FYSIKUM
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Tentamensskrivning i Elektromagnetism 12 hp
Fredag 10 juni 2011, kl. 9.00 – 14.00

I problemdelen kan du fritt använda alla kända relationer och data utan härledning (däremot skall du namnge dem du använder). I teoridelen skall du ge en efterfrågad beskrivning eller härleda ett efterfrågat resultat från de utgångspunkter som anges i uppgiften.Lösningar skall vara tillräckligt tydliga och utförliga för att tillåta en bedömning.
Varje helt löst problem ger 4 p. För godkänt krävs minst 14 p , med minst 6p inom antingen problem- eller teoridel. Härvid inräknas bonuspoäng från duggorna i den första tentamens-skrivning du genomför efter den kurs du deltagit i.
Hjälpmedel: Räknedosa, Physics Handbook samt den utdelade Översikt och sammanfattning av kursen i elektromagnetism.

Lycka till! D.L.

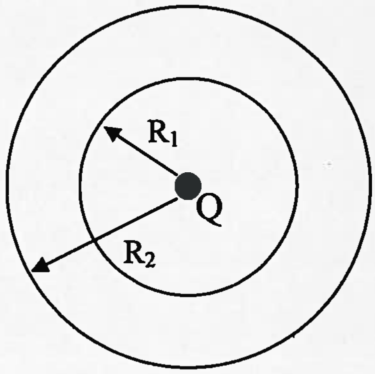
Problem

1. Fyra laddningar på vardera 1 nC sitter fast i hörnen på en kvadrat med sidan 1 cm. Beräkna det arbete som krävs för att minska sidan på kvadraten till 0,5 cm. (4 p)

2. En lång solenoid består av 500 varv isolerad ledningstråd lindade på en pappcylinder. Solenoiden har längden 50 cm och radien 1 cm. En andra, platt spole med 10 varv lindas runt mitten av den långa solenoiden. Ändpunkterna på den platta spolen lämnas fria (ej anslutna till något).
a) Beräkna den ömsesidiga induktansen. (2.5 p)
b) Antag att strömmen i den långa solenoiden ökar med 5 A/s. Beräkna den elektromotoriska spänning som fås mellan 10-varv-spolens ändpunkter. (1.5 p)

3. En impedans består av en resistans $R = 200\ \Omega$ och en kapacitans $C = 5.0\ \mu F$ i serie. Genom denna impedans går en växelström i med frekvensen f (Hz), varvid en växelspänning v fås över impedansen.
a) Rita ett visardiagram som kvalitativt återger fasförskjutningen mellan strömmen i, spänningen v samt spänningarna v_R och v_C över R respektive C. (2 p)
b) Vid vilken frekvens f är fasförskjutningen mellan strömmen i och den totala spänningen v likamed 60^0? (2 p)

4. En punktladdning Q befinner sig i centrum av ett sfäriskt skal bestående av ett dielektriskt (ej ledande) material med den relativa dielektriska konstanten $\varepsilon_r > 1$. Skalets inre radie är R_1 och dess yttre radie är R_2 ($R_2 > R_1$). Sfärisk symmetri kan antas.
a) Beräkna förskjutningsfältet $\mathbf{D}(r)$, det elektriska fältet $\mathbf{E}(r)$ samt potentialen $\phi(r)$ som funktion av avståndet från Q. (2.5 p)
b) Beräkna den totala bundna ytladdningen på den inre ytan av det sfäriska skalet. (1.5 p)



Teori

5. a) Härled, med utgångspunkt från Gauss lag, ett uttryck för det elektriska fältet **E** kring en oändligt lång, laddad tråd som funktion av avståndet r från tråden. Tråden har den konstanta laddningen λ per längdenhet. (4 p)

6. a) Förklara kortfattat innebörden av komplexa spänningar och strömmar och definiera begreppet komplex impedans. (2 p)
b) Med utgångspunkt från (a) och från definitionen av kapacitans ($C = Q/V$), härled uttrycket för den komplexa impedansen hos en kondensator. (2 p)

7. Betrakta en ledare formad som en rak cylinder med längden l och radien r. En ström I går i ledaren (parallellt med cylinderns symmetriaxel). Visa att ytintegralen

$$\int \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S}$$

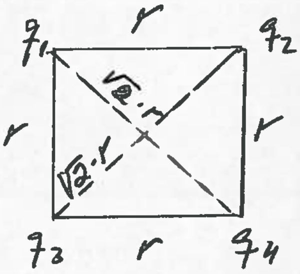
där integrationen sker över cylinderns mantelyta och **N** är *Poynting-vektorn*, är precis likamed den utvecklade joule-effekten (värme-effekten) i ledaren. (4 p)

1

Elektrostatisk energi hos punktladdningssystem:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

dvs för fyra lika laddningar i hörnen på en kvadrat fås (se figuren)



$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{q_1 q_2}{r} + \frac{q_1 q_3}{r} + \frac{q_1 q_4}{\sqrt{2}\cdot r} + \right.$$

$$+ \frac{q_2 q_1}{r} + \frac{q_2 q_3}{\sqrt{2}\cdot r} + \frac{q_2 q_4}{r} +$$

$$+ \frac{q_3 q_1}{r} + \frac{q_3 q_2}{\sqrt{2}\cdot r} + \frac{q_3 q_4}{r} +$$

$$\left. + \frac{q_4 q_1}{\sqrt{2}\cdot r} + \frac{q_4 q_2}{r} + \frac{q_4 q_3}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(8 \cdot \frac{q^2}{r} + 4 \cdot \frac{q^2}{\sqrt{2}\cdot r} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r} \cdot \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx \frac{0.4308}{\epsilon_0} \frac{q^2}{r}$$

$$U_1 = \frac{0.4308}{\epsilon_0} \frac{q^2}{r_1} \qquad (r_1 = 1 \text{ cm})$$

$$U_2 = \frac{0.4308}{\epsilon_0} \frac{q^2}{r_2} \qquad (r_2 = 0.5 \text{ cm})$$

Erforderligt arbete är

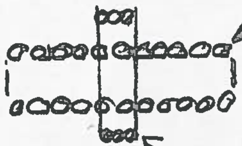
$$W = U_2 - U_1 = \frac{0.4308 \cdot q^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Insatta värdesiffror ger ($q = 10^{-9}$ C, $r_1 = 0{,}01$ m, $r_2 = 0.005$ m)

$$W = \frac{0.4308 \cdot (10^{-9})^2}{8.854 \cdot 10^{-12}} \left(\frac{1}{0.005} - \frac{1}{0.01} \right) \approx 4.866 \cdot 10^{-8} \cdot \left(\frac{1}{0.005} - \frac{1}{0.01} \right)$$

$$= \underline{\underline{4.87 \cdot 10^{-6} \text{ J}}}$$

(2) a)



Ömsesidig induktans: $M = \dfrac{\phi_{21}}{I_1}$ där

ϕ_{21} = flödet genom spole 2 då ström I_1 går genom spole 1

Magnetfält B i spole 1 ges av (1 ≈ "oändligt lång")

$B = \mu_0 n I_1$ (n = antal varv per meter)

Flöde genom spole 2 blir alltså

$$\phi_{21} = N_2 \cdot \mu_0 \cdot n \cdot I_1 \cdot A$$

där A = tvärsnittsarea av <u>spole 1</u>. Således

$$M = N_2 \mu_0 n A = 10 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{500}{0.5} \cdot \pi \cdot 0.01^2$$

$$= \underline{3.95 \cdot 10^{-6} \ [H]}$$

b) Enl. Faradays lag fås i spole 2 en ems

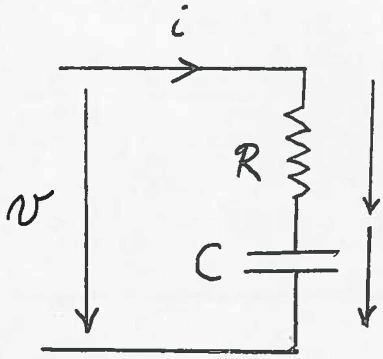
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

varav

$$|\mathcal{E}| = M \cdot \left|\frac{dI_1}{dt}\right| = 3.95 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \approx \underline{2 \cdot 10^{-5} \ V}$$

③

a)

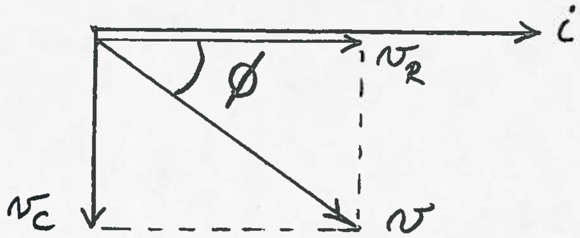


Om i, v, v_R och v_C betecknar amplituderna, så gäller

$$v_R = R \cdot i$$

$$v_C = \frac{1}{\omega C} \cdot i \qquad (\omega = 2\pi f)$$

och visardiagrammet blir
(v_R i fas med i, v_C 90° efter i)



Förhållande mellan amplituderna:

$$\rightarrow\ v = \sqrt{v_R^2 + v_C^2} =$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \cdot i}}$$

där ϕ visar fasförskjutningen mellan v och i.

b) Av figuren ses att

$$\tan\phi = \frac{v_C}{v_R} = \frac{1}{\omega RC} = \frac{1}{2\pi f RC} =$$

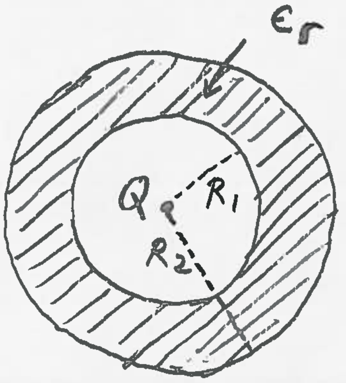
$$= \frac{1}{2\pi f \cdot 200 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^3}{2\pi f}$$

$$\phi = 60^\circ \longrightarrow \tan\phi = 1.732 \longrightarrow 1.732 = \frac{10^3}{2\pi f}$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{f \approx 92 \text{ Hz}}}$$

(Mer invecklad variant)

4



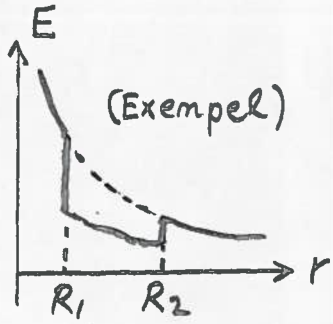
Gauss' lag för $\bar{D}$-fältet ger

$$\oint \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q$$

varav med sfärisk symmetri

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Härav fås det elektriska fältet



$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & r > R_2 \end{cases}$$

Härav följer att potentialen är

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C_1 & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C_2 & R_1 < r < R_2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & r > R_2 \quad (\to 0 \text{ då } r \to \infty) \end{cases}$$

(Ty $\bar{E} = -\operatorname{grad}\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r}$ med sfärisk symmetri.)

ϕ måste vara kontinuerlig. Härav följer

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_1} + C_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{Q}{R_1} + C_2 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{Q}{R_2} + C_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_2} \qquad (2)$$

(④ fortsättning)

$$(2) \rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_2}\cdot\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)$$

Insättning av detta i (1) ger

$$C_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0}\frac{Q}{R_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_2}\cdot\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_1}\cdot\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_2}\cdot\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)\cdot\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

Således fås

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r} + \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\left(1-\dfrac{1}{\epsilon_r}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_1}\right) & r < R_1 \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0}\dfrac{Q}{r} + \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{R_2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{\epsilon_r}\right) & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r} & r > R_2 \end{cases}$$

(svar)

b) $\bar{P} = \bar{D} - \epsilon_0\bar{E} \rightarrow P = D - \epsilon_0 E$ (radiella fält)

Vid dielektrikats inre yta ($r = R_1$) fås härav

$$P = \frac{Q}{4\pi R_1^2} - \epsilon_0\frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0}\frac{Q}{R_1^2} = \frac{Q}{4\pi R_1^2}\cdot\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)$$

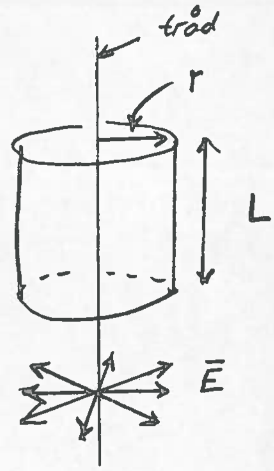
$\bar{P}$ är parallell med normalen $\hat{n}$ till dielektrikats inre yta (ty $\epsilon_r > 1$) så den bundna ytladdningstätheten $\sigma_b = \bar{P}\cdot\hat{n} = P$. Totala bundna ytladdningen alltså

$$Q_b = \sigma_b \cdot 4\pi R_1^2 = \underline{\underline{Q\cdot\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)}}$$

(5) Gauss' lag:

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$ (Q = innesluten laddning)

Fältet kring lång rak tråd måste vara cylindersymmetriskt. Vi lägger Gauss-yta i form av cylinder med längd L och radie r kring tråden, med tråden på cylinderns symmetriaxel.



Inneslutna laddningen är

$$Q = L \cdot \lambda$$

Eftersom $\bar{E} \perp$ tråden (pga cylindersymmetri) och $E = |\bar{E}|$ endast beror avståndet r vinkelrätt ut från tråden, fås

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = E(r) \cdot L \cdot 2\pi r$$

varav

$$E \cdot L \cdot 2\pi r = \frac{L \cdot \lambda}{\epsilon_0}$$

varav

$$\underline{\underline{E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}}}$$

6 a) Antag att ström (i) och spänning (v) är sinusformade, och att (v) har fasförskjutningen φ relativt (i). Mycket allmänt kan vi skriva

$$\begin{cases} i = i_0 \cdot \cos(\omega t + \phi) \\ v = v_0 \cos(\omega t + \phi + \varphi) \end{cases} \qquad (1)$$

där i_0 och v_0 är amplituderna, ω vinkelfrekvensen och ϕ en fasfaktor som beror på definitionen av tidsaxeln t (var $t = 0$ är på tidsaxeln).

Vi inför komplex ström I och komplex spänning V enligt följande:

$$\begin{cases} I = I_0 e^{j\omega t} & \underline{\text{och}} \quad i = Re(I) \\ V = V_0 e^{j\omega t} & \underline{\text{och}} \quad v = Re(V) \end{cases} \qquad (2) \qquad (j = \sqrt{-1})$$

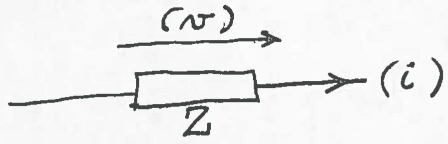
Vi ser att (1) och (2) är ekvivalenta om

$$\begin{cases} I_0 = i_0 e^{j\phi} \\ V_0 = v_0 e^{j(\phi + \varphi)} \end{cases} \qquad (3)$$

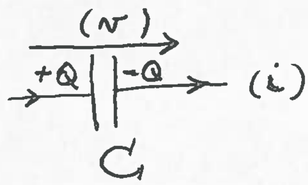
Amplituderna I_0 och V_0 är alltså i allmänhet komplexa.

Den komplexa impedansen hos en komponent genom vilken går strömmen (i) och över vilken spänningen är (v) definieras av kvoten

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_0}{I_0}$$



b) För kapacitansen C gäller (med def. av v och i enligt vidstående figur)



$$i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

Om $v = v_0 \cos(\omega t)$ fås $i = -\omega C \cdot v_0 \sin(\omega t) =$

$= \omega C \cdot v_0 \cdot \cos(\omega t + \pi/2)$

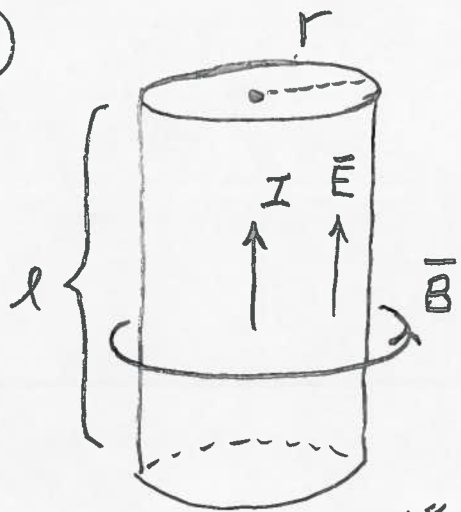
dvs

$$\begin{cases} I = \omega C \cdot v_0 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} = j\omega C \cdot v_0 \cdot e^{j\omega t} \\ V = v_0 e^{j\omega t} \end{cases}$$

varav

$$\boxed{Z = \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}}$$

⑦



Poynting-vektorn

$$\bar{N} = \frac{1}{\mu_0} \bar{E} \times \bar{B}$$

Vi har

$$\bar{E} = \rho \cdot \bar{j}$$

där ρ är resistiviteten och

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ vid ytan (riktning enligt högerhands-regeln; se figur). Således är $\bar{N}$ riktat vinkelrätt in genom ytan. Vi får

$$N = \frac{1}{\mu_0} E \cdot B = \frac{1}{\mu_0} \rho j \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\rho j I}{2\pi r}$$

Totala energin in genom mantelytan per tidsenhet är $\int \bar{N} \cdot d\bar{S} =$

$$= N \cdot \underbrace{2\pi r \cdot l}_{\text{ytan}} = \rho j I l = \rho \cdot l \frac{I^2}{\pi r^2}$$

Men resistansen ges av

$$R = \frac{\rho \cdot l}{\pi r^2}$$

så

$$N \cdot 2\pi \cdot r \cdot l = R \cdot I^2$$

vilket just är joule-effekten (utvecklad värmeenergi per tidsenhet).

V.S.B.