FYSIKUM
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Tentamensskrivning i Elektromagnetism 12 hp

Måndag 12 mars 2012, kl. 9.15 – 14.00

I problemdelen kan du fritt använda alla kända relationer och data utan härledning (däremot skall du namnge dem du använder). I teoridelen skall du ge en efterfrågad beskrivning eller härleda ett efterfrågat resultat från de utgångspunkter som anges i uppgiften.Lösningar skall vara tillräckligt tydliga och utförliga för att tillåta en bedömning.
Varje helt löst problem ger 4 p. För godkänt krävs minst 14 p. Härvid inräknas bonuspoäng från duggorna i den första tentamens-skrivning du genomför efter den kurs du deltagit i.
Hjälpmedel: Räknedosa, Physics Handbook samt den utdelade Översikt och sammanfattning av kursen i elektromagnetism.

$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm

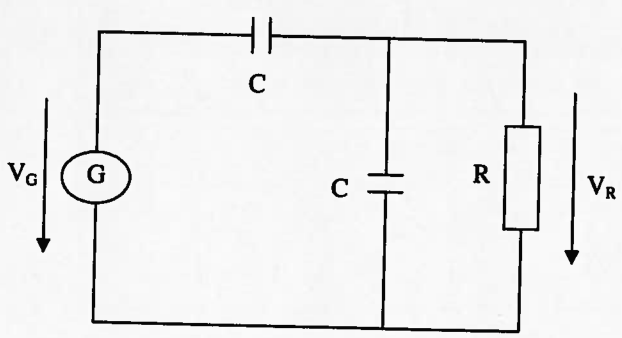
Lycka till! D.L.

Problem

1. Två punktladdningar, Q_1 = Q och Q_2 = - 2Q befinner sig på ett avstånd d från varandra.
a) Ytterligare en punktladdning Q_3 = - Q placeras mitt emellan dem. Hur mycket arbete krävs för detta, om vi antar att Q_3 hämtades från ett mycket stort avstånd? (2 p)
b) Hur stor är den totala elektrostatiska energin för systemet med tre laddningar? (2 p)

2. Ett metalliskt klot med radien R befinner sig i centrum av ett metalliskt sfäriskt skal med innerradien R_1 ($R_1 > R$) och ytterradien R_2. Klotet har den statiska laddningen $2Q$ medan skalet har den statiska laddningen $-Q$. Sfärisk symmetri kan antas.
a) Beräkna det elektriska fältets styrka $E(r)$ för $R < r < R_1$ och för $r > R_2$. (2 p)
b) Beräkna den totala laddningen på skalets insida och på dess utsida. (2 p)

3. I nedan visade krets åstadkommer generatorn G en sinusformad spänning V_G med vinkelfrekvensen ω. Kretsen innehåller i övrigt två lika stora kapacitanser C och en resistans R.
a) Beräkna, med komplex representation, den komplexa spänningen V_R över resistansen R, uttryckt i V_G och ωRC. (Tips: det kan underlätta att se kretsen som en spänningsdelare.) (2 p)
b) Beräkna fasförskjutningen hos V_R relativt V_G, uttryckt i ωRC. (2 p)



4. Hos en plattkondensator har vardera plattan en yta $A = 0.01\ m^2$. Avståndet mellan plattorna är $d = 0.001$ m. Utrymmet mellan plattorna är fyllt av ett isolerande material med relativa dielektriska konstanten $\varepsilon_r = 5$. Över plattkondensatorn läggs en sinusformad växelspänning $V = V_0 \cdot \sin(\omega t)$ med amplituden $V_0 = 25$ V och vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi \cdot 50$ radianer /s.
a) Härled en formel för den bundna strömtätheten J_P i det isolerande materialet, uttryckt i V_0, d, ω, t och den dielektriska konstanten för vacuum ε_0. (3 p)
b) Beräkna amplituden hos den bundna strömmen i det isolerande materialet, uttryckt i ampere. (1 p)

Teori

5. En sysslolös ingenjör A har hittat en elektronisk komponent med okänt innehåll. Den ser ut som en liten svart plastbit med två anslutningstrådar. A kopplar en växelspänning V till dessa anslutningstrådar varvid en växelström I flyter igenom komponenten, som snabbt blir ganska varm. Visa, med utgångspunkt från definitionerna av spänning och ström, att effektutvecklingen i komponenten ges av

$$P = V_{RMS} \cdot I_{RMS} \cdot \cos(\phi)$$

där V_{RMS} och I_{RMS} är spänningens och strömmens effektivvärden (definiera dessa!) och ϕ är fasskillnaden mellan ström och spänning. (4 p)

6. *a)* Ge ett exempel på en situation, där den elektriska strömtätheten är noll överallt i en ledare trots att den makroskopiska elektriska fältstyrkan i ledaren är skild från noll. (1 p)
b) Beskriv kortfattat hur man kan använda 2 spolar, lite järn och en likspänningskälla på 20 V för att åstadkomma spänningar på tusentals volt. (1 p)
c) Tänk dig att den kände trollkarlen Gandalf genomför följande två försök.
A) Han låter en ring av guld föras med jämn hastighet mellan polerna på en stillastående, hästsko-formad permanentmagnet . Ringens plan är vinkelrätt mot fältlinjerna.
B) Han låter istället permanentmagneten röra sig förbi den stillastående ringen, på ett sådant sätt att ringen passerar mellan magnetens poler.
I vilket eller vilka av dessa båda försök uppstår en elektromotorisk spänning i ringen? I vilket eller vilka av dessa båda försök uppstår ett icke-konservativt elektriskt fält i ringen? Förklara kortfattat på grundval av kända fysiska lagar. (2 p)

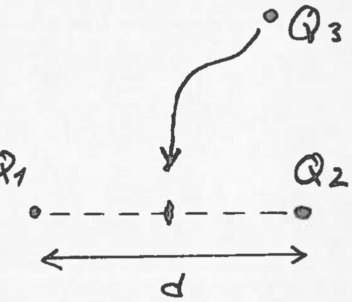
7. *a)* En lång, rak strömförande tråd omges av ädelgasen argon. Visa, med utgångspunkt från Maxwells ekvationer, att styrkan hos det stationära magnetiska fältet **B** kring tråden ges av

$$B = \frac{\mu_r \mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

där I är den konstanta strömstyrkan, μ_r är gasens relativa permeabilitet och r avståndet från tråden. (2 p)
b) Den relativa permeabiliteten hos argon är en liten aning mindre än precis 1. Visa med en tydlig skiss hur fältet **M** i gasen, dvs magnetiseringen av gasen, ser ut! Var mycket noga med att motivera riktningen hos fältet **M** i relation till riktningen hos strömmen I. (2 p)

(1)

a) $Q_1 = Q$, $Q_2 = -2Q$, $Q_3 = -Q$ } Givna laddningar



Potentialen från Q_1 och Q_2 i en punkt $\bar{r}$ kan skrivas

$$\phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{|\bar{r}-\bar{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{|\bar{r}-\bar{r}_2|}$$

där $\bar{r}_1$ och $\bar{r}_2$ är positionen hos Q_1 resp Q_2.

Potentialen på oändligt avstånd ($|\bar{r}| \to \infty$) är $\phi(\infty) = 0$. Potentialen i punkten mitt emellan Q_1 och Q_2 är

$$\phi(\text{mittpunkt}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{d/2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{d/2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{d/2}\left(Q - 2Q\right) = \underline{\underline{-\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \cdot d}}} \quad \text{(Svar (a))}$$

Arbetet att föra Q_3 från oändligheten till en punkt mitt emellan Q_1 och Q_2 blir

$$W = Q_3 \cdot \left(\phi(\text{mittpunkt}) - \phi(\infty)\right) =$$

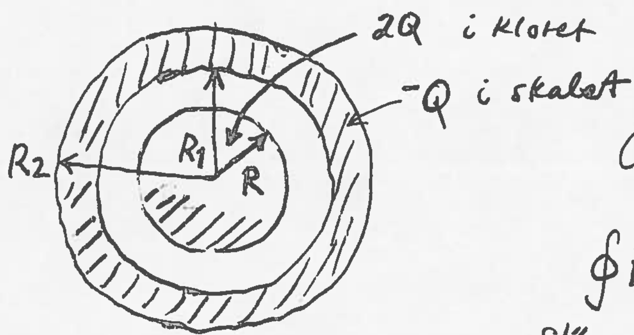
$$= -Q \cdot \left(-\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 d}\right) = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

b) Den elektrostatiska energin blir

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_1 Q_2}{d} + \frac{Q_1 Q_3}{d/2} + \frac{Q_2 Q_3}{d/2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2Q^2}{d} - \frac{2Q^2}{d} + \frac{4 \cdot Q^2}{d}\right] = \underline{\underline{0}} \quad \text{(Svar (b))}$$

(2)



Gauss lag:

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, d\tau$$

Sfär radie r

a) För $R < r < R_1$ fås (med $\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = E \cdot 4\pi r^2$)

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{2Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{r^2} \qquad (R < r < R_1)$$

För $r > R_2$ fås

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{2Q - Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \qquad (r > R_2)$$

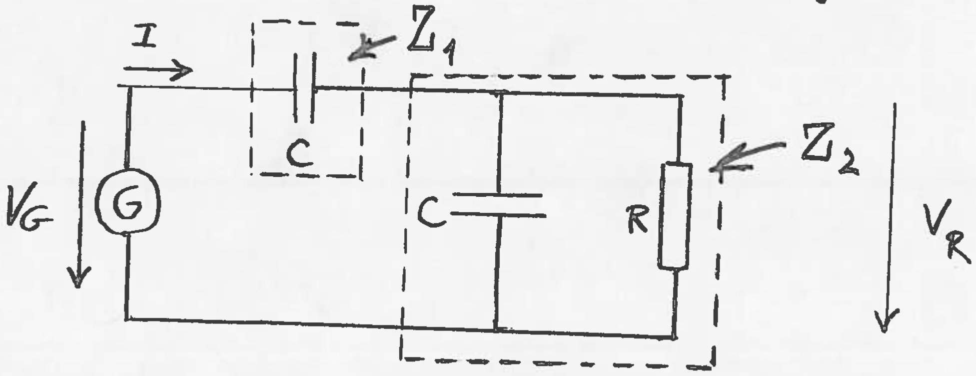
b) Antag $R_1 < r < R_2$. Då är Gauss-sfären inne i det ledande skalet, varför $\bar{E} = 0$. Enl. Gauss lag fås att den inneslutna laddningen $= 0$. Eftersom r kan vara godtyckligt nära R_1, fås härav att den totala laddningen på skalets insida måste vara $= -2Q$

Eftersom skalets totala laddning är $-Q$ innebär detta att den totala laddningen på skalets utsida måste vara $+Q$

(3)

a) Man ser att

$$V_G = I \cdot (Z_1 + Z_2) \quad \text{där} \quad Z_1 = \frac{1}{j\omega C} \quad \text{och} \quad \frac{1}{Z_2} = j\omega C + \frac{1}{R}$$



Vidare $V_R = I \cdot Z_2$. Således

$$V_R = V_G \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = V_G \cdot \frac{1}{\frac{Z_1}{Z_2} + 1} = V_G \cdot \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}\left(j\omega C + \frac{1}{R}\right) + 1}$$

$$= V_G \cdot \frac{1}{2 + \frac{1}{j\omega RC}} = \underline{\underline{V_G \cdot \frac{j\omega RC}{1 + 2j\omega RC}}} \quad \text{(Svar (a))}$$

b) Fasförskjutningen φ hos V_R relativt V_G ges av*

$$\tan(\varphi) = \frac{Im(X)}{Re(X)} \quad \text{där} \quad X = \frac{j\omega RC}{1 + 2j\omega RC}$$

$$X = \frac{j\omega RC \cdot (1 - 2j\omega RC)}{1 + 4\omega^2 R^2 C^2} = \frac{2\omega^2 R^2 C^2 + j\omega RC}{1 + 4\omega^2 R^2 C^2}$$

Varav ses att

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega RC}{2\omega^2 R^2 C^2} = \frac{1}{2\omega RC}$$

$$\therefore \underline{\underline{\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{2\omega RC}\right)}} \quad \text{(Svar (b))}$$

* $V_R = V_G \cdot X$

$\Updownarrow$

$$|V_R| \cdot e^{j\varphi_R} = |V_G| e^{j\varphi_G} \cdot |X| \cdot e^{j\varphi_X}$$

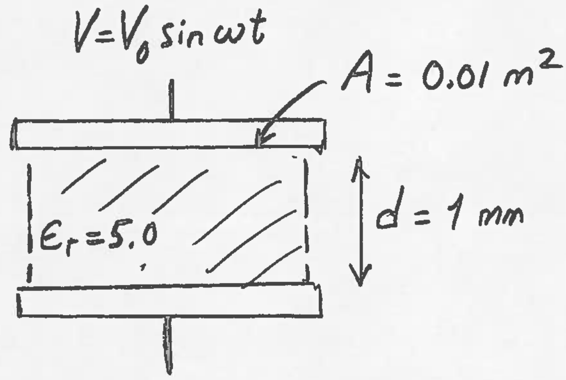
$\Downarrow$

$\varphi_R - \varphi_G = \varphi_X$ där

$$\tan \varphi_X = \frac{Im(X)}{Re(X)}$$

④

a)



$V_0 = 25\ [V]$

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50\ [rad/s]$

Elektriska fältet mellan plattorna är $E = \frac{V}{d} = \frac{V_0}{d} \sin \omega t$.

$\bar{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \bar{E} = 5 \epsilon_0 \bar{E}$

$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \longrightarrow P = D - \epsilon_0 E = \epsilon_0 \cdot 5E - \epsilon_0 E = 4\epsilon_0 E =$

$= 4\epsilon_0 \frac{V}{d} = 4\epsilon_0 \frac{V_0}{d} \sin \omega t$

Bundna strömtätheten ges av

$$J_P = \frac{dP}{dt}$$

dvs

$$J_P = \frac{d}{dt}\left(4\epsilon_0 \frac{V_0}{d} \sin \omega t\right) = \underline{4\epsilon_0 \frac{V_0}{d} \omega \cos \omega t} \quad \text{(svar (a))}$$

b) Amplituden hos J_P blir

$$J_{P_0} = 4\epsilon_0 \frac{V_0}{d} \omega = \underbrace{4.0}_{\epsilon_r - 1} \cdot \underbrace{8.85 \cdot 10^{-12}}_{[As/Vm]} \cdot \frac{\overbrace{25}^{[V]}}{\underbrace{0.001}_{[m]}} \cdot 2\pi \cdot \underbrace{50}_{[s^{-1}]} = 2.780 \cdot 10^{-4}\ [A/m^2]$$

Den bundna strömmens amplitud fås genom att multiplicera med ytan:

$$I_{P_0} = J_{P_0} \cdot A = 2.780 \cdot 10^{-4} \cdot 0.01 = \underline{\underline{2.780 \cdot 10^{-6}\ A}}$$

(Samband med strömmen I genom kondensatorn: Vi har $I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} \omega \cdot V_0 \cos(\omega t)$, dvs denna ström har amplituden $\frac{\epsilon_r \epsilon_0 A \cdot \omega \cdot V_0}{d} = 5\epsilon_0 \frac{V_0}{d} \omega \cdot A = \frac{5}{4} \cdot 2.780 \cdot 10^{-6} = 3.475 \cdot 10^{-6}\ A$.)

(5)

Momentana effektförlusten är *

$$\begin{cases} i(t) = i_0 \sin \omega t \\ v(t) = v_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$P_{mom} = v \cdot i = v(t) \cdot i(t)$$

Under en period uträttas arbetet

$$W = \int_0^T P_{mom}\, dt = \int_0^T v(t)\, i(t)\, dt =$$

$$= \int_0^T v_0 \sin(\omega t + \varphi) \cdot i_0 \sin(\omega t)\, dt =$$

$$= i_0 v_0 \int_0^T \sin \omega t \cdot [\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi]\, dt =$$

$$= i_0 v_0 \int_0^T \sin^2(\omega t) \cdot \cos \varphi\, dt + \underbrace{i_0 v_0 \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi\, dt}_{0}$$

$$= i_0 v_0 \cos \varphi \underbrace{\int_0^T \sin^2 \omega t\, dt}_{T/2} = i_0 v_0 \frac{T}{2} \cos \varphi$$

∴ Medeleffekt under 1 period T är $\left(I_{rms} = \frac{i_0}{\sqrt{2}},\ V_{rms} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \right)$

$$P = \frac{i_0}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi = I_{rms} V_{rms} \cos \varphi$$

V.S.B.

---

* Motivering:

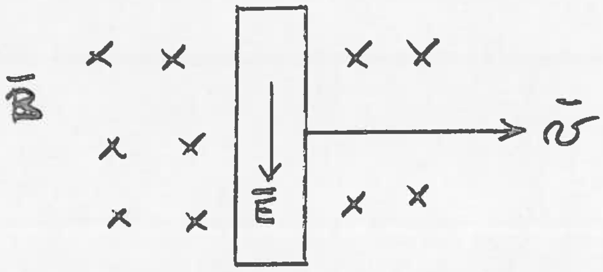
spänningen v = arbetet per laddningsenhet, vid tiden t, för att föra laddning genom komponenten

strömmen i = laddning per tidsenhet genom komponenten, vid tiden t

∴ $P_{mom} = v \cdot i$ = arbete per tidsenhet vid tiden t

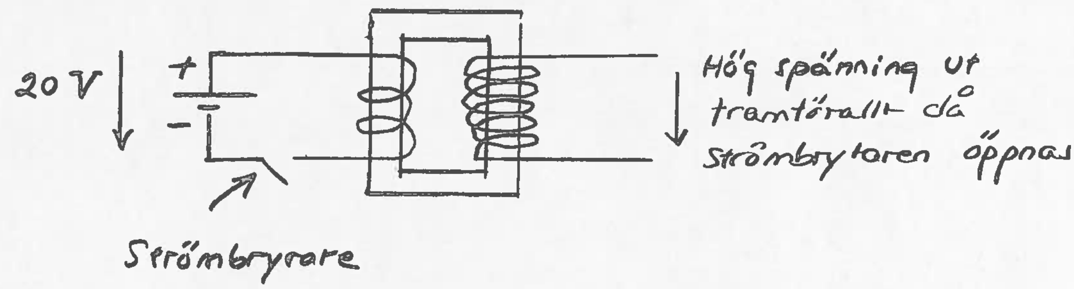
⑥ Lösning i korthet:

a) Stav av metall i rörelse i ett magnetfält:

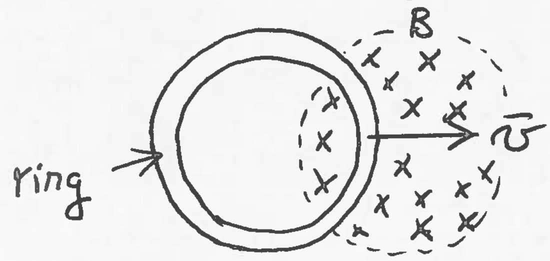


Kraft på en elektron $\bar{F} = -e(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) = 0$
om $\bar{E} = -\bar{v} \times \bar{B} = 0$ (enl. fig.) $\longrightarrow$ ingen ström

b) Gnistinduktorn, i princip:

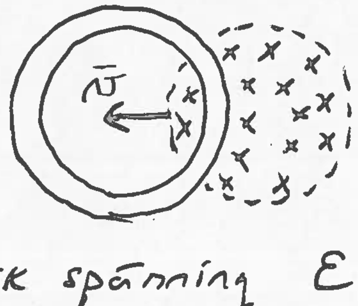


c) I)



Rörelse-ems
$$\mathcal{E} = \oint (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{r}$$
($\bar{E}$-fältet i ringen är konservativt)

II)



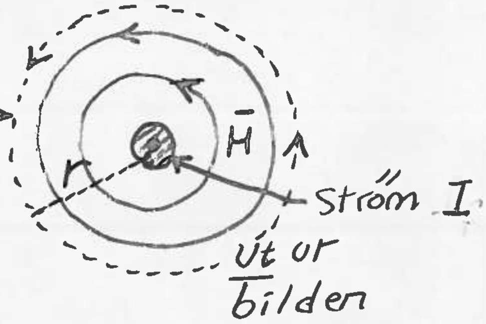
Faradays lag
$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = -\int \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$$
($\bar{E}$ = icke-konservativt fält)

Elektromotorisk spänning $\mathcal{E}$ fås i båda fallen också enligt $\mathcal{E} = -\dfrac{d\phi}{dt}$.

(7) a) Amperes lag $\oint \bar{H} \cdot d\bar{r} = \int \left(\bar{J}_f + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) \cdot d\bar{S}$ ger, med konstant ström (stationär situation, $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = 0$) att

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{r} = I$$

där I är strömmen i tråden. $\bar{H}$-fältet är riktad enligt figuren t.h. (högerhandsregeln). Låt integrationsvägen vara en högerorienterad cirkel med radie r, så fås



$$H \cdot 2\pi r = I$$

Eftersom $\bar{B} = \mu_r \mu_0 \bar{H}$ fås $B = \mu_r \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$ V.S.B.

b) Vi har

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H} + \mu_0 \bar{M} \rightarrow \mu_r \mu_0 \bar{H} = \mu_0 \bar{H} + \mu_0 \bar{M}$$

$$\rightarrow (\mu_r - 1)\bar{H} = \bar{M}$$

Men $\mu_r - 1 < 0$ varav följer att $\bar{M}$ är <u>motriktat</u> $\bar{H}$ (och motriktat $\bar{B}$), dvs riktat enligt figuren:

(Gasen är alltså diamagnetisk)