FYSIKUM
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Tentamensskrivning i Elektromagnetism 12 hp
Fredag 11 juni 2011, kl. 9.00 – 15.00

I problemdelen kan du fritt använda alla kända relationer och data utan härledning (däremot skall du namnge dem du använder). I teoridelen skall du ge en efterfrågad beskrivning eller härleda ett efterfrågat resultat från de utgångspunkter som anges i uppgiften. Lösningar skall vara tillräckligt tydliga och utförliga för att tillåta en bedömning.
Varje helt löst problem ger 4 p. För godkänt krävs minst 16 p, med minst 6p inom antingen problem- eller teoridel. Härvid inräknas bonuspoäng från duggorna i den första tentamens-skrivning du genomför efter den kurs du deltagit i.

Hjälpmedel: Räknedosa, Physics Handbook samt den utdelade Översikt och sammanfattning av kursen i elektromagnetism.

Lycka till! D.L.

Problem

1. En punktladdning Q placeras i centrum av ett oladdat, sfäriskt metallskal. Metallskalet har den inre radien R_1 och yttre radien $R_2 > R_1$. Låt r beteckna avståndet från Q. Anta sfärisk symmetri och att alla laddningsfördelningar är statiska.
a) Vad är de totala ytladdningarna dels på den inre och dels på den yttre ytan av det sfäriska skalet? (2 p)
b) Vad är det elektriska fältet för $r < R_1$? (1 p)
c) Vad är den elektriska fältet för $r > R_2$? (1 p)

2. En kondensator med kapacitansen C laddas upp till en spänning V_0. Kondensatorn kortsluts vid tiden $t = 0$ genom en spole med induktansen L. Vi bortser från resistansen i kretsen. Beräkna spänningen V över kondensatorn som funktion av tiden. Observera begynnelse-villkoren! (4 p)

3. En mycket smal plaststav med längden l och den mycket lilla tvärsnittsarean A är placerad längs x-axeln med mittpunkten vid $x = 0$. Längs denna stav har elektrisk laddning fördelats så att laddningstätheten ges av

$$\rho(x) = Bx, \quad -\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2}$$

där B är en konstant. Beräkna stavens elektriska dipolmoment. (4p)

4. En smal toroidspole med medelradien R är försedd med en järnkärna och lindad med N varv. Järnkärnan, som har den relativa permeabiliteten μ_r har ett litet luftgap med bredden d. Genom toroidspolen går strömmen I.
a) Vi antar att luftgapet är "litet"? På vilket sätt använder du detta antagande? (1 p)
b) Härled, med utgångspunkt från Maxwells ekvationer, en formel för magnetfältet B inuti toroidspolen, som funktion av R, d, N, I och μ_r. (3 p)

Teori

5. Utgå från en av Maxwells ekvationer (lämpligt vald), eller en ekvivalent omskrivning av denna ekvation, och visa att för en konstant strömstyrka I gäller att
a) den magnetiska fältstyrkan B i mittpunkten av en plan, circulär strömslinga med radien r ges av

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

b) den magnetiska fältstyrkan på avstånder r från en lång, rak strömförande tråd ges av

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Vi antar att strömslingan och den strömförande tråden båda befinner sig i vacuum. Ange noga vilka ekvationer du utgår ifrån och alla väsentliga steg i resonemanget. (4 p)

6. Ange vilka av nedanstående fyra påståenden som är sanna respektive falska. Motivera ditt svar. Felaktiga svar ger minuspoäng, men minsta möjliga poäng för problemet är noll.
a) Betrakta en plattkondensator med vacuum mellan plattorna. Den s.k. förskjutningsströmmen mellan plattorna uppstår på grund av termisk emission av elektroner. (±1 p)
b) Låt **E** och **D** vara det elektriska fältet respektive förskjutningsfältet. Om rot **E** = 0 i en viss punkt, så måste också gälla att rot **D** = 0 i samma punkt . (±1 p)
c) Den magnetiska kraften uträttar aldrig något arbete på en rörlig laddning. (±1 p)
d) Strömtätheten **j** på en viss punkt i en metall har alltid samma riktning som fältet **E** i samma punkt. (±1 p)

7. Ett klot med radien R består av ett isolerande material med dielektricitetskonstanten ε. Materialet är homogent elektriskt laddat med den konstanta rymdladdningstätheten ρ. Visa att potentialskillnaden mellan klotets medelpunkt och dess yta är likamed $\rho R^2/6\varepsilon$ (4 p)

8. a) Visa att det elektriska fältet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ från en statisk laddningsfördelning $\rho(\mathbf{r})$ alltid är konservativt. (2 p)
b) Härled Poissons ekvation för den elektriska potentialen $\emptyset(\mathbf{r})$ från en statisk laddningsfördelning $\rho(\mathbf{r})$ med utgångspunkt från en av Maxwells ekvationer. (2 p)

1 Använd Gauss' lag $\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$. P.g.a. sfärisk symmetri har vi

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = E \cdot 4\pi r^2$$

där r är radien hos en sfärisk Gauss'-yta centrerad på Q.

a) Välj $R_1 < r < R_2$. Då är sfären inuti det ledande skalet där $\bar{E} = 0$. Således fås

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0$$

dvs inneslutna laddningen $= 0$. Således är den totala laddningen på skalets <u>inre yta $= -Q$</u>. Skalet är ~~totalt~~ sett oladdat, och inga laddningar finns inne i skalet. Således är den totala laddningen på skalets <u>yttre yta $= +Q$</u>.

b) För $r < R_1$ fås

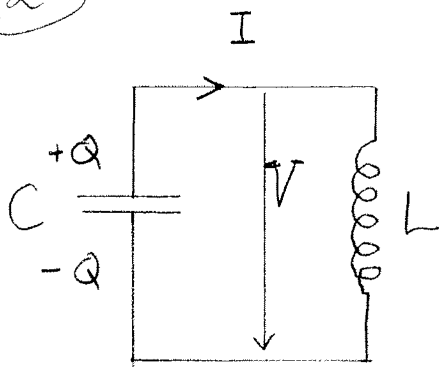
$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \longrightarrow \underline{\underline{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}}}$$

c) För $r > R_2$ fås

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \underbrace{\frac{Q}{\epsilon_0}}_{\text{i centrum}} - \underbrace{\frac{Q}{\epsilon_0}}_{\text{inre ytan}} + \underbrace{\frac{Q}{\epsilon_0}}_{\text{yttre ytan}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}}}$$

2



$$V = \frac{Q}{C} \qquad (1)$$

$$V = L\frac{dI}{dt} \qquad (2)$$

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad (3)$$

$$\therefore \frac{Q}{C} = L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d^2Q}{dt^2}$$

$$\therefore V = -LC\frac{d^2V}{dt^2}$$

<u>Allmän lösning</u>:

$$V = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad \text{där} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

<u>Begynnelsevillkor 1</u>: $V = V_0$ vid $t = 0 \rightarrow A = V_0$

<u>Begynnelsevillkor 2</u>: $V < \infty \rightarrow \frac{dI}{dt} < \infty \rightarrow$

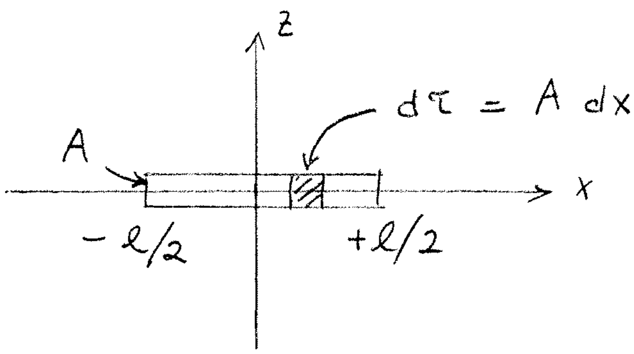
I kontinuerlig $\rightarrow I(0) = 0$

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -C\frac{dV}{dt} = -C\cdot(-\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t)$$

$$\therefore I(0) = -\cancel{C}\cdot(\omega B) \rightarrow B = 0$$

$$\therefore \underline{\underline{V = V_0\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)}}$$

3



Elektriskt dipolmoment $\bar{p} = \int \rho(\bar{r})\bar{r}\,d\tau$

Approximation : $\bar{r} \approx x\hat{x}$ (smal stav)

Vi har $\rho(\bar{r}) = \rho(x) = Bx$, $-\frac{\ell}{2} < x < \frac{\ell}{2}$

$$\therefore \bar{p} = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} B \cdot x \cdot x \cdot \hat{x} \cdot A \cdot dx = B \cdot A \cdot \hat{x} \cdot \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2\,dx$$

$$= B \cdot A \cdot \hat{x} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\ell/2}^{+\ell/2} = B \cdot A \cdot \hat{x}\left[\frac{\ell^3}{24} + \frac{\ell^3}{24}\right]$$

$$= B \cdot A \cdot \frac{\ell^3}{12}\hat{x}$$

(4)

a) Ampères lag : $\oint \bar{H} \cdot d\bar{l} = NI$

varav (med anv. av att spolen är smal)

$$H_j \cdot (2\pi R - d) + H_g \cdot d = NI$$

där

$$H_j = H\text{-fältet i järnet} = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

$$H_g = H\text{-fältet i luftgapet} = \frac{B}{\mu_0}$$

$$\therefore \frac{B}{\mu_0 \mu_r}(2\pi R - d) + \frac{B}{\mu_0} \cdot d = NI$$

$$\therefore B \cdot (2\pi R - d) + B \cdot \mu_r d = \mu_r \mu_0 NI$$

$$\therefore B = \frac{\mu_r \mu_0 NI}{2\pi R + (\mu_r - 1) \cdot d}$$

b) Litet luftgap $\longrightarrow$ vi kan anta att B-fältet är lika starkt (och homogent) i luftgapet som i järnet.

5) Ampères lag:

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{r} = \mu_0 \int \left(\bar{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right)\cdot d\bar{S}$$

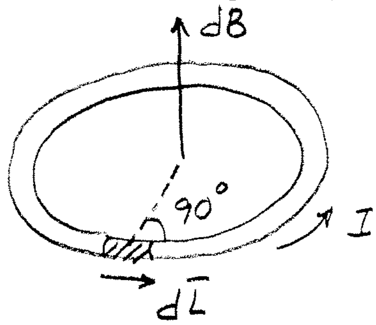
Eftersom strömmen är konstant (stationär situation) kan vi sätta $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$ varav

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{r} = \mu_0 \int \bar{J}\cdot d\bar{S} = \mu_0 I$$

Detta är ekvivalent med Biot-Savarts lag

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\bar{L}\times\hat{r}}{r^2}$$

a) Här är Biot-Savarts lag lämpligare, och ger

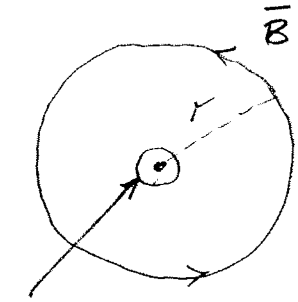


$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dL}{r^2}$$

$$\therefore\ B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\int dL =$$

$$= \frac{\mu_0 I \cdot 2\pi r}{4\pi r^2} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I}{2r}}}$$

b) Här är Ampères lag lämpligast, och ger



$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{r} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\therefore\ \underline{\underline{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}}$$

(6) a) Fel. Förskjutningsströmmen är här $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$, dvs kompletteringstermen i Ampères lag.

b) Fel. Vi har ju $\bar{D} \equiv \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$, varav

$\text{rot } \bar{D} = \epsilon_0 \text{ rot } \bar{E} + \text{rot } \bar{P}$. Om $\text{rot } \bar{E} = 0$,

så kan vi ändå ha $\text{rot } \bar{P} \neq 0$ och således

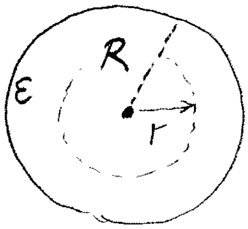
$\text{rot } \bar{D} \neq 0$.

c) Rätt, kraften i fråga är ju $\bar{F} = q(\bar{v} \times \bar{B})$ varför arbetet under tid dt blir

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{r} = \bar{F} \cdot \bar{v}\, dt = q \underbrace{(\bar{v} \times \bar{B}) \cdot \bar{v}}_{=0} dt = 0.$$

d) Fel. I närvaro av magnetfält $\bar{B}$ i metallen kan $\bar{j}$ och $\bar{E}$ ha olika riktningar (exempel: Hall-effekt).

(7)



Gauss lag: $\oint \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q_f$

där Q_f är inneslutna (fria) laddningen. Välj Gauss-yta som en sfär med radie $r < R$.

Då har vi

$$Q_f = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

och

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E}$$

varav Gauss' lag ger

$$\epsilon E \cdot 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\therefore \quad E = \frac{\rho}{3\epsilon} r$$

Potentialen V ges av

$$E = -\frac{dV}{dr} \longrightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho}{3\epsilon} r$$

Potentialen hos ytan relativt centrum blir alltså

$$V_{yta} - V_{centrum} = \int_{r=0}^{r=R} \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho}{3\epsilon} \int_0^R r = -\frac{\rho R^2}{6\epsilon}$$

V.S.B.

8

a) Antag en statisk rymdladdningsfördelning $\rho(\bar{r})$. Vi kan uppenbarligen tänka oss denna fördelning som ett mycket stort antal punktladdningar q_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ i positioner $\bar{r}_i$. Det totala elektriska fältet blir då

$$\bar{E}(\bar{r}) = \sum_i \bar{E}_i(\bar{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\bar{r}-\bar{r}_i|^3}(\bar{r}-\bar{r}_i)$$

Varje term är ju konservativ, dvs

$$\bar{E}_i(\bar{r}) = -\operatorname{grad}\phi_i$$

där $\phi_i = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_i}{|\bar{r}-\bar{r}_i|}$

Således

$$\bar{E}(\bar{r}) = \sum_i(-\operatorname{grad}\phi_i) = -\operatorname{grad}\left(\sum_i \phi_i\right) \equiv -\operatorname{grad}\phi$$

varav ses att $\bar{E}(\bar{r})$ är konservativt. V.S.B.

b) Vi använder Gauss' lag

$$\operatorname{div}\bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Om ρ är statiskt så är $\bar{E}$ konservativt enligt (a), varav följer att $\bar{E} = -\operatorname{grad}\phi$. Insättning ger

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

dvs

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

vilket är Poissons ekvation.