $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ , som med hjälp av formeln för rörelsemängdsmoment ( $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ ) kan skrivas som  $L/m$ . Relationen kan därför skrivas

$$\Delta A/\Delta t = \frac{1}{2}L/m$$

Eftersom  $L$  är konstant så måste även areahastigheten vara det.



## Energin i elliptisk rörelse

Både den mekaniska energin och rörelsemängdsmomentet i en planetbana är bevarade. Rörelsemängdsmomenten för planeten i perihelion (kortaste avstånd till stjärnan) och aphelion (längsta avstånd från stjärnan) är lika stora.

$$r_p v_p = r_a v_a \quad (i)$$

Den totala energin för dessa två lägen är

$$E_a = \frac{1}{2}mv_a^2 - GmM/r_a \quad (ii.a) \quad E_p = \frac{1}{2}mv_p^2 - GmM/r_p \quad (ii.b)$$

$E_p = E_a$  ger:

$$(v_p^2 - v_a^2) = 2GM(1/r_p - 1/r_a) \quad (iii)$$

Med hjälp av (i) och (iii) samt  $2a = r_a + r_p$ , fås:

$$v_a^2 = (GM/a)(r_p/r_a) \quad (iv.a);$$

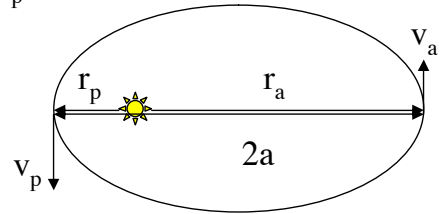
$$v_p^2 = (GM/a)(r_a/r_p) \quad (iv.b)$$

Sätter vi (iv.a) i (ii.a) får vi energin  $E_a$ :

$$E_a = \frac{1}{2}m(GM/a)(r_p/r_a) - GmM/r_a = (GmM/2a)((r_p - 2a)/r_a) = (2a = r_a + r_p) = -GmM/2a$$

På motsvarande sätt fås  $E_p$ :

$$E_p = -GmM/2a$$



$$E = -GmM/2a$$

# Föreläsning 11

## Svängningsrörelse (Kapitel 15.1 - 4)

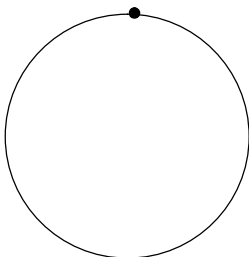
- Svängningsrörelse
- Harmonisk svängning
- Fjäder-massasystem
- Energi i harmonisk rörelse
- Pendlar

## Oscillerande rörelse

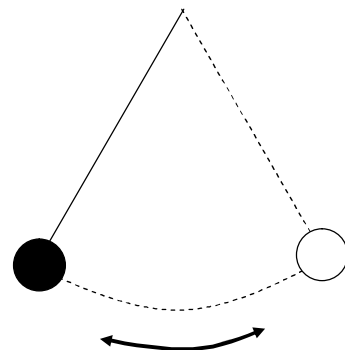
Om en partikel upprepar sitt rörelsemönster så kallas dess rörelse för periodisk. Om rörelsen innebär en fram och tillbakagång längs en given bana med två vändpunkter så är den **oscillerande**. En pendel och en kloss upphängd i en fjäder är två typiska system som utför oscillerande rörelse.

Oscillerande rörelse är en periodisk fluktuation av en fysikaliska storhet kring ett centrum- eller jämviktsläge.

En partikel i en cirkulär bana med konstant  $\omega$  har en periodisk rörelse.

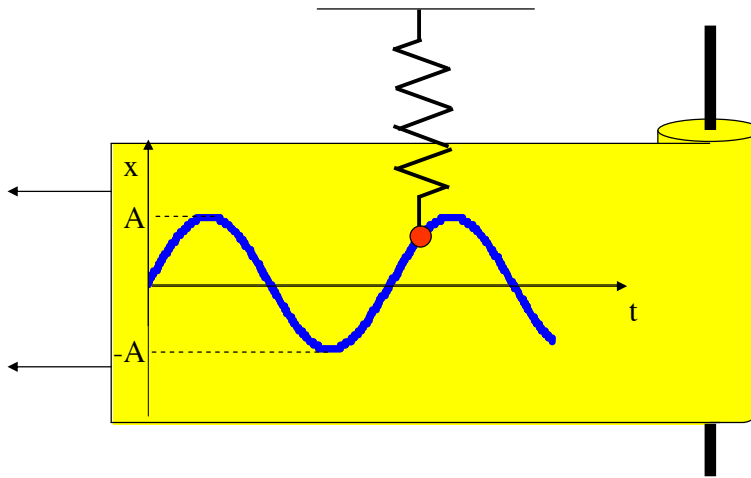


En pendel har en periodisk oscillerande rörelse.



## Enkel harmonisk oscillator

En tyngd är upphängd i en fjäder. Om tyngden sätts i vertikal svängning kan vi illustrera dess rörelse kring jämviktsläget enligt figuren nedan.



Tyngdens läge  $x$  relativt jämviktsläget ges av

$$x(t) = A \sin \omega t$$

där  $A$  är amplituden (vändpunkten) och  $\omega$  är vinkelfrekvensen.

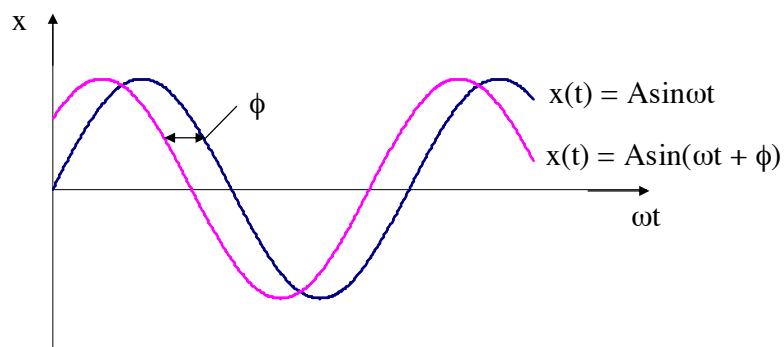
$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$$

Relationen  $x(t) = A \sin \omega t$  utgår från att rörelsen startar från läget  $x = 0$  vid tiden  $t = 0$ .

En mer allmän definition av en harmonisk oscillator är

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

Argumentet  $(\omega t + \phi)$  kallas för **fasen** medan  $\phi$  kallas för **faskonstanten**.



## Egenskaper hos harmonisk svängning

1. Amplituden är konstant (svängningen är enkel).
2. Frekvensen och perioden är oberoende av amplituden. Stora svängningar har samma period som små svängningar (isokronisk).
3. Storhetens tidsberoende fluktuation kan beskrivas av en sinusfunktion med en enda frekvens (svängningen är harmonisk.)

## Hastighet och acceleration i harmonisk svängning

Hastigheten:  $dx/dt = \omega A \cos(\omega t + \phi)$

Accelerationen:  $d^2x/dt^2 = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi)$

Jämför vi accelerationen med  $x = A \sin(\omega t + \phi)$  får vi

$$d^2x/dt^2 = -\omega^2 x \quad (i)$$

eller

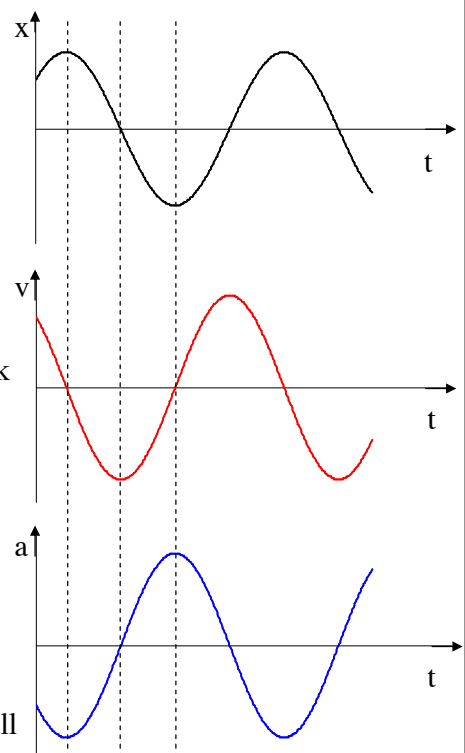
$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$$

Denna differentialekvation kan tillämpas på all harmonisk svängning och har lösningen

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

Följande villkor måste uppfyllas vid harmonisk svängningsrörelse:

- Det måste finnas ett stabilt jämviktsläge.
- Ingen friktion.
- Från relation (i): Accelerationen måste vara proportionell mot förflyttningen och motsatt riktad, dvs.  $a = -\omega^2 x$ .



## Fjäder - massasystemet

En fjäder är fäst vid en vägg i ena änden och i en kloss i den andra änden.

Kraften som påverkar klossen är

$$F_{sp} = -kx = ma$$

$F = ma$  ger

$$a = -(k/m)x$$

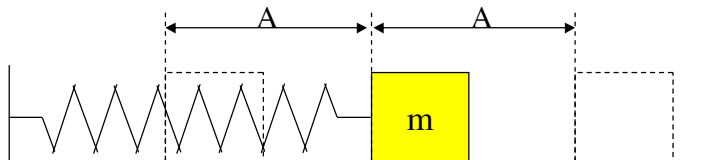
Vi har nu alla villkor uppfyllda för en harmonisk svängning.

Från relationen  $a = -\omega^2 x$  fås

$$\omega = (k/m)^{1/2}$$

Detta ger perioden  $T$  för den svängningen.

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi(m/k)^{1/2}$$



## Energi i harmonisk svängningsrörelse

Fjäderkraften är konservativ, vilket betyder att energin (om ingen friktion finns) i systemet är bevarad. Den potentiella energin uttryckt i läget  $x = A\sin(\omega t + \phi)$ :

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

Den kinetiska energin kan på motsvarande sätt uttryckas i hastigheten  $v = \omega A\cos(\omega t + \phi)$ :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

Den totala energin  $E$  är

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi) = (\omega^2 = k/m) = \frac{1}{2}kA^2$$

Den totala energin hos en harmonisk oscillator är alltså konstant och är proportionell mot kvadraten av amplituden.

## Pendlar

### Matematisk pendel

En matematisk pendel består av en punktförmig tyngd upphängd i en tråd.

Newtons andra lag ger

$$-mg\sin\theta = m \, d^2s/dt^2$$

Förflyttningssträckan  $s$  kan skrivas som  $s = l\theta$ .

$$-g\sin\theta = l \, d^2\theta/dt^2$$

$$d^2\theta/dt^2 + g\sin\theta/l = 0$$

För små vinklar  $\theta$  är  $\sin\theta \approx \theta$ .

$$d^2\theta/dt^2 + (g/l)\theta = 0, \text{ som ger}$$

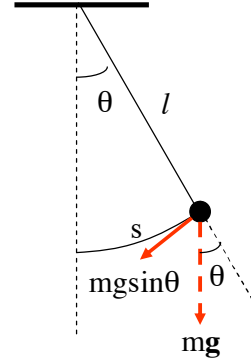
$$\omega = (g/l)^{1/2} \text{ och perioden}$$

$$T = 2\pi(l/g)^{1/2}$$

Lösningen till differentialekvationen ges av

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

där  $\theta_0$  är vinkelamplituden.



### Fysisk pendel

En kropp som roterar fritt kring en axel som ej går genom dess masscentrum kallas **fysisk pendel**.

Newtons kraftekvation för ett sådant system är

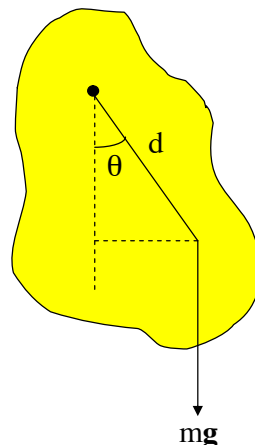
$$-mgd\sin\theta = \tau = I\alpha = I d^2\theta/dt^2$$

Differentialekvationen ( $\sin\theta \approx \theta$  för små  $\theta$ ) är

$$d^2\theta/dt^2 + (mgd/I)\theta = 0$$

där  $\omega = (mgd/I)^{1/2}$  och perioden

$$T = 2\pi(I/mgd)^{1/2}$$



## Torsionspendel

Om ett kropp upphängd i en tråd vrids vinkeln  $\theta$  kommer tråden att utsättas för ett kraftmoment. Anordningen kallas för **torsionspendel**.

Kraftmomentet

$$\tau = -\kappa\theta \text{ där } \kappa \text{ är torsionskonstanten.}$$

När kroppen släpps så kommer den att utföra en roterande svängningsrörelse.

Kraftekvationen ges av

$$\tau = -\kappa\theta = I\alpha = Id^2\theta/dt^2$$

Differentialekvationen blir

$$d^2\theta/dt^2 + (\kappa/I)\theta = 0$$

$$\omega = (\kappa/I)^{1/2}$$

$$T = 2\pi(I/\kappa)^{1/2}$$

