FYSIKUM
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Tentamensskrivning i Elektromagnetism 12 hp
Fredagen 27 augusti 2010, kl. 9.00 – 15.00

I problemdelen kan du fritt använda alla kända relationer och data utan härledning (däremot skall du namnge dem du använder). I teoridelen skall du ge en efterfrågad beskrivning eller härleda ett efterfrågat resultat från de utgångspunkter som anges i uppgiften.

Lösningar skall vara tillräckligt tydliga och utförliga för att tillåta en bedömning. Svar markeras t.ex. genom att understrykas eller inramas. Numeriska svar anges med sort (enhet) och med lämpligt antal värdesiffror.

Varje helt löst problem ger 4 p. För godkänt krävs minst 16 p, med minst 6p inom antingen problem- eller teoridel. Härvid inräknas bonuspoäng från duggorna i den första tentamens-skrivning du genomför efter den kurs du deltagit i.

Hjälpmedel: Räknedosa, Physics Handbook samt den utdelade Översikt och sammanfattning av kursen i elektromagnetism.

Lycka till! D.L.

Problem

1. Metallisk koppar innehåller $8.5 \cdot 10^{28}$ ledningselektroner per m^3 (dvs en per atom). I en koppartråd med tvärsnittsytan 0.05 cm^2 går en ström på 10 A.

a) Beräkna ledningselektronernas drifthastighet. (2p)

b) Beräkna styrkan hos det elektriska fältet i koppartråden. (2p)

(Använd ytterligare data ur Physics Handbook för uppgift (b).)

2. En lång solenoid består av 500 varv ledningstråd jämnt lindade på en cylindrisk stav av plast (relativ permeabilitet $\mu_r \approx 1$). Solenoiden har längden 50 cm och radien 1 cm. En andra, mycket kort spole med 10 varv ledningstråd är lindad runt mitten av solenoiden.

a) Beräkna den ömsesidiga induktansen. (2p)

b) Den långa solenoiden ansluts till ett batteri, varvid strömmen genom solenoiden initialt ökar med 5 A/s. Ändpunkterna på 10-varv-spolen lämnas öppna. Beräkna den elektromotoriska spänning som därvid fås mellan 10-varv-spolens ändpunkter. (2p)

3. Enligt den s.k. Bohr-modellen består väteatomen av en atomkärna, som här kan antas stillastående och punktformig, samt en elektron som med hastigheten $2.188 \cdot 10^6$ m/s rör sig runt atomkärnan i en cirkelbana med radien $0.529 \cdot 10^{-10}$ m. Använd dessa värden för att beräkna det magnetfält som erhålles vid atomkärnan på grund av elektronens rörelse. (4p)

4. Strömmen från en växelströmsgenerator med frekvensen 90 Hz går igenom en impedans Z som består av en resistans $R = 20\ \Omega$, en induktans $L = 9.0$ mH och en kapacitans $C = 80\ \mu$F kopplade i serie. Effektivvärdet av den totala växelspänningen V över Z är 100 V.
a) Beräkna fasförskjutningen mellan V och I. (2 p)
b) Beräkna effektivvärdet av strömmen I. (2 p)

Teori

5. Använd Ampères lag till att beräkna det magnetiska fältet $B(r)$ inuti och omkring en rak strömförande ledare. Ledaren antas vara en oändligt lång cylinder med radien R. Här är r avståndet från cylinderns mittaxel. Anta att strömmen I är stationär och att strömtätheten är konstant över ledarens tvärsnitt. (4p)

6. *a*) Härled uttycket för energin hos en laddad plattkondensator med kapacitansen C genom att utgå från det arbete som krävs för att föra en liten positiv laddning q mot ett potentialfall V (dvs mot det elektriska fältet). (2p)
b) Använd resultatet för att, med hjälp av ett enkelt fall, beräkna den lagrade energin per volymsenhet i ett elektriskt fält. (2p)

7. Beskriv något exempel (någon fysikalisk, tänkt situation), som visar att Ampères lag i dess ursprungliga form, dvs

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dr} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{dS}$$

inte kan vara fullständig – någonting saknas! (4p)

8. Härled den bundna rymdladdningstätheten och den totala bundna strömtätheten uttryckta i polarisationen **P** och magnetiseringen **M** av mediet genom att starta från Maxwells ekvationer i differentiell form och definitionerna av **H** och **D**. Visa att den bundna rymdladdningstätheten bestäms av **P** enbart, medan den bundna strömtätheten bestäms av både **M** och **P**.
(Ledning: ”bunden” = ”total” – ”fri”.) (4p)

(1)

a) $n = 8.5 \cdot 10^{28}$ ledningselektroner per m^3

$\bar{J} = -ne\bar{v}_d$ Strömtäthet

$I = \bar{J} \cdot \bar{A}$ ström ; A = tvärsnittsytan

$$\therefore I = nev_d \cdot A \rightarrow v_d = \frac{I}{ne \cdot A} = \frac{10}{8.5 \cdot 10^{28} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 0.05 \cdot 10^{-4}}$$

$$= \underline{\underline{1.47 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}}}$$

b) För koppar är resistiviteten $\rho = 1.67 \cdot 10^{-8}$ Ωm (vid 300K)
varav $\bar{E} = \rho \bar{J}$, dvs

$$E = \rho \cdot \frac{I}{A} = 1.67 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{10}{0.05 \cdot 10^{-4}} = \underline{\underline{0.033 \text{ V/m}}}$$

<u>Alternativ metod:</u> vi kan också använda att

$$|v_d| = \mu E \rightarrow E = \frac{|v_d|}{\mu}$$

där μ är mobiliteten hos ledningselektronerna i koppar. Physics Handbook uppger mobiliteten

$$\mu = 3.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{Vs}$$

vilket ger

$$E = \frac{1.47 \cdot 10^{-4}}{3.2 \cdot 10^{-3}} = 0.46 \cdot 10^{-1} = \underline{\underline{0.046 \text{ V/m}}}$$

(Emellertid är detta värde på μ inte helt konsistent med värdet på ρ, eftersom

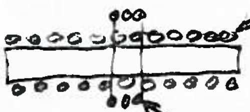
$$\sigma = ne\mu \rightarrow \mu = \frac{\sigma}{ne} = \frac{1}{ne\rho} = \frac{1}{8.5 \cdot 10^{28} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 1.67 \cdot 10^{-8}}$$

$$= 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{Vs}$$

vilket ju ger

$$E = \frac{|v_d|}{\mu} = \frac{1.47 \cdot 10^{-4}}{4.4 \cdot 10^{-3}} = 0.033 \text{ V/m}.)$$

(2) a)



Vi beräknar den ömsesidiga induktansen enligt formeln

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

där Φ_{21} är flödet genom spole 2 då strömmen I_1 går genom spole 1. Magnetfältet i spole 1 fås enligt

$B = \mu_0 n I_1$ (≈ oändligt lång spole)

där n = antal varv per meter i spole 1. Således flöde per varv

$$\phi = BA = \mu_0 n I_1 A$$

där A är tvärsnittsarean av spole 1. Således

$$\Phi_{21} = N_2 \phi = N_2 \mu_0 n I_1 A$$

varav

$$M = \mu_0 N_2 n A = 4\pi \cdot 10^{-7}\ 10 \cdot \frac{500}{0.5} \cdot \pi \cdot 0.01^2 =$$

$$= 4\pi^2 \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} = 4\pi^2 \cdot 10^{-7} = \underline{\underline{3.95 \cdot 10^{-6}\ H}}$$

b) Enl. Faradays lag fås i spole 2 en ems

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

Enligt uppgift är $\frac{dI_1}{dt} = 5\ A/s$, så emsen i spole 2 blir (till beloppet)

$$|\mathcal{E}| = \left| M \frac{dI_1}{dt} \right| = 3.95 \cdot 10^{-6} \cdot 5 = 19.75 \cdot 10^{-6} \approx \underline{\underline{2 \cdot 10^{-5}\ V}}$$

③ Radie $r = 0.529 \cdot 10^{-10}$ m

Hastighet $v = 2.188 \cdot 10^{6}$ m/s

Tid för 1 varv $= T = \frac{2\pi r}{v}$

Elektronen motsvarar cirkulär strömslinga med strömstyrkan

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$

Vi använder formeln för strömstyrka i centrum av en cirkulär strömslinga:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

och får

$$B = \frac{\mu_0}{2r} \cdot \frac{ev}{2\pi r} = \frac{\mu_0 e v}{4\pi r^2}$$

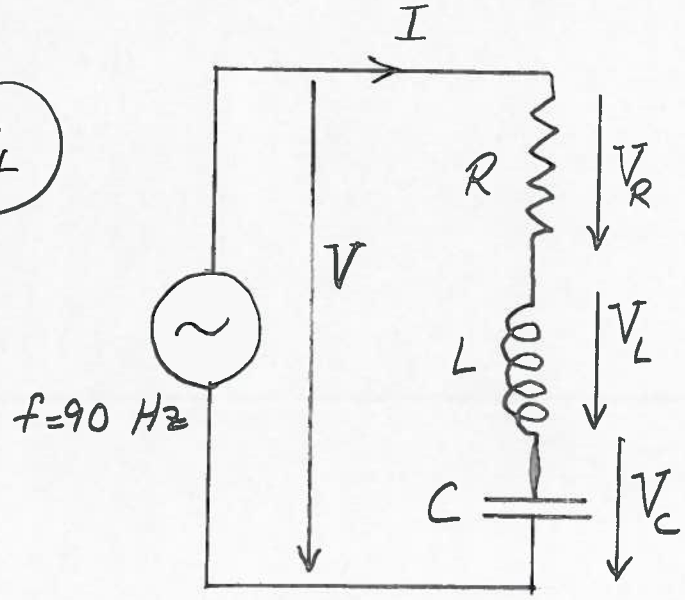
varav (SI-enheter)

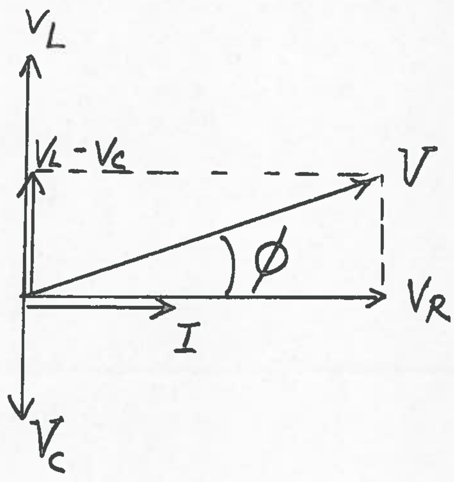
$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 2.188 \cdot 10^{6}}{4\pi \cdot (0.529 \cdot 10^{-10})^2}$$

$$= \frac{1.602 \cdot 2.188 \cdot}{0.529^2} = 12.53 \ [T]$$

Svar: 12.53 T

4





<u>VISARDIAGRAM</u>

Komplexa impedansen $Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$

$$\therefore |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{20^2 + \left(2\pi\cdot 90\cdot 9\cdot 10^{-3} - \frac{1}{2\pi\cdot 90\cdot 80\cdot 10^{-6}}\right)^2}$$

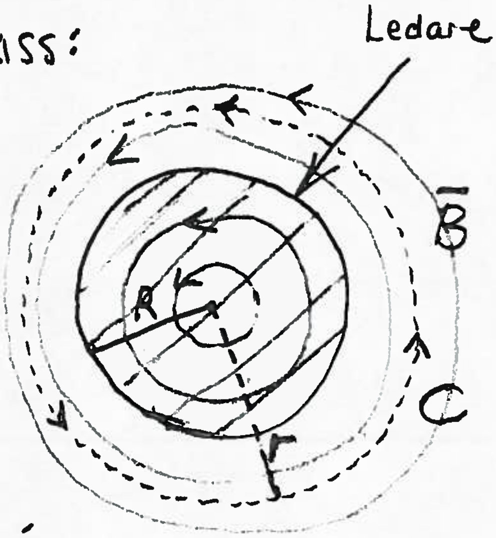
$$= 26.26\ \Omega$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{2\pi\cdot 90\cdot 9\cdot 10^{-3} - \frac{1}{2\pi\cdot 90\cdot 80\cdot 10^{-6}}}{20} =$$

$$= -0.8506 \longrightarrow \underline{\underline{\phi = -40{,}4^\circ}}$$

$$|I| = \frac{|V|}{|Z|} \longrightarrow |I| = \frac{100}{26.26} = \underline{\underline{3.81\ A}}$$

5 SKISS:



Strömmen I antas riktad ut ur papperet. $\bar{B}$-fältet är cirkulärt med orientering enligt figuren. Betrakta cirkulär, likadant orienterad integrationskurva C med radien r (fig.)

$r > R$:

Amperes lag ger

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I \rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\rightarrow \underline{\underline{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}} \quad (r > R)$$

$r < R$:

Amperes lag ger (med strömtätheten $J = \frac{I}{\pi R^2}$)

$$\oint_C \bar{B}\, d\bar{l} = \mu_0 \cdot J \cdot \pi r^2 = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$$

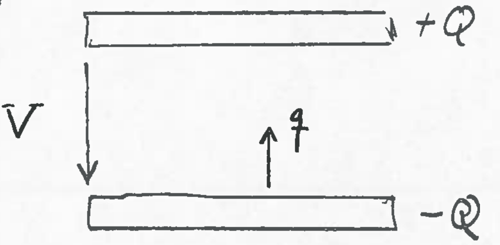
$$\rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \cdot \frac{r^2}{R^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{r^2}{R^2}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \cdot r}} \quad (r < R)$$

(eller, mer exakt, $B = \frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi R^2} r$, där μ_r är ledarmaterialets magnetiska permeabilitet)

(6)

a)



Arbetet för att föra laddningen q från negativa plattan till positiva är

$$W = q \cdot V \quad (1)$$

a) Vi har $V = \frac{Q}{C}$ och kan lämpligen införa $dQ \equiv q$, och skriva (1) som

$$dW = dQ \cdot \frac{Q}{C}$$

där dW är arbetet för att föra dQ från negativa plattan till positiva.

$$\therefore \; W = \int dW = \int_0^{Q_0} \frac{Q}{C}\, dQ$$

där Q_0 är den slutliga laddningen hos kondensatorn.
Således

$$W = \frac{1}{C} \int_0^{Q_0} Q\, dQ = \underline{\underline{\frac{Q_0^2}{2C}}}$$

b) I en plattkondensator med arean A och avståndet d mellan plattorna, och vacuum (luft) emellan, fås kapacitansen $C = \epsilon_0 A / d$ (ses med hjälp av $E = \sigma/\epsilon_0$, som fås med Gauss' lag). Således

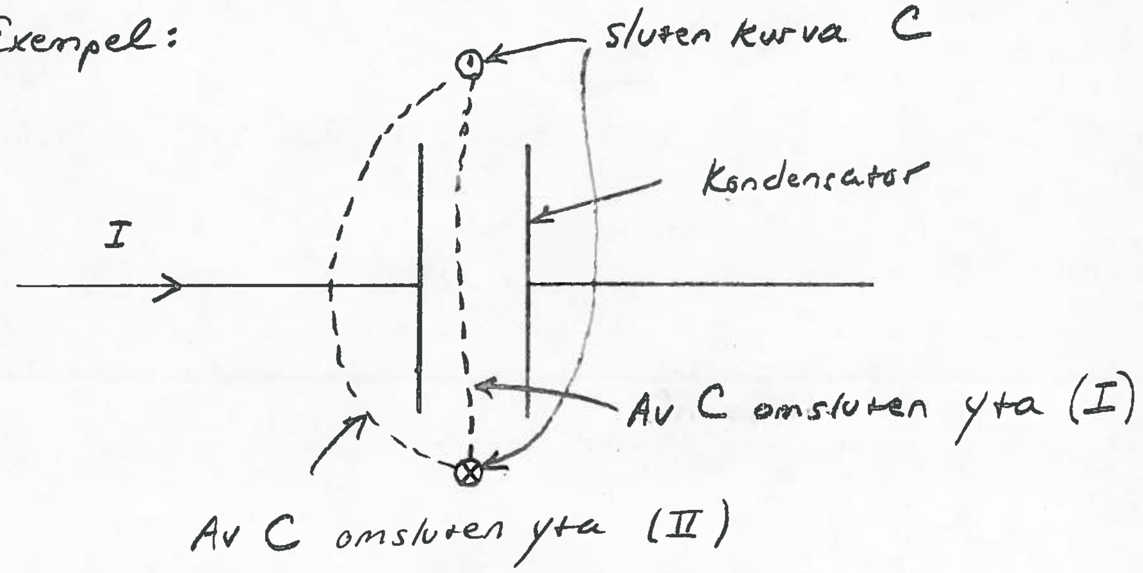
$$W = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{V^2 C^2}{2C} = \frac{V^2 C}{2} =$$

$$= \frac{(E \cdot d)^2 \cdot \epsilon_0 A}{2d} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot \underbrace{A \cdot d}_{\text{Volymen mellan plattorna}}$$

varav energin per volymsenhet $= w = \underline{\underline{\frac{\epsilon_0 E^2}{2}}}$.

7

Exempel:



Ampères lag (ursprunglig form) ger

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{r} = \mu_0 \int_{(I)} \bar{J}\cdot d\bar{S} = 0$$ (ty $\bar{J} = 0$ mellan kondensatorplattorna)

eller

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{r} = \mu_0 \int_{(II)} \bar{J}\cdot d\bar{S} = \mu_0 I \neq 0$$

dvs Ampères lag ger olika resultat beroende på om man väljer yta (I) eller yta (II). Eftersom

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{r}$$

måste ha <u>ett</u> visst värde, kan inte Ampères lag i den ursprungliga formen vara riktig.

(8) SKISS:

Maxwells ekvationer i differentiell form:

$$\mathrm{div}\,\bar{D} = \rho_f \qquad \mathrm{div}\,\bar{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J}_f + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

Använd definitionerna

$$\bar{D} \equiv \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M}$$

i den första och fjärde ekvationen, så fås

$$\epsilon_0\,\mathrm{div}\,\bar{E} + \mathrm{div}\,\bar{P} = \rho_f$$

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\bar{B} - \mathrm{rot}\,\bar{M} = \bar{J}_f + \epsilon_0\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t}$$

Men enligt Maxwells ekvationer i vacuum har vi

$$\mathrm{div}\,\bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\mathrm{rot}\,\bar{B} = \mu_0\left(\bar{J} + \epsilon_0\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right)$$

Således fås

$$\rho + \mathrm{div}\,\bar{P} = \rho_f \rightarrow \mathrm{div}\,\bar{P} = -(\rho - \rho_f) = -\rho_b$$

$$J + \epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} - \mathrm{rot}\,\bar{M} = \bar{J}_f + \epsilon_0\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \rightarrow \bar{J} - \bar{J}_f = \mathrm{rot}\,\bar{M} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t}$$

Således fås att

bunden rymdladdningstäthet $\rho_b \equiv \rho - \rho_f = -\mathrm{div}\,\bar{P}$

bunden strömtäthet $\bar{J} - \bar{J}_f = \mathrm{rot}\,\bar{M} + \dfrac{\partial \bar{P}}{\partial t}$