FYSIKUM
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Tentamensskrivning i Elektromagnetism 12 hp
Fredag 26 augusti 2011, kl. 9.00 – 14.00

I problemdelen kan du fritt använda alla kända relationer och data utan härledning (däremot skall du namnge dem du använder). I teoridelen skall du ge en efterfrågad beskrivning eller härleda ett efterfrågat resultat från de utgångspunkter som anges i uppgiften. Lösningar skall vara tillräckligt tydliga och utförliga för att tillåta en bedömning.
Varje helt löst problem ger 4 p. För godkänt krävs minst 14 p, med minst 6p inom antingen problem- eller teoridel. Härvid inräknas bonuspoäng från duggorna i den första tentamens-skrivning du genomför efter den kurs du deltagit i.
Hjälpmedel: Räknedosa, Physics Handbook samt den utdelade Översikt och sammanfattning av kursen i elektromagnetism.

Lycka till! D.L.

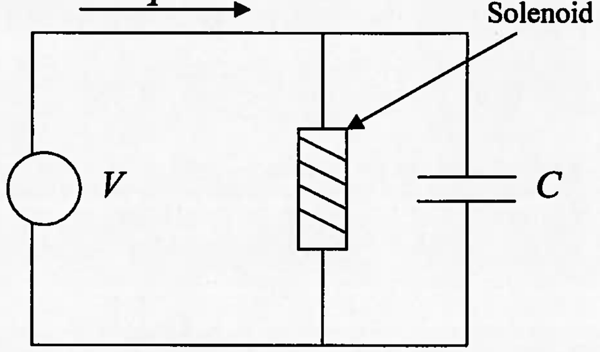
Problem

1. En spänning på 5,0 V läggs över en 4,0 cm lång stav av ett halvledarmaterial, varvid en ström av storleken 2,9 A flyter genom staven. Stavens diameter är 5 mm. Strömmen bärs av $1{,}0 \cdot 10^{23}$ ledningselektroner per kubikmeter. (Bidraget från hål är försumbart.). Beräkna elektronernas mobilitet.

2. a) I en circulär strömslinga med radien 1 cm går en ström på 1 A. Beräkna det största möjliga vridmomentet på slingan, om den befinner sig i ett homogent magnetfält med styrkan 1 T. (2 p)
b) Strömslingan ger ju själv upphov till ett magnetfält. Vad är styrkan hos detta egna magnetfält i slingans centrum? (2 p)

3. En platt circulär spole med 30 varv och radien r = 2,5 cm ligger med vertikal axel på ett bord. På samma bord ligger en lång rak strömförande ledare. Avståndet d från spolens centrum till ledaren är 1 m. Beräkna den ems som induceras i spolen om strömmen i ledaren minskar i jämn takt från 10 A till 5 A på 0,15 s. Använd en lämplig approximation motiverad av att $r \ll d$. (4 p)

4. En solenoid med självinduktansen L och lednings-resistansen R parallellkopplas med en kapacitans C och ansluts till en växelspännings-generator som ger en spänning $V = V_0 \cos \omega t$, där V_0 är amplituden, t är tid och ω är vinkel-frekvensen. Figuren bredvid visar kopplingen.
Beräkna amplituden hos strömmen I som funktion av vinkelfrekvensen ω. (4p)



Teori

5. Härled med utgångspunkt från en av Maxwells ekvationer (lämpligt vald) ett uttryck för det magnetiska fältet inuti en toroid. Du kan anta att fältet är noll utanför toroiden, och att mediet inuti toroiden har den relativa permeabiliteten $\mu_r > 1$. (4 p)

6. a) Härled uttycket för energin hos en laddad plattkondensator med kapacitansen C. (2 p)
   b) Använd resultatet för att, med hjälp av ett enkelt fall, beräkna den lagrade energin per volymsenhet i ett elektriskt fält. (2 p)

7. Betrakta en rörlig och deformerbar metalltråd vars ändpunkter lötts ihop så att tråden bildar en enkel sluten slinga med total resistans R. Anta att denna slinga befinner sig i ett konstant men inte nödvändigtvis homogent magnetfält $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Om slingan rör sig eller deformeras i fältet fås s.k. rörelse-ems $\mathcal{E}$, varigenom en ström $I = \mathcal{E} / R$ fås i slingan. Vi bortser från slingans självinduktans.
a) Formulera en definition av den elektromotoriska spänningen $\mathcal{E}(t)$ i slingan i ett givet ögonblick t. (2 p)
b) Visa, med utgångspunkt från denna definition, samt från den kraft $\mathbf{F} = -e\cdot(\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ som verkar på en elektron som rör sig med hastigheten $\mathbf{V}$ i ett magnetfält $\mathbf{B}$, att den elektromotoriska spänningen i slingan ges av linjeintegralen

$$\mathcal{E}(t) = \oint (\mathbf{v}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{r}$$

där $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ är den hastighet varmed den del av slingan, som befinner sig i positionen $\mathbf{r}$ vid tiden t, rör sig. Kom ihåg att detta inte nödvändigtvis är den hastighet $\mathbf{V}$ varmed elektronerna rör sig! (2 p)

(1) Mobiliteten ges av

$$\mu = \frac{v}{E} = \frac{J/(n \cdot e)}{V/d} = \frac{I/(A \cdot n \cdot e)}{V/d} = \frac{I \cdot d}{V \cdot A \cdot n \cdot e}$$

där

v = laddningsbärarnas driftshastighet

J = strömtätheten

n = antalet laddningsbärare per volymsenhet

e = laddningen (magnitud) hos varje laddningsbärare

E = fältstyrkan i staven

d = Stavens längd

A = stavens tvärsnittsarea

V = spänningen över staven

Enligt uppgift har vi

$I = 2.9\ [A]$

$d = 0.04\ [m]$

$V = 5.0\ [V]$

$A = \pi \cdot 0.0025^2 = 1.963 \cdot 10^{-5}\ [m^2]$

$n = 1.0 \cdot 10^{23}\ [m^{-3}]$

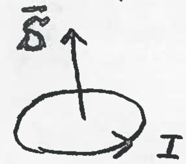
samt $e = 1.602 \cdot 10^{-19}\ [C]$. Således

$$\mu = \frac{2.9 \cdot 0.04}{5 \cdot 1.963 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{23} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}} = 7.38 \cdot 10^{-2} \simeq \underline{\underline{7.4 \cdot 10^{-2}\ m^2/Vs}}$$

2

a) Magnetiska dipolmomentet hos slingan är

$\bar{m} = I \cdot \bar{S}$



där $I = 1$ [A]

och $S = |\bar{S}| = \pi \cdot 0.01^2 \; m^2$.

Vridmomentet i ett fält $\bar{B}$ är

$\bar{\tau} = \bar{m} \times \bar{B}$

dvs maximalt $\tau = |\bar{\tau}|$ är

$\tau = m \cdot B = I \cdot S \cdot B = 1 \,[A] \cdot \pi \cdot 0.01^2 \,[m^2] \cdot 1 \,[T] =$

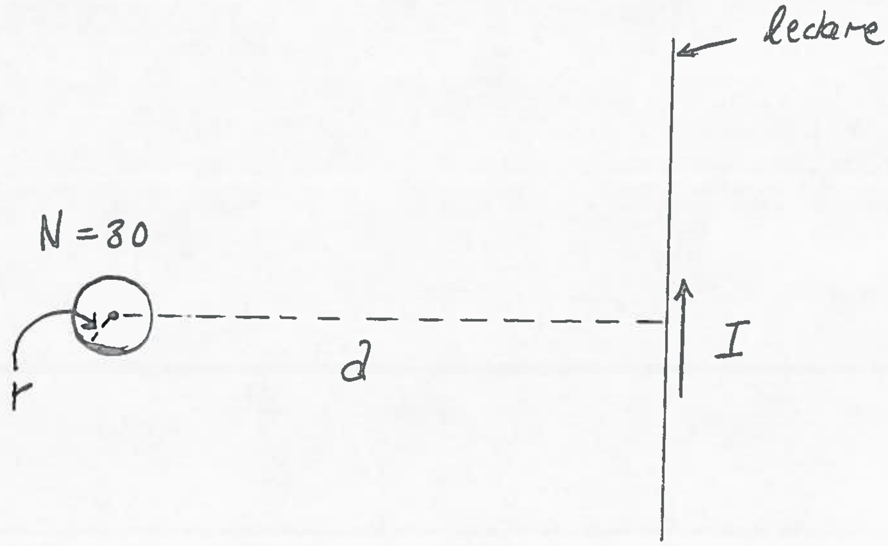
$= \pi \cdot 0.01^2 \,[Nm] \approx \underline{\underline{3.14 \cdot 10^{-4} \,[N \cdot m]}}$

b) Styrkan hos slingans eget magnetfält i slingans centrum ges av

$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2 \cdot 0.01} = 2\pi \cdot 10^{-5} \,[T]$

$\approx \underline{\underline{6.28 \cdot 10^{-5} \,[T]}}$

③



Fältet från ledaren i spolens mittpunkt ges av

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

Totala flödet genom spolen kan approximativt beräknas som

$$\phi \approx N \cdot B \cdot \pi r^2$$

(eftersom $d >> r$, är B approximativt homogent inuti spolen). Inducerad ems i spolen blir

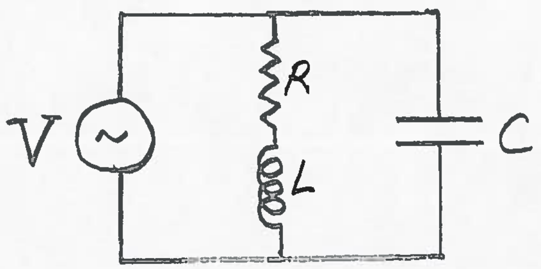
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(N \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \cdot \pi r^2\right) =$$

$$= - N \cdot \frac{\mu_0 r^2}{2d} \cdot \frac{dI}{dt}$$

Vi har $\frac{dI}{dt} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{5[A]}{0.15[s]}$ varav

$$\mathcal{E} = 30 \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.025^2}{2 \cdot 1.0} \cdot \frac{5}{0.15} = \underline{\underline{3.93 \cdot 10^{-7} \text{ V}}}$$

4

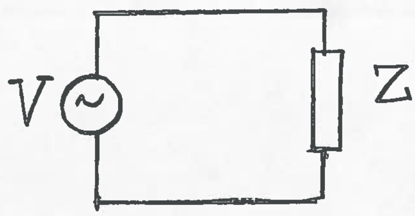


$V = V_0 \cos \omega t$

Komplex representation:

$V = V_0 e^{j\omega t}$ (V_0 reellt)

$V = Z \cdot I \rightarrow I = \dfrac{V}{Z}$



Amplitud hos I ges av

$$|I| = \frac{|V|}{|Z|} = \frac{V_0}{|Z|}$$

Beräkning av Z:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + j\omega L} + \frac{1}{1/j\omega C}$$

(seriekoppling av R och L varefter parallellkoppling med C)

$$\therefore \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{1 + j\omega C(R + j\omega L)}{R + j\omega L} =$$

$$= \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}{R + j\omega L}$$

$$\frac{1}{|Z|} = \left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{|1 - \omega^2 LC + j\omega RC|}{|R + j\omega L|} = \frac{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\therefore |I| = V_0 \cdot \sqrt{\frac{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}{R^2 + (\omega L)^2}}$$

(om $R = 0$ fås $|I| = V_0 \cdot \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$)

(5) Den av Maxwells ekvationer som är lämplig här är

$$\oint \bar{H}\cdot d\bar{r} = \int \left(\bar{J}_f + \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right)\cdot d\bar{S} \quad \text{("Ampères lag")} \qquad (1)$$

Vi kan försumma $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ (stationär eller kvasistationär situation) varav

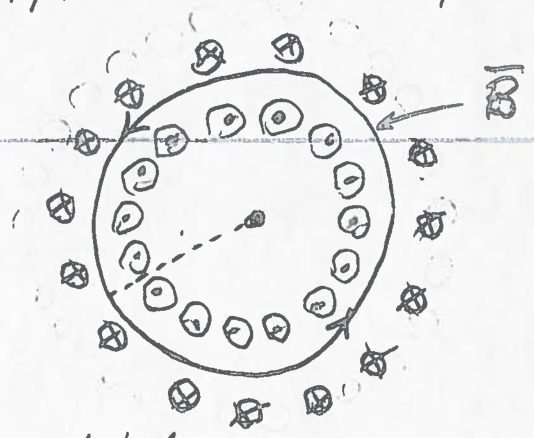
$$\oint \bar{H}\cdot d\bar{r} = \int \bar{J}_f \cdot d\bar{S} = I_f \qquad (2)$$

där I_f är den totala fria ström som går genom den slinga som bildas av integrationsvägen.

Slutligen är $\bar{H} = \frac{1}{\mu_0\mu_r}\bar{B}$ varav

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{r} = \mu_0\mu_r I_f \qquad (3)$$

Denna formel tillämpas på en cirkulär integrationsväg inuti en toroid. (Se fig.). Integrationsvägens radie $= R$. Låt integrationen gå i fältets $\bar{B}$ riktning.



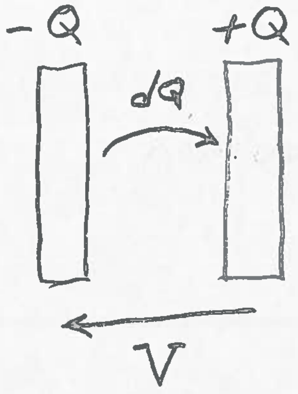
Då fås av (3)

$$B\cdot 2\pi R = \mu_0\mu_r \cdot N I \qquad (4)$$

eftersom $I_f = N\cdot I$ där N är antalet varv och I strömmen i toroiden. Således fås

$$B = \frac{\mu_0\mu_r N I}{2\pi R}$$

⑥ a) Energi lagrad i en kapacitans:



Arbete att flytta liten laddning $dQ > 0$ från (−)-plattan till (+)-plattan är

$$dW = V \cdot dQ$$

Men $V = \frac{Q}{C}$ (def. av C)

∴ Arbete att öka kondensatorns laddning från Q till Q+dQ är

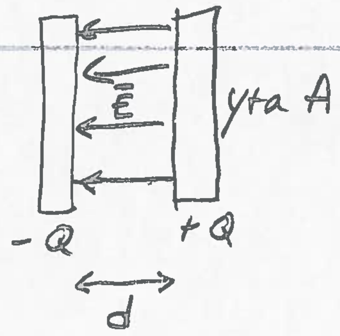
$$dW = V \cdot dQ = \frac{1}{C} Q \cdot dQ$$

∴ Arbete för uppladdning från 0 till Q är

$$W = \int_0^W dW = \int_0^Q \frac{1}{C} Q\,dQ = \frac{1}{C}\int_0^Q Q\,dQ = \underline{\underline{\frac{1}{C}\frac{Q^2}{2}}}$$

vilket är den energi som lagrats i kondensatorn.

b) Energin per volymsenhet:



Betrakta plattkondensator, med luft ≈ vacuum mellan plattorna.

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q/A}{\epsilon_0} \quad \text{(elektriskt fält)}$$

$$\left(\text{eller } E = \frac{V}{d} = \frac{Q}{C \cdot d} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}\right)$$

∴ Lagrad energi $= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(\epsilon_0 E A)^2}{\epsilon_0 A/d} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \cdot \underbrace{Ad}_{\text{volym}}$

∴ Energi per volymsenhet $= \underline{\underline{\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}}$

⑦ a) "Elektromotorisk spänning $\mathcal{E}(t)$ hos en krets i ett visst ögonblick t = det arbete som skulle utföras på en laddning q som förs ett varv runt kretsen av de krafter som verkar på q i just detta ögonblick t, dividerat med q."

b) Om en viss sektion av kretsen, med position $\bar{r}$, rör sig med hastigheten $\bar{v}$ i ögonblicket t, så är Lorentzkraften på en laddning q i denna sektion likamed

$$\bar{F} = q\left(\left(\bar{v}(\bar{r},t) + \bar{v}_d(\bar{r},t)\right) \times \bar{B}(\bar{r})\right)$$

där $\bar{v}_d$ är drifthastigheten (just där och då). Elektromotoriska spänningen ges enl. def. i (a) av

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{q}\oint \bar{F}(\bar{r},t)\cdot d\bar{r}$$

Eftersom integrationsvägen följer kretsen (i ögonblicket t) kan vi skriva $d\bar{r} = \hat{v}_d\, dr$, varav fås

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q}\oint q\left((\bar{v}+\bar{v}_d)\times\bar{B}\right)\cdot\hat{v}_d\, dr =$$

$$= \oint (\bar{v}\times\bar{B})\cdot\hat{v}_d\, dr + \oint \underbrace{(\bar{v}_d\times\bar{B})\cdot\hat{v}_d}_{0}\, dr =$$

$$= \oint (\bar{v}\times\bar{B})\cdot d\bar{r} = \oint \left(\bar{v}(\bar{r},t)\times\bar{B}(\bar{r})\right)\cdot d\bar{r} \qquad \text{V.S.B.}$$

($\bar{F}$ är vinkelrät mot $(\bar{v}+\bar{v}_d)$ men inte (nödvändigtvis) mot $\bar{v}_d$, dvs strömriktningen. Därför kan $\bar{F}$ vidmakthålla en ström, dvs uträtta arbete.)