FYSIKUM
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Tentamensskrivning i Elektromagnetism 12 hp
Onsdag 13 juni 2012, kl. 9.15 – 14.00

I problemdelen kan du fritt använda alla kända relationer och data utan härledning (däremot skall du namnge dem du använder). I teoridelen skall du ge en efterfrågad beskrivning eller härleda ett efterfrågat resultat från de utgångspunkter som anges i uppgiften. Lösningar skall vara tillräckligt tydliga och utförliga för att tillåta en bedömning.
Varje helt löst problem ger 4 p. För godkänt krävs minst 14 p. Härvid inräknas bonuspoäng från duggorna i den första tentamens-skrivning du genomför efter den kurs du deltagit i.
Hjälpmedel: Räknedosa, Physics Handbook samt den utdelade Översikt och sammanfattning av kursen i elektromagnetism.

Lycka till! D.L.

Problem

1. I mitten av en lång cylindrisk spole med 2000 varv, radien 5 cm och längden 1 m placeras en liten, kort spole med kvadratiskt tvärsnitt, 100 varv och sidan 0.5 cm. Spolarnas symmetri-axlar är parallella. Mediet inne i spolarna är luft. Beräkna den ömsesidiga induktansen. (4 p)

2. a) En ring av plast med radien 10 cm har tillförts laddningen 10 μC, vilken fördelats jämnt längs ringen. Ringen roterar i sitt eget plan runt sin mittpunkt M med 1000 varv per sekund. Beräkna styrkan i punkten M av det magnetfält som härigenom alstras. (1.5 p)
b) I en ring av koppar med radien 10 cm har man, med hjälp av en liten strömkälla belägen någonstans på ringen, fått en ström med styrkan 10 mA. Beräkna styrkan, i ringens mittpunkt M, av det magnetfält som härigenom alstras. (1.5 p)
c) Antag nu att koppar-ringen, med sin strömkälla, roterar på samma sätt som plast-ringen i (a), med 1000 varv per sekund. Vilket magnetfält fås då i mittpunkten M? (1 p)

3. En laddning Q är homogent fördelad i volymen mellan två koncentriska sfäriska ytor, den inre ytan med radie R_1 och den yttre med radie R_2. Elektriska fält från andra laddningar kan försummas.
a) Låt r vara avståndet från centrum. Beräkna den elektriska fältstyrkan $E(r)$ för $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ och $r > R_2$. (3 p)
b) Beräkna divergensen div **E** hos det elektriska fältet **E** i områdena $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ och $r > R_2$. (1 p)

4. En kvadratisk ledande slinga med självinduktansen L och totala resistansen R roterar med vinkelhastigheten ω mellan polerna på en kraftig permanentmagnet. Fältet från permanent-magneten ger ett varierande magnetiskt flöde $\phi_p(t) = \phi_p(0)\cdot\cos(\omega t)$ genom slingan. Det totala magnetiska flödet genom slingan är detta $\phi_p(t)$ plus det extra magnetiska flöde som orsakas av den ström som uppkommer i slingan.
a) Använd Faradays lag för att härleda en differentialekvation för strömmen i slingan som funktion av tiden. (2 p)
b) Beräkna strömmens amplitud som funktion av $\phi_p(0)$, R, L och ω. (Tips: komplex representation torde vara praktiskt.) (2 p)

Teori

5. Använd Gauss' lag och lämpliga, fysikaliskt motiverade symmetriargument för att beräkna den elektriska fältstyrkan – styrka och riktning – omedelbart utanför en elektrostatiskt laddad ledares yta. Ytan behöver inte vara plan. Anta att ytladdningstätheten σ är känd. (4 p)

6. En krets består av en likspänningskälla med elektromotorisk spänning V, kopplad i serie med en resistans R, en induktans L och en strömbrytare. Resistansen R får sitt största bidrag från ett starkt motstånd, samt mindre bidrag från ledningarnas resistans och den inre resistansen hos spänningskällan. Induktansen L hos kretsen består nästan helt av induktansen hos en kraftig solenoid. Vid tidpunkten $t = 0$ sluts strömbrytaren.
a) Utgå från de kända relationerna mellan ström och spänning för en resistans och en induktans. Visa att strömmen i kretsen för $t > 0$ ges av

$$I = \frac{V}{R} \cdot (1 - \exp(-\frac{R}{L}t))$$

(3 p)

b) Vad händer om vi plockar bort solenoiden, dvs har en krets som består enbart av spänningskällan, ledningarna, motståndet och strömbrytaren, kopplade i serie? Är formeln ovan tillämpbar eller inte? Förklara. (1 p)

7. a) Redogör kvalitativt för Hall-efffekten. Förklara (gärna med bilder) varför man med Hall-effektens hjälp kan avgöra om laddningsbärarna i den elektriska strömmen är positiva eller negativa. Vad är sambandet mellan det transversella elektriska fältet, drifthastigheten hos laddningsbärarna och magnetfältets styrka? (4 p)

1) Antag ström I i den långa spolen.
B-fältet i en lång spole ges av

$$B \approx \mu_0 \cdot n \cdot I$$

där n = antal varv/längdenhet. Flödet genom den korta spolen blir

$$\Phi = B \cdot N \cdot l^2$$

där l är kvadratens sida, och N är antalet varv. Den ömsesidiga induktansen ges av

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{B \cdot N \cdot l^2}{I} = \frac{\mu_0 n \, I \cdot N \cdot l^2}{I} =$$

$$= \mu_0 n \cdot N \cdot l^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{2000}{1} \cdot 100 \cdot 0.005^2 =$$

$$\approx \underline{\underline{0.63 \cdot 10^{-5} \ H}}$$

(2) a) Den roterande laddningen utgör en ström

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{10\cdot 10^{-6}\ [C]}{10^{-3}\ [s]} = 10^{-2}\ A$$

(T = tiden för ett varv, Q = totala laddningen)

Magnetfältet i centrum av en cirkulär strömslinga är

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

vilket här (med $r = 0.1$ m) alltså blir

$$B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^{-2}}{2\cdot 0.1} = \underline{\underline{2\pi\cdot 10^{-8}\,[T] \approx 6.3\cdot 10^{-8}\,T}}$$

b) Här fås direkt, med samma formel

$$B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10\cdot 10^{-3}}{2\cdot 0.1} = \underline{\underline{2\pi\cdot 10^{-8}\ [T] \approx 6.3\cdot 10^{-8}\,T}}$$

c) Anta att ledningselektronerna i kopparringen har drifthastigheten v_d, då ringen är i vila. Antag att varje punkt på ringen har hastigheten v då ringen roterar. Medelhastigheten hos ledningselektronerna blir då $v_d \pm v$ (beroende på rotationsriktning); dvs strömtätheten från elektronerna blir $-e\cdot n\cdot(v_d \pm v)$ där n är antalet ledningselektroner per volymsenhet. Men antalet positiva joner (Cu^+) per volymsenhet är också n, vilket ger en strömtäthet $+e\cdot n\cdot(\pm v)$. Den totala strömtätheten blir alltså

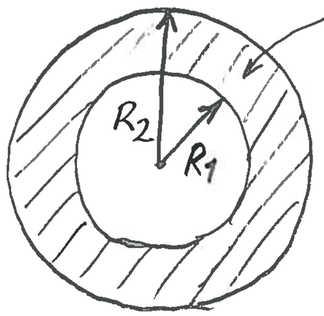
$$-e\cdot n\cdot(v_d \pm v) + e\cdot n\cdot(\pm v) = -e\cdot n\, v_d$$

dvs den totala strömmen blir samma som då ringen var i vila. Således

$$\underline{\underline{B = 2\pi\, 10^{-8}\,[T] \approx 6.3\cdot 10^{-8}\,T}}$$

③

a)



Laddningstäthet $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}$

Gauss' lag:

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{\text{innesluten laddning}}{\epsilon_0}$$

Tillämpat på sfär med radien r fås

$E \cdot 4\pi r^2 = 0$ för $r < R_1$ $\longrightarrow$ $\underline{\underline{E = 0, \ r < R_1}}$

$E \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\epsilon_0}$ för $r > R_2$ $\longrightarrow$ $\underline{\underline{E = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}, \ r > R_2}}$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3\right) =$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad R_1 < r < R_2,$$

dvs

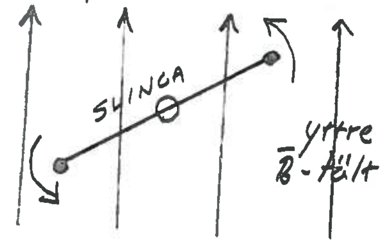
$$\underline{\underline{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}, \quad R_1 < r < R_2}}$$

b) Gauss' lag på differentiell form, $\operatorname{div} \bar{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$, ger direkt

$\underline{\underline{\operatorname{div} \bar{E} = 0 \quad r < R_1 \text{ och } r > R_2}}$

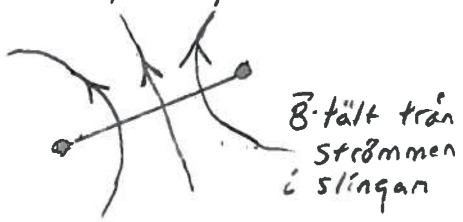
$$\underline{\underline{\operatorname{div} \bar{E} = \frac{Q/\epsilon_0}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}}} \quad R_1 < r < R_2$$

4) a) Flödet ϕ_p från permanent magneten genom slingan ges av



$$\phi_p = \phi_p(0)\cdot\cos(\omega t) \equiv \phi_p(0)\cos\theta$$

Flödet genom slingan från strömmen (i) i slingan ges av



$$\phi_s = L\cdot i$$

Totala flödet genom slingan är

$$\phi = \phi_p + \phi_s$$

Ems $\mathcal{E}$ i slingan enligt Faradays lag:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\phi_p + \phi_s) = -\frac{d}{dt}\left(\phi_p(0)\cdot\cos(\omega t)\right) - L\frac{di}{dt} =$$

$$= \omega\,\phi_p(0)\sin(\omega t) - L\frac{di}{dt}$$

Härav fås strömmen i slingan med formeln $\mathcal{E} = r\cdot i$, dvs

$$r\cdot i = \omega\,\phi_p(0)\sin(\omega t) - L\frac{di}{dt} \longrightarrow \boxed{L\frac{di}{dt} + r\cdot i = \omega\,\phi_p(0)\cdot\sin(\omega t)}$$

b) Skriv ekvationen som

$$L\frac{di}{dt} + r\cdot i = -\frac{d}{dt}\left(\phi_p(0)\cdot\cos(\omega t)\right)$$

Inför komplex representation: $i = \mathrm{Re}\left[i_0 e^{j\omega t}\right] \rightarrow \frac{di}{dt} = j\omega i$

$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\right]$$

Ekvationen blir

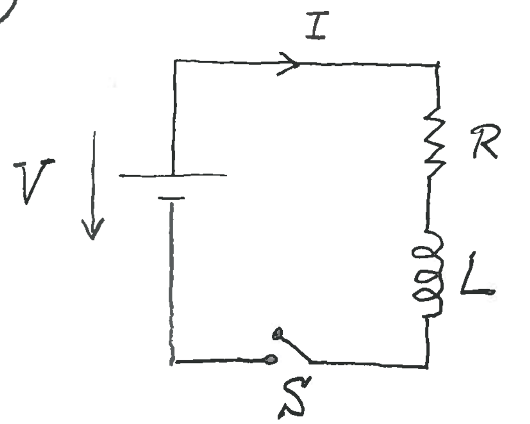
$$j\omega L\cdot i + r\,i = -j\omega\,\phi_p(0)\cdot e^{j\omega t}$$

$$\therefore\ i = -\frac{j\omega\,\phi_p(0)\,e^{j\omega t}}{r + j\omega L}$$

Amplituden blir

$$\boxed{|i| = \frac{\omega\,\phi_p(0)}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}}$$

(6)



a) Då strömbrytaren S slutits får vi

$$V = RI + L\frac{dI}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}$$

Lösning till homogena ekvationen $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0$ är

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

En partikulär lösning är $I = \frac{V}{R}$. Fullständig lösning alltså

$$I = \frac{V}{R} + I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Om strömbrytaren slutes vid $t=0$ har vi, vid $t=0$,

$$I = \frac{V}{R} + I_0 = 0 \longrightarrow I_0 = -\frac{V}{R}$$

Varav

$$I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

V.S.B

b) Om vi plockar bort solenoiden, så finns ändå självinduktansen hos den <u>återstående</u> kretsen kvar ($L = \phi / I$, där ϕ är flödet genom kretsen vid strömmen I). Därför är formeln fortfarande tillämpbar, även om värdet av L är mycket mindre.

(5), (7) Se kurslitteratur eller föreläsningskopior.