FYSIKUM
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Tentamensskrivning i Elektromagnetism 12 hp
Måndag 14 mars 2011, kl. 9.00 – 14.00

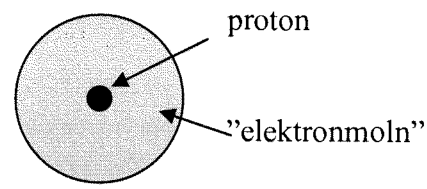
I problemdelen kan du fritt använda alla kända relationer och data utan härledning (däremot skall du namnge dem du använder). I teoridelen skall du ge en efterfrågad beskrivning eller härleda ett efterfrågat resultat från de utgångspunkter som anges i uppgiften. Lösningar skall vara tillräckligt tydliga och utförliga för att tillåta en bedömning.
Varje helt löst problem ger 4 p. För godkänt krävs minst 14 p, med minst 6p inom antingen problem- eller teoridel. Härvid inräknas bonuspoäng från duggorna i den första tentamens-skrivning du genomför efter den kurs du deltagit i.
Hjälpmedel: Räknedosa, Physics Handbook eller motsvarande samt den utdelade Översikt och sammanfattning av kursen i elektromagnetism.

Lycka till! D.L.

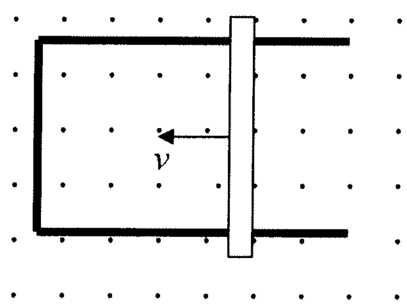
Problem

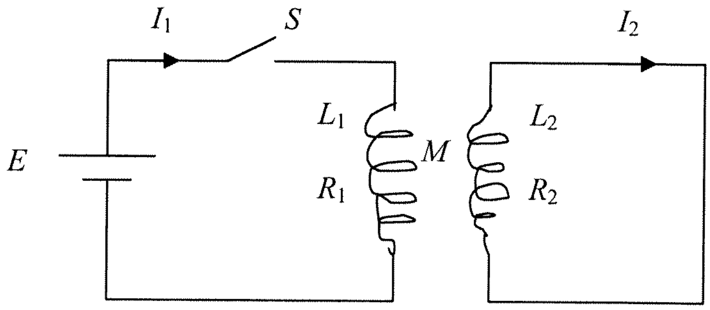
1. I mitten av en mycket lång cylindrisk spole med radien 5 cm, lindad med 20 varv per cm, befinner sig en liten, kort spole, med radien 0.5 cm och lindad med 100 varv. Mediet inuti spolarna är luft, och spolarna är koaxiala (dvs har parallella symmetriaxlar). Beräkna den ömsesidiga induktansen. (4 p)

2. I en mycket enkel modell av en väteatom tänker man sig elektronen som en sfärisk, homogen laddningsfördelning (ett s.k. "elektronmoln") med den totala laddningen $-e$ och radien R. Atomkärnan (dvs protonen), som här betraktas som punktformig och med totala laddningen $+e$, befinner sig i centrum av denna laddningsfördelning. Beräkna den elektriska fältstyrkan $E(r)$ som funktion av avståndet r från atomkärnan. (4 p)



3. En metallstav glider friktionsfritt med den konstanta hastigheten $v = 30$ m/s längs en U-formad ledande räls, så som ses i figuren. Avståndet mellan kontaktpunkterna mellan stav och räls är 24 cm. Ett homogent magnetfält med styrkan 0.45 T är riktat vinkelrätt ut ur bilden (mot åskådaren).
Stavens resistans är 2.7 Ω, medan rälsens resistans är försumbar. Kretsens självinduktans är försumbar.
a) Beräkna strömstyrkan i rälsen. Ange även strömmens riktning. (1 p)
b) Beräkna den kraft som fordras för att hålla staven i rörelse. (1 p)
c) Beräkna den effekt som tillförs via denna kraft. (1 p)
d) Beräkna den effekt i form av värme som fås genom den elektriska strömmen. (1 p)





4. Två spolar är induktivt kopplade enligt vidstående figur. Den ömsesidiga induktansen är M. Spole nr 1 har självinduktansen L_1 och spole nr 2 har självinduktansen L_2. Resistansen i den krets (1) där spole nr 1 ingår är R_1, medan resistansen i den krets (2) där spole nr 2 ingår är R_2. I krets (1) ingår som synes också en ideal likspänningskälla som ger den konstanta utspänningen E, samt en strömbrytare S.

a) Ange differentialekvationerna för strömmarna I_1 och I_2 i krets (1) respektive krets (2), om man antar att strömbrytaren S är sluten. Motivera ekvationerna genom att först skriva upp uttrycken för den elektromotoriska spänningen i respektive krets. (2 p)

b) Anta att från början (för $t < 0$) är strömbrytaren S öppen och strömmen = 0 i båda kretsarna. Anta att R_2 är försumbart litet, dvs $R_2 = 0$. Vid tiden t = 0 sluts strömbrytaren. Härled ett uttryck för strömmen I_1 i krets (1) för $t > 0$. (2 p)

Teori

5. a) Anta att ena spetsen på en kraftig stavmagnet får närma sig en liten, lättrörlig bit av ett diamagnetiskt material. Vad händer? Förklara varför! (1 p)
b) Anta istället att materialet är paramagnetiskt. Vad händer? Förklara varför! (1 p)
c) Om en bit metall placeras i ett statiskt, starkt elektriskt fält, så är det elektriska fältet inuti metallen likamed noll. Hur kan man förstå detta fysikaliskt? (1 p)
d) Varför gäller inte samma sak halvledare? Vad torde bestämma fältet inuti en bit halvledarmaterial som befinner sig i ett statiskt, starkt elektriskt fält? (En kort kvalitativ diskussion räcker.) (1 p)

6. Definiera begreppet självinduktans hos en krets. Visa med utgångspunkt från Ampères lag att en lång, rak spole med radien $\boldsymbol{r}$, n lindningsvarv per längdenhet och längden l har en självinduktans som ges av $L = \mu_0 n^2 \pi r^2 l$. Spolen är lindad kring en kärna vars relativa permeabilitet μ_r kan sättas likamed 1. (4 p)

7. Följande relationer antas gälla ($\varnothing$ är en skalär potential och **A** en s.k. vektorpotential):

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad [1]$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} \qquad [2]$$

a) Visa att *Gauss' lag för det magnetiska fältet* **B** samt *Faradays lag* följer ur relationerna [1] och [2]. (1.5 p)
b) Visa att Lorentz gauge, dvs ansatsen

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \ ,$$

tillsammans med antagandet att rymdladdningstätheten $\rho = 0$, leder till att *vågekvationen* gäller för $\varnothing$. (2.5 p)

(1) Anta ström I genom den långa spolen. Ger B-fält

$$B = \mu_0 n I$$

inuti spolen. Här är n = 20 varv/cm = 2000 varv/m.
Flödet genom korta spolen (radie $r = 0.5$ cm $= 0.5 \cdot 10^{-2}$ m, antal varv $N = 100$) blir

$$\Phi = N \cdot B \cdot \pi r^2$$

dvs

$$\Phi = \mu_0 n N I \cdot \pi r^2$$

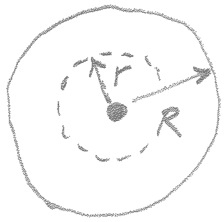
Den ömsesidiga induktansen blir

$$M = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 n N \pi r^2 =$$

$$= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{3} \cdot 10^{2} \cdot \pi \cdot (0.5 \cdot 10^{-2})^2$$

$$= 19.74 \cdot 10^{-6} \approx \underline{\underline{2.0 \cdot 10^{-5} \text{ H}}}$$

(2)



Gauss' lag tillämpad på sfär med radien r:

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q_{innesluten}}{\epsilon_0}$$

Laddningstätheten hos elektronmolnet är $\rho = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$
och

$$\begin{cases} Q_{innesluten} = +e + \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \\ = e - e\,\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = e \cdot \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) & (r \leq R) \\ Q_{innesluten} = 0 & (r > R) \end{cases}$$

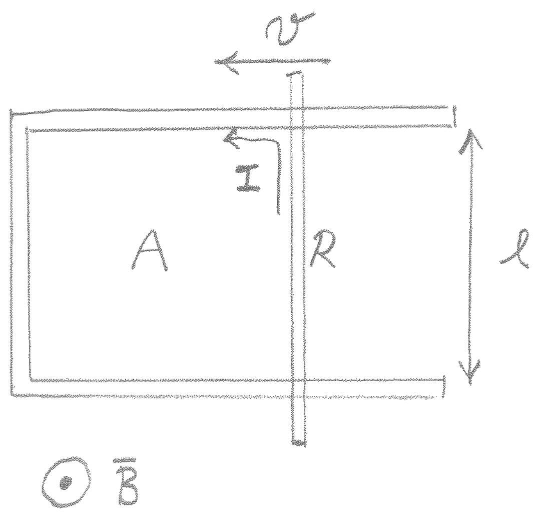
Sfärisk symmetri ger alltså från Gauss' lag att

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{e}{\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$$

dvs

$$\begin{cases} E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{e}{r^2} \cdot \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) & (r \leq R) \\ E = 0 & (r > R) \end{cases}$$

③



Innesluten yta A varav

$$\frac{dA}{dt} = -l \cdot v$$

Inducerad ems ges av

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -B\frac{dA}{dt} = B \cdot l \cdot v$$

(alternativt $\mathcal{E} = \oint (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{r} = B \cdot l \cdot v$)

Riktningen skall vara sådan att den av $\mathcal{E}$ orsakade strömmen ger ett magnetfält som söker hindra minskningen av ϕ (Lenz' lag) $\longrightarrow$ ström <u>moturs</u> (enl. högerhandsregeln).

a) Strömstyrkan blir $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B \cdot l \cdot v}{R} = \frac{0.45 \cdot 0.24 \cdot 30}{2.7}$

$= \underline{\underline{1.2\ A}}$

b) Den kraft varmed <u>magnetfältet</u> påverkas <u>staven</u> blir

$$\bar{F} = l \cdot (\bar{I} \times \bar{B}) \rightarrow F = l \cdot I \cdot B$$

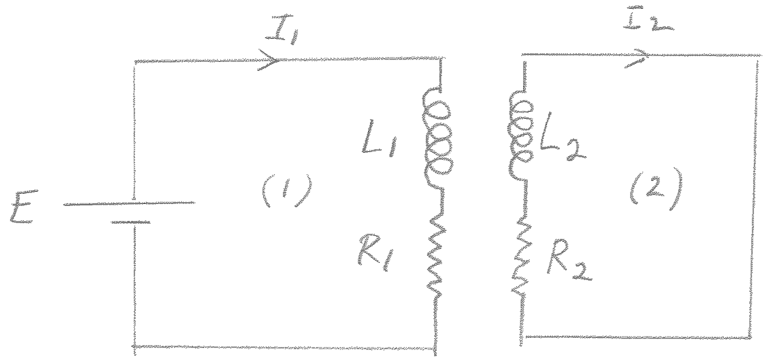
och är riktad åt höger i figuren. Den sökta kraften är alltså lika stor och riktad åt <u>vänster</u>. Man får

$$F = 0.24 \cdot 1.2 \cdot 0.45 = 0.1296 \approx \underline{\underline{0.13\ N}}$$

c) Effekten är $F \cdot v = 0.1296 \cdot 30 = \underline{\underline{3.888 \approx 3.9\ W}}$

d) Värmeeffekten är $RI^2 = 2.7 \cdot 1.2^2 = \underline{\underline{3.888 \approx 3.9\ W}}$

④



Obs. Vi kan alternativt ha
$\ldots + M \frac{dI_2}{dt}$
$\ldots + M \frac{dI_1}{dt}$
beroende på hur I_1 och I_2 har definierats

a) Ems i slinga (1): $\mathcal{E}_1 = E - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$

Ems i slinga (2): $\mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$

Ekvationer: $\mathcal{E}_1 = R_1 I_1$ och $\mathcal{E}_2 = R_2 I_2$, dvs

$$\left.\begin{aligned} E &= R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \qquad (1) \\ 0 &= R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \qquad (2) \end{aligned}\right\} \text{(svar)}$$

b) Med $R_2 = 0$ fås $\frac{dI_2}{dt} = -\frac{M}{L_2}\frac{dI_1}{dt}$ vilket kan substitueras in i ekv. (1), som blir

$$E = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} - \frac{M^2}{L_2}\frac{dI_1}{dt} = R_1 I_1 + \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)\frac{dI_1}{dt}$$

Homogen ekvation:

$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{R_1}{L_1 - \frac{M^2}{L_2}} I_1 = 0 \longrightarrow \frac{dI_1}{dt} = -\frac{1}{\tau} I_1$$

där $\tau = \frac{L_1 L_2 - M^2}{R_1 L_2}$ $\rightarrow$ homogen lösning $I_1(t) = I_0 e^{-t/\tau}$

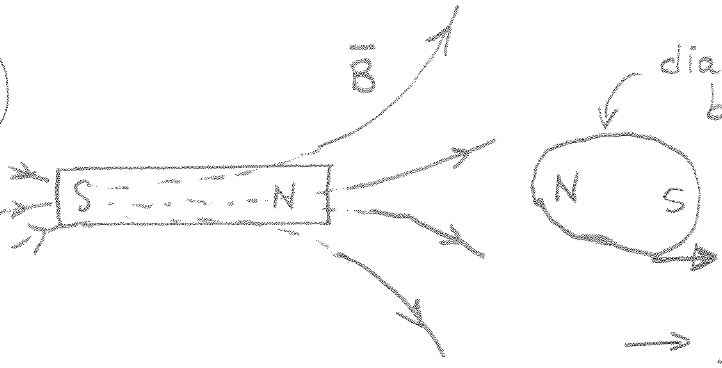
Partikulär lösning: $I_1 = E/R_1$. Fullst. lösning

$I_1(t) = I_0 e^{-t/\tau} + \frac{E}{R_1}$. Villkor $I_1(0) = 0$ ger $I_0 = -\frac{E}{R_1}$

$$\therefore\ I_1(t) = \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{där} \quad \tau = \frac{L_1 L_2 - M^2}{R_1 L_2} \qquad \text{(svar)}$$

(5)

a)

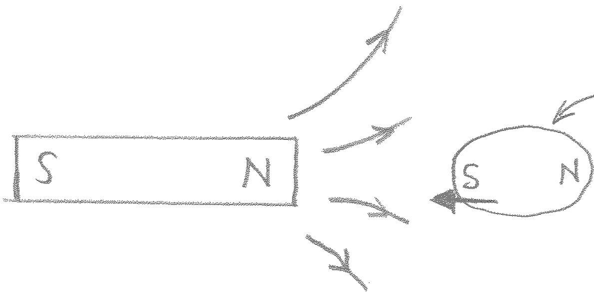


diamagnetiskt – polarisation blir <u>motriktad</u> $\bar{B}$

∴ Blir magnetisk dipol med N åt vänster enl. fig

→ <u>repelleras</u> eftersom fältet $\bar{B}$ är starkare där

b)

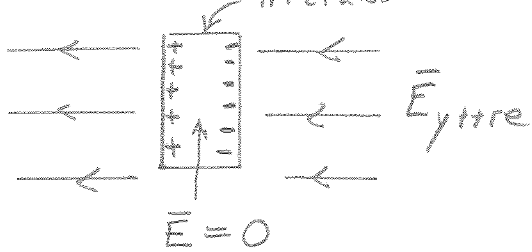


paramagnetiskt material – polarisation blir <u>medriktad</u> $\bar{B}$.

→ <u>attraheras</u>

c) Standardargumentet är att om $\bar{E} \neq 0$ i metallen så fås elektrisk ström $(\bar{j} = \sigma \cdot \bar{E})$. Om strömmen = 0 (statiskt fall) så måste alltså $\bar{E}$ vara noll i metallen.

Ett mer grundläggande argument är att den enorma mängden fria elektroner i en metall medför att ett yttre elektriskt fält alltid kommer att avskärmas av de elektroner som flyttas till eller från metallens ytor. Fig:



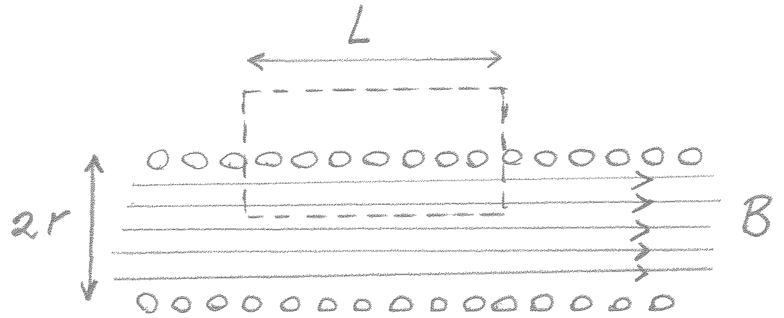
d) I en halvledare finns inte så många fria laddningsbärare. Avskärmningen av ett yttre fält kan bli ofullständig. Det inre fältet i halvledaren kommer att bestämmas dels av de <u>fria</u> ytladdningarna (fria laddningsbärare – överskott eller underskott vid ytorna), dels av den <u>bundna</u> ytladdningen som hänger samman med polarisationen av materialet (som i en isolator).

(6) Självinduktans $L = \frac{\phi}{I}$ där ϕ är det magnetiska flöde som genereras av I.

Anta lång, smal spole med längd l, radie r och $N = l \cdot n$ varv. Tillämpa Ampères lag

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 I_{tot} \quad (I_{tot} = \text{inneslutna strömmen})$$

($\mu_r = 1 \rightarrow$ vacuum-ekv. kan användas.)



Integrationsväg: rektangulär slinga med längden $L \ll l$ enligt figuren. Ström i varje varv $= I$.

Ampères lag ger $B \cdot L = \mu_0 \cdot n \cdot L \cdot I$, dvs

$B = \mu_0 n I$

Totala flödet i spolen är då $\phi = N \cdot B \cdot \pi r^2$

$= n \cdot l \cdot B \cdot \pi r^2 = \mu_0 n^2 l I \cdot \pi r^2$

Def. $L = \phi / I$ ger då

$$\underline{L = \mu_0 n^2 l \cdot \pi r^2}$$

V.S.B.

7

a) Givet

$$\bar{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\bar{B} = \operatorname{rot}\bar{A} \qquad (2)$$

Av (2) följer genast

$$\operatorname{div}\bar{B} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{A} \equiv 0 \qquad \text{(Gauss' lag)}$$

eftersom $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\bar{a}) \equiv 0$ generellt.

Av (1) fås

$$\operatorname{rot}\bar{E} = -\underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi}_{\equiv 0} - \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\bar{A}$$

varav med (2) fås

$$\operatorname{rot}\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad \text{(Faradays lag)}$$

b) (1) ger

$$\operatorname{div}\bar{E} = -\overbrace{\operatorname{div}\operatorname{grad}}^{\nabla^2}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\bar{A}$$

Enligt ansatsen fås härav

$$\operatorname{div}\bar{E} = -\nabla^2\phi + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

Men i frånvaro av laddningar gäller $\operatorname{div}\bar{E} = 0$ (Gauss lag) varav fås vågekvationen för ϕ,

$$\nabla^2\phi = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$