FYSIKUM
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Tentamensskrivning i Elektromagnetism 12 hp
Fredag 24 augusti 2012, kl. 9.15 – 14.00

I problemdelen kan du fritt använda alla kända relationer och data utan härledning (däremot skall du namnge dem du använder). I teoridelen skall du ge en efterfrågad beskrivning eller härleda ett efterfrågat resultat från de utgångspunkter som anges i uppgiften.Lösningar skall vara tillräckligt tydliga och utförliga för att tillåta en bedömning.
Varje helt löst problem ger 4 p. För godkänt krävs minst 14 p. Härvid inräknas bonuspoäng från duggorna i den första tentamens-skrivning du genomför efter den kurs du deltagit i.
Hjälpmedel: Räknedosa, Physics Handbook samt den utdelade Översikt och sammanfattning av kursen i elektromagnetism.

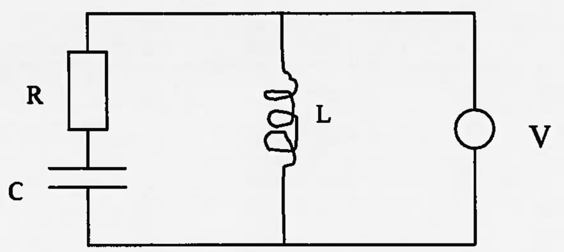
Lycka till! D.L.

Problem

1. En kondensator med kapacitansen C = 80 μF laddas upp till en spänning $V_0 = 230$ V. En resistor med resistansen 1250 Ω ansluts till kondensatorn vid tiden t = 0, så att kondensatorn börjar urladda sig genom resistorn. Efter hur lång tid har spänningen över kondensatorn minskat till 100 V? (4 p)

2. En kondensator består av två cirkulära parallella metallplattor med 10 cm radie. Mediet mellan plattorna är luft. Plattorna befinner sig på avståndet 2 mm från varandra. Kondensatorn är ansluten till en likspänningskälla med den konstanta spänningen 900 V. Hur mycket energi avger likspänningskällan, om avståndet mellan plattorna långsamt minskas till 1 mm? Vi bortser från värmeförluster i ledningarna. (4 p)

3. I kretsen i nedanstående figur ses resistansen R = 80 kΩ, kapacitansen C = 10 nF och induktansen L = 0.5 H. V är en växelspänningsgenerator med frekvensen 100 Hz. Bestäm fasförskjutningen mellan strömmen genom motståndet och strömmen genom spolen. (4p)



(Tips: studera fasförskjutningen mellan de båda strömmarna och spänningen V från generatorn. Använd visardiagram och/eller komplexa metoden.)

4. Ett metallklot med radien R och den statiska laddningen Q är täckt av ett skikt, bestående av ett dielektriskt material med den relativa dielektricitetskonstanten ε_r. Det dielektriska skiktets tjocklek är d.

a) Beräkna det elektriska fältets **E** styrka <u>inne i det dielektriska skiktet</u> som funktion av avståndet r från klotets centrum, dvs för $R < r < (R+d)$. (2p)

b) Beräkna den <u>totala</u> bundna ytladdningen Q_b på det dielektriska skiktets <u>yttre</u> yta. (2p)

Teori

5. Betrakta ett massivt, statiskt laddat metallstycke, som har en godtycklig yttre form och befinner sig i vila i ett statiskt elektriskt fält. Vi utgår från Maxwells ekvationer och de kända ledningsegenskaperna hos vanliga metaller.

a) Visa att det elektriska fältet vid metallens yta är vinkelrätt mot ytan i varje punkt. (1 p)

b) Visa, med hjälp härav, att metallens yta är en ekvipotentialyta. (1 p)

c) Visa att hela laddningen hos metallstycket måste befinna sig på dess yta. (2 p)

6. Härled, med utgångspunkt från definitionen av kapacitans samt Maxwells ekvationer, uttrycket

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(r_y / r_i)}$$

för kapacitansen hos en lång cylindrisk kondensator med längden L, inre radien r_i och yttre radien r_y samt med luft i fältområdet. Vilka approximationer gör du? (4 p)

7. a) Skriv upp rot **E**, dvs rotationen hos ett elektriskt fält **E**, i cartesiska koordinater (x,y,z). Visa med hjälp härav att om ett elektriskt fält **E** är konservativt så är rot **E** = 0. (2p)
(Om räkneregler med operatorerna grad, div eller rot används i uppgift (a), så måste dessa regler bevisas.)

b) Visa, att om vi antar att fälten **E** och **B** kan skrivas

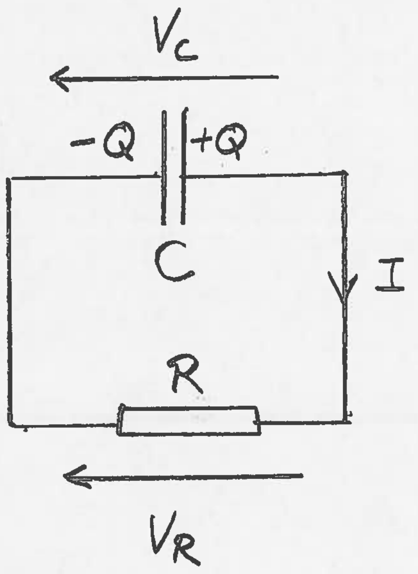
$$\mathbf{E} = -\text{grad}\,\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{B} = \text{rot}\,\mathbf{A}$$

där ϕ är ett skalärfält och **A** ett vektorfält, så uppfylls två av Maxwells ekvationer. (1 p)
(Räkneregler för grad, div och rot får användas i (b) och (c).

c) Visa att om div **A** = 0 så fås Poissons ekvation. (1 p)

(1)

a)



$$\Rightarrow \begin{cases} V_C = Q/C \\ V_R = R \cdot I \\ V_C = V_R \\ I = - \dfrac{dQ}{dt} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{Q}{C} = RI \quad \longrightarrow \quad \frac{Q}{C} = -R\frac{dQ}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q$$

$$\longrightarrow \quad Q = Q(0)\cdot e^{-t/RC}$$

$$\longrightarrow \quad V_C = V_C(0)\cdot e^{-t/RC}$$

$R = 1250\ \Omega$, $C = 80\cdot 10^{-6}$ F $\longrightarrow RC = 10^{-1}$ s

$V_C(0) = 230$ V

$$\therefore \quad V_C(t) = 230\cdot e^{-10\cdot t} \qquad (t \text{ i } s)$$

Ekvation:

$$100 = 230\cdot e^{-10\cdot t}$$

$$e^{10\cdot t} = 2{,}3 \quad \longrightarrow \quad 10\,t = \ln(2{,}3) = 0{,}833$$

$$\longrightarrow \quad \underline{t = 0{,}0833 \text{ s}}$$

(2) Kondensatorns kapacitans $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

A = plattornas yta

d = avstånd mellan plattorna

Före: $C = C_1 = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \pi \cdot 0.1^2}{0.002} = 0.139 \cdot 10^{-9}$ F

Efter: $C = C_2 = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \pi \cdot 0.1^2}{0.001} = 0.278 \cdot 10^{-9}$ F

Energi lagrad i kapacitansen är

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(CV)^2}{C} = \frac{1}{2} C \cdot V^2$$

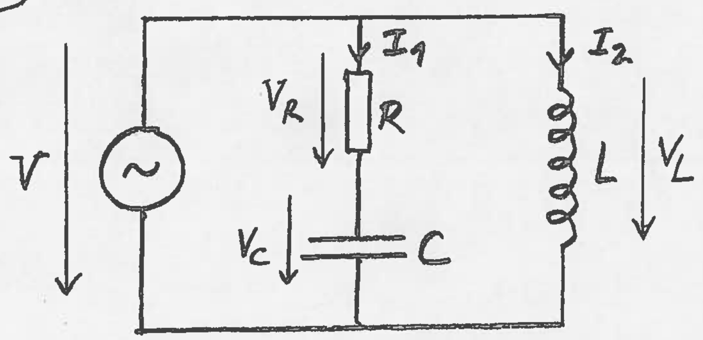
dvs före: $W = W_1 = \frac{1}{2} \cdot 0.139 \cdot 10^{-9} \cdot 900^2 = 5.63 \cdot 10^{-5}$ J

efter: $W = W_2 = \frac{1}{2} \cdot 0.278 \cdot 10^{-9} \cdot 900^2 = 11.26 \cdot 10^{-5}$ J

Skillnaden $W_2 - W_1 = 5.63 \cdot 10^{-5}$ J har tillförts från spänningskällan (Q har ökat).

Svar: $5.63 \cdot 10^{-5}$ J

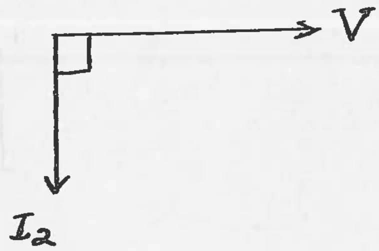
③ LÖSNING MED VISARDIAGRAM:



Vi söker fasförskjutningen mellan I_1 och I_2.

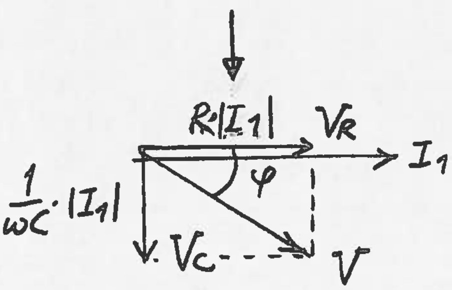
∴ $V = V_L = j\omega L \cdot I_2$ dvs V är 90° <u>före</u> I_2

och amplituderna ges av $|V| = \omega L \cdot |I_2|$. Diagram:



$V = V_R + V_C$ där V_R är <u>i fas</u> med I_1 medan

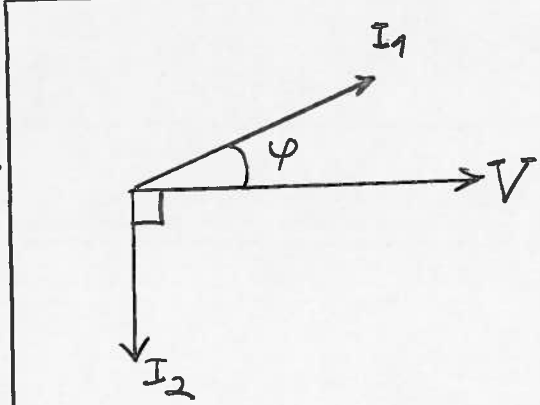
$V_C = \frac{1}{j\omega C} I_2$ är 90° <u>efter</u> I_1. Diagram:



∴ $\tan\varphi = \frac{1/\omega C}{R} = \frac{1}{\omega RC}$

Insatta värden ger $\varphi \approx 63.3^\circ$

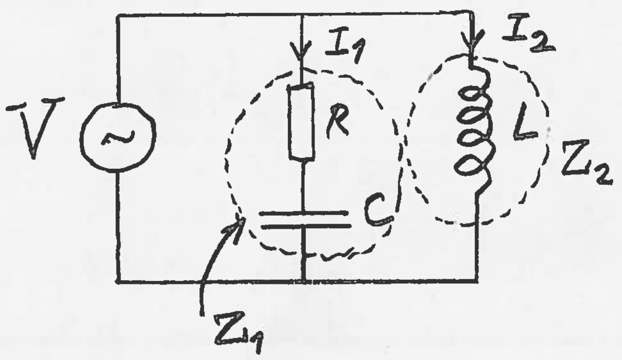
Kombinera diagrammen:



Härav ses att den sökta vinkeln är

$90^\circ + \varphi = 90^\circ + 63.3^\circ = \underline{\underline{153.3^\circ}}$

3 LÖSNING MED KOMPLEXA METODEN OCH VISARDIAGRAM:



Vi söker fasförskjutningen mellan I_1 och I_2

$$Z_1 = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j \cdot \frac{1}{\omega C}$$

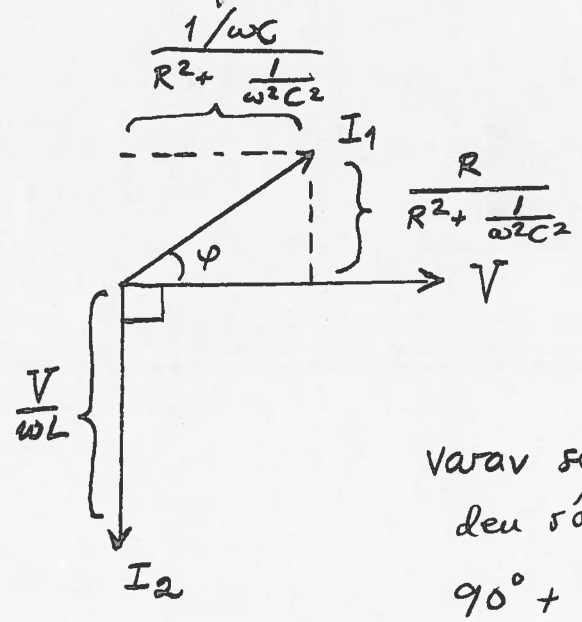
$$Z_2 = j\omega L$$

$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{V}{j\omega L} = -j \cdot \frac{1}{\omega L} V$$

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{V}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{V \cdot \left(R + j \cdot \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} =$$

$$= V \cdot \left(\frac{R}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} + j \cdot \frac{1/\omega C}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right)$$

Visardiagram:



Vi ser att

$$\tan \varphi = \frac{1/\omega C}{R} = \frac{1}{\omega R C}$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 80 \cdot 10^{3}}$$

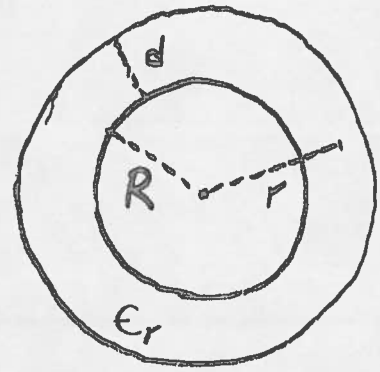
$$= 1.989 \longrightarrow \varphi \approx 63.3^\circ$$

Varav ses från visardiagrammet att den sökta vinkeln är

$$90^\circ + 63.3^\circ = \underline{\underline{153.3^\circ}}$$

④

a)



Metallklotets laddning Q är jämnt fördelad på klotets yta. Gauss' lag ger

$$\oint \bar{D} \cdot d\bar{S} = \int \rho_f \, d\tau = Q$$

för $r > R$. Detta ger p.g.a. den sfäriska symmetrin att

$$4\pi r^2 \cdot D(r) = Q \rightarrow D = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2} \quad (R < r).$$

I dielektrikat gäller $D = \epsilon_r \epsilon_0 E$ så

$$\underline{\underline{E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}\frac{Q}{r^2} \quad (R < r < R+d)}}$$

b) $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \rightarrow P = D - \epsilon_0 E = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$

Vidare ges den bundna ytladdningen av

$\sigma_b = \bar{P} \cdot \hat{n} \rightarrow \sigma_b = P$ p.g.a sfäriska symmetrin.

Vid dielektrikats yttre yta fås alltså

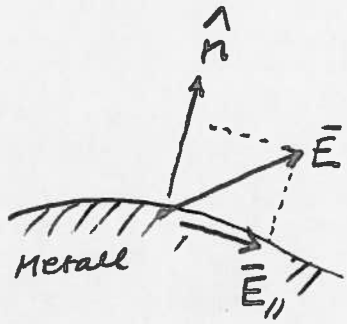
$$\sigma_b = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{(R+d)^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$$

Den totala bundna laddningen vid ytan blir alltså

$$Q_b = \sigma_b \cdot 4\pi \cdot (R+d)^2 = \underline{\underline{Q \cdot \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)}}$$

5

a) Eftersom metallen är statiskt laddad, finns inga strömmar i metallen.



Antag att $\bar{E}$ inte vore vinkelrät mot metallens yta i varje punkt (se figuren). I så fall har $\bar{E}$ en komponent $\bar{E}_{\parallel}$ parallell med metallens yta. Men detta skulle ge upphov till en ström i riktningen $\bar{E}_{\parallel}$ vid metallens yta.

Men det finns ju inga strömmar, enligt antagande. Alltså är $\bar{E}_{\parallel} = 0$, dvs $\bar{E}$ är vinkelrät mot ytan.

b) Med statisk laddning har $\bar{E}$ en potential ϕ.

$$\bar{E} = -\text{grad}\,\phi$$

Låt $d\bar{s}$ vara en förflyttning (liten) längs metallens yta. Då är $\bar{E}\cdot d\bar{s} = 0$, dvs

$$d\phi = d\bar{s}\cdot \text{grad}\,\phi = 0$$

dvs ϕ är konstant, dvs ytan är en ekvipotentialyta.

c) Eftersom strömtätheten $\bar{j} = 0$ överallt inuti metallen, (ingen ström, statisk laddning enbart) så måste vi ha $\bar{E} = 0$ inuti metallen. Men då säger Gauss' lag,

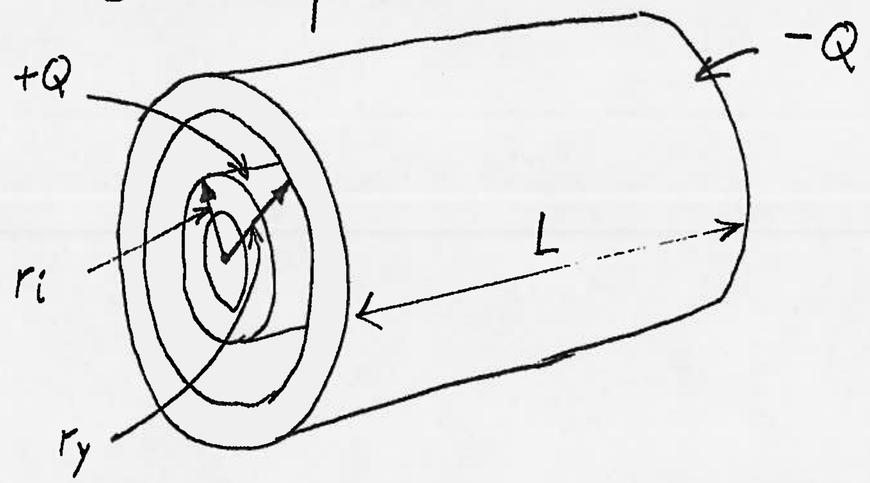
$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

att den inneslutna laddningen är noll för en godtycklig sluten yta S inuti metallen. Eftersom S kan göras godtyckligt liten och placeras varsomhelst i metallen, måste $Q_i = 0$ överallt; dvs det finns ingen nettoladdning inuti metallen, hela laddningen måste vara på dess yta.

(6) Definition av kapacitans: $C = \frac{Q}{V}$

Gauss' lag: $\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

Metod: vi antar viss laddning Q i kapacitansen, räknar ut spänningen V över kapacitansen med Gauss' lag, och får kapacitansen från $C = Q/V$



Approximation: vi bortser från att fältet inte är helt cylindersymmetriskt vid ändarna. Vidare antar vi $\epsilon_r = 1$ för luft.

Gauss lag tillämpad på cylinder med radie r sådan att $r_i < r < r_y$ ger

$$E \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q/L}{r}$$

Spänningen mellan cylindrarna blir (utan tecken)

$$V = \left| \int_{r_i}^{r_y} -E\, dr \right| = \left| -\frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_i}^{r_y} \frac{1}{r}\, dr \right| = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_y}{r_i}\right)$$

Således fås kapacitansen

$$C = \frac{Q}{\left(\frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0}\right) \ln\left(\frac{r_y}{r_i}\right)} = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(r_y/r_i)}$$

V.S.B.

⑦

a) $\text{rot}\,\bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \frac{\partial}{\partial x} & E_x \\ \hat{y} & \frac{\partial}{\partial y} & E_y \\ \hat{z} & \frac{\partial}{\partial z} & E_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) - \hat{y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$

$+ \hat{z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$

Om $\bar{E}$ är konservativt, så har $\bar{E}$ en potential ϕ så att

$\bar{E} = -\text{grad}\,\phi = -\hat{x}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \hat{y}\frac{\partial \phi}{\partial y} - \hat{z}\frac{\partial \phi}{\partial z}$

dvs $E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$. Härav fås

$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = 0$

och liknande för $\hat{y}$- och $\hat{z}$-komponenterna av rot $\bar{E}$.

$\therefore$ rot $\bar{E} = 0$.

b) $\bar{B} = \text{rot}\,\bar{A} \longrightarrow \text{div}\,\bar{B} = \text{div}\,(\text{rot}\,\bar{A})$

Men $\text{div}(\text{rot}\,\bar{A}) = 0$ varav $\underline{\underline{\text{div}\,\bar{B} = 0}}$ (Gauss' lag för magnetiska fältet)

$\bar{E} = -\text{grad}\,\phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$

$\downarrow$

$\text{rot}\,\bar{E} = -\text{rot}\,(\text{grad}\,\phi) - \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\,\bar{A})$

Men $\text{rot}(\text{grad}\,\phi) = 0$ och $\text{rot}\,\bar{A} = \bar{B}$ varav

$\underline{\underline{\text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}}$ (Faradays lag)

c) Om $\text{div}\,\bar{A} = 0$ fås

$\text{div}\,\bar{E} = -\text{div}\,(\text{grad}\,\phi) - \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\,\bar{A}) = -\text{div}(\text{grad})\phi =$

$= -\Delta\phi$

Men $\text{div}\,\bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Gauss' lag) varav fås $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

(Poissons ekvation)