FYSIKUM
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Tentamensskrivning i Elektromagnetism 12 hp
Måndag 15 mars 2010, kl. 9.00 – 15.00

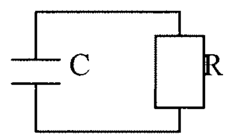
I problemdelen kan du fritt använda alla kända relationer och data utan härledning (däremot skall du namnge dem du använder). I teoridelen skall du ge en efterfrågad beskrivning eller härleda ett efterfrågat resultat från de utgångspunkter som anges i uppgiften. Lösningar skall vara tillräckligt tydliga och utförliga för att tillåta en bedömning.
Varje helt löst problem ger 4 p. För godkänt krävs minst 16 p , med minst 6p inom antingen problem- eller teoridel. Härvid inräknas bonuspoäng från duggorna i den första tentamens-skrivning du genomför efter den kurs du deltagit i.
Hjälpmedel: Räknedosa, Physics Handbook samt den utdelade Översikt och sammanfattning av kursen i elektromagnetism.

Lycka till! D.L.

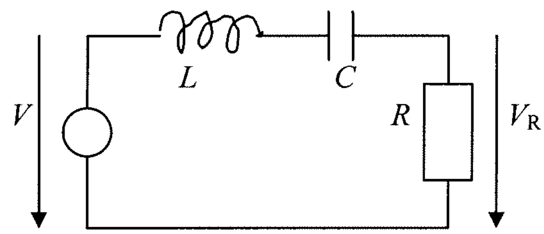
Problem

1. En elektron rör sig med konstant hastighet v = 1000 km/s i ett plan vinkelrätt mot ett homogent magnetfält $\mathbf{B}_1$ med styrkan 0.1 Tesla. Hastigheten v är mycket mindre än ljushastigheten, så man kan bortse från relativistiska effekter.
a) Beräkna radien r hos den lilla cirkelbana som elektronen rör sig i. (2 p)
b) Elektronen bör själv ge upphov till ett svagt, ytterligare magnetfält $\mathbf{B}_2$ genom sin cirkelrörelse. Ange (med motivering) *riktningen* hos fältet $\mathbf{B}_2$ i mittpunkten av cirkeln, jämfört med riktningen hos fältet $\mathbf{B}_1$. (1 p)
c) Ange, med motivering, en formel för *styrkan* hos fältet $\mathbf{B}_2$ i mittpunkten av cirkeln, uttryckt i v, r och beloppet e av elektronens laddning . (Du behöver inte beräkna styrkan.) (1 p)

2. En kapacitans C, uppladdad till en viss begynnelseladdning Q_0, urladdas genom ett motstånd R (krets i vidstående figur). Efter hur lång tid har energin som är lagrad i kapacitansen minskat till precis hälften av sitt ursprungliga värde? (4 p)

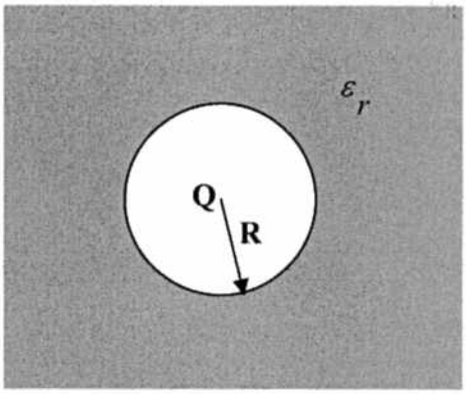


3. En spänningskälla som ger en sinusformad växel-spänning V med vinkelfrekvensen ω ansluts till en resistans R, en induktans L och en kapacitans C kopp-lade i serie (krets i vidstående figur). Över resistansen R fås då växelspänningen V_R .



a) Beräkna förhållandet mellan amplituderna hos växel-spänningarna V_R och V som funktion av ω. (2 p)
b) Rita ett visardiagram över strömmen I och spänningarna V, V_R, V_L och V_C , där V_L och V_C är spänningarna över L respektive C. Beräkna med hjälp härav fasförskjutningen mellan V_R och V som funktion av ω. (1.5 p)
c) Antag att man betraktar V som "insignal" och V_R som "utsignal". Fungerar kretsen som ett lågpassfilter, ett högpassfilter eller ett bandpassfilter? (Motivera svaret.) (0.5 p)

4. En punktladdning Q placeras i centrum av en sfärisk hålighet med radien R, inne i ett dielektriskt medium med den relativa dielektricitetskonstanten ε_r (se figuren) . Inuti håligheten råder vacuum. Mediet kan anses sträcka sig ut mot oändligheten. Anta sfärisk symmetri.



a) Beräkna den elektriska potentialen $\phi(r)$ som funktion av avståndet r från Q. Välj integrationskonstant så att $\phi \to 0$ då $r \to \infty$. (2.5 p)

b) Beräkna den totala bundna ytladdningen Q_b på hålighetens yta (dvs på hålighetens insida), uttryckt i Q och ε_r . (1.5 p)

Teori

5. En lång, rak ledare har en cirkulär tvärsnittsyta med radien R. I ledaren går en konstant elektrisk ström I , jämnt fördelad över tvärsnittsytan. Härled, med utgångspunkt från en av Maxwells ekvationer, det magnetiska fältet inuti ($r < R$) och utanför ($r > R$) ledaren, som funktion av avståndet r från ledarens centrum. (4 p)

6. Förklara kortfattat Hall-effekten. Beräkna det transversella (dvs, mot strömriktningen vinkelräta) elektriska fält $\mathbf{E}_t$ som måste föreligga, om de fria laddningsbärarna antas röra sig med en konstant drifthastighet $\boldsymbol{v}_d$ vinkelrätt mot ett magnetfält $\mathbf{B}$ i en ledare eller i en halvledare. (En enkel och elementär härledning räcker). Visa hur man med hjälp av Hall-effekten kan avgöra om de fria laddningsbärarna i ett metalliskt eller ett halvledande material är positivt eller negativt laddade. (4 p)

7. Visa, med utgångspunkt från Maxwells ekvationer i vacuum, skrivna på differentiell form, att om ingen laddningstäthet eller strömtäthet föreligger i ett visst område, så gäller vågekvationen för **B**-fältet i detta område, dvs

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \qquad (4\text{ p})$$

(Hjälp till ganska snabbt bevis: det matematiska sambandet $\text{rot rot } \mathbf{V} = \text{grad div } \mathbf{V} - \nabla^2 \mathbf{V}$ som gäller för alla differentierbara vektorfält **V**.)

8. a) Härled, med utgångspunkt från den enkla modell där en elektrisk dipol ses som två punktladdningar $-q$ och $+q$ på ett litet avstånd s från varandra, den allmänna formeln

$$F_j = p_x \cdot \frac{\partial Ej}{\partial x} + p_y \cdot \frac{\partial Ej}{\partial y} + p_z \cdot \frac{\partial Ej}{\partial z} \quad , \quad j = x, y, z$$

för den kraft $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ som verkar på en elektrisk dipol $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ i ett elektriskt fält $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$. (2 p)

b) Visa, att om fältet **E** är konservativt, så kan denna kraft skrivas som $\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}))$. (2 p)

①

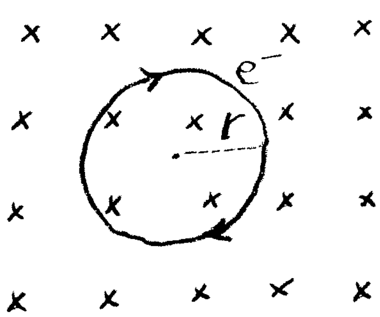
a) Kraft på elektronen: $\bar{F} = -e(\bar{v} \times \bar{B})$.

Eftersom $\bar{v} \perp \bar{B}$ fås $F = B \cdot e \cdot v$

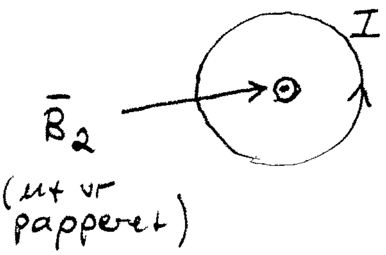
$\therefore \quad \dfrac{mv^2}{r} = Bev \longrightarrow \quad r = \dfrac{mv}{Be}$

$\therefore \quad r = \dfrac{9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{6}}{0.1 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}} = \underline{\underline{56.9 \cdot 10^{-6}\ [m]}}$

b)



Elektronens bana enligt $\bar{F} = -e(\bar{v} \times \bar{B})$



Motsvarande ström och magnetfält i centrum enl. Biot-Savarts lag

<u>Svar:</u> $\bar{B}_2$ i mittpunkten av cirkeln är precis <u>motriktat</u> $\bar{B}_1$.

c) Använd formeln för B-fältet i centrum av en plan, cirkulär strömslinga:

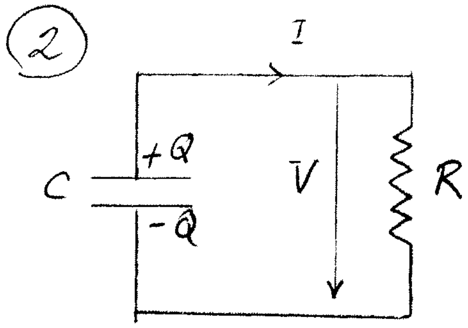
$B = \dfrac{\mu_0 I}{2r}$

Här är $I = \dfrac{e}{2\pi r / v} = \dfrac{ev}{2\pi r}$ (till beloppet) så

$B_2 = \dfrac{\mu_0}{2r} \cdot \dfrac{ev}{2\pi r} = \underline{\underline{\dfrac{\mu_0 \cdot ev}{4\pi r^2}}}$

(styrkan är $B_2 \approx 4.9 \cdot 10^{-12}$ T)

(2)



Med Q, I och V definierade enl. fig. fås

$$V = \frac{Q}{C} \; ; \; I = -\frac{dQ}{dt} \; ; \; I = \frac{V}{R}$$

varav

$$\frac{Q}{RC} = -\frac{dQ}{dt} \longrightarrow Q(t) = Q_0 \cdot e^{-t/RC}$$

om vi antar att urladdningen börjar vid $t = 0$. Energin hos C ges av

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

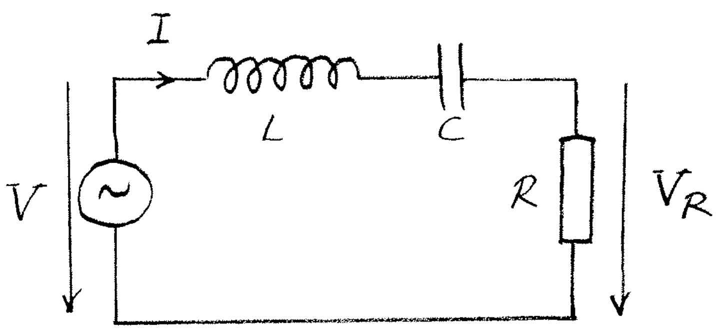
$$\therefore \; W(t) = \frac{1}{2C} Q_0^2 e^{-2t/RC} \equiv W(0) \cdot e^{-2t/RC}$$

$W(t) = \frac{1}{2} W(0)$ då $e^{-2t/RC} = 1/2$, dvs

$$e^{2t/RC} = 2 \longrightarrow \frac{2t}{RC} = \ln 2 \longrightarrow$$

$$\underline{\underline{t = \frac{\ln 2}{2} RC \approx 0.347\, RC}}$$

(3)



a) $V = Z \cdot I$ där $Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R$

$V_R = R \cdot I$

Således

$$V_R = R \cdot \frac{V}{Z} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} V$$

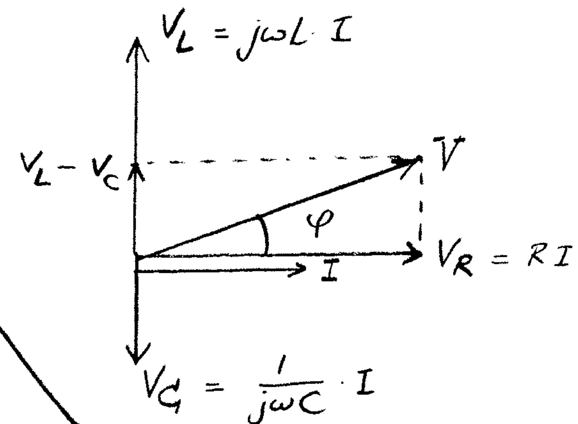
$$\frac{V_R}{V} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \longrightarrow \frac{|V_R|}{|V|} = \underline{\underline{\frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}}$$

b) Visardiagram:

Härav ses att

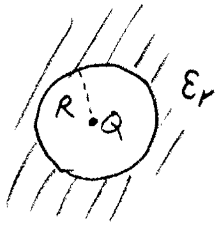
$$\tan\varphi = \frac{|V_L - V_C|}{V_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Fasförskjutningen är alltså $\underline{\underline{\arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)}}$



c) Eftersom $|V_R|/|V| = 1$ (maximal) då $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ och $|V_R|/|V| \to 0$ <u>både</u> för $\omega \to 0$ och $\omega \to \infty$ fungerar kretsen som ett <u>bandpassfilter</u>.

4 a)

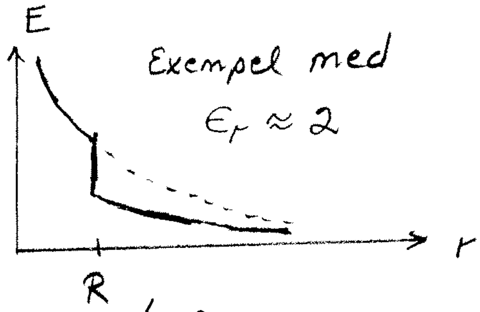


Gauss' lag $\oint \bar{D}\cdot d\bar{S} = Q$ med sfärisk Gauss-yta ger

$$D\,4\pi r^2 = Q \quad \rightarrow \quad D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Härav fås elektriska fältet

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & r<R \\[2mm] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & r>R \end{cases}$$



Potentialen ges av $\bar{E} = -\operatorname{grad}\phi = -\dfrac{d\phi}{dr}\hat{r}$ (sfärisk symmetri). Eftersom ϕ måste vara kontinuerlig (ty diskontinuitet skulle ge $|E| \rightarrow \infty$) fås

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} + C & r<R \\[2mm] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} & r>R \quad (\rightarrow 0 \text{ då } r\rightarrow\infty) \end{cases}$$

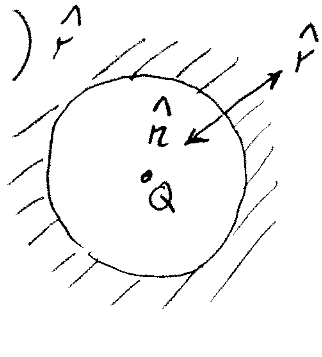
där C bestäms av

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon_r}-1\right)$$

$$\therefore\ \phi(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R}\cdot\left(\dfrac{1}{\varepsilon_r}-1\right) & r<R \\[2mm] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{Q}{r} & r>R \end{cases} \qquad \underline{\underline{\text{(svar)}}}$$

b) $\bar{D} = \varepsilon_0\bar{E} + \bar{P} \rightarrow \bar{P} = \bar{D} - \varepsilon_0\bar{E}$. Vid $r \geq R$ fås

$$\bar{P} = \frac{Q}{4\pi R^2}\hat{r} - \varepsilon_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{R^2}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi R^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\hat{r}$$



Bundna ytladdningstätheten ges av

$$\sigma_b = \bar{P}\cdot\hat{n} = \frac{Q}{4\pi R^2}\cdot\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{n}}_{-1} \quad \text{(se fig)}$$

Totala bundna ytladdningen blir

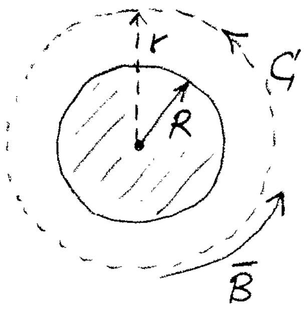
$$Q_b = \sigma_b\cdot 4\pi R^2 = \underline{\underline{Q\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon_r}-1\right)}}$$

($\varepsilon_r > 1$ ger Q_b motsatt tecken mot Q, som väntat).

5.

Utgångspunkt: Ampères lag

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$



Integrationsväg cirkel C med radien r.

<u>$r > R$</u>: Ampères lag ger

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\therefore \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

<u>$r < R$</u>: strömtäthet $j = \frac{I}{\pi R^2}$. Ström <u>innanför</u> C:

$$I_C = j \cdot \pi r^2 = I \cdot \frac{r^2}{R^2}$$

Ampères lag ger

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_C = \mu_0 I \cdot \frac{r^2}{R^2}$$

$$\therefore \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \cdot r}$$

6

Elementär härledning av transversella elektriska fältet $\bar{E}_t$:

$q \longrightarrow \bar{v}_D = \mu \bar{E}_l$ (mobilitet; $\bar{B}$) "longitudinellt fält", håller igång strömmen

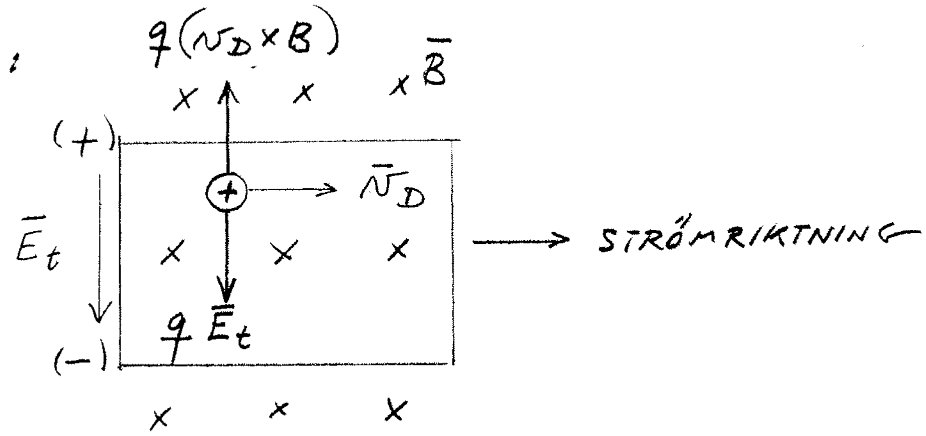
Kraft från magnetfältet $\bar{B}$: $\bar{F}_B = q(\bar{v}_D \times \bar{B})$

Vektorn $\bar{v}_D$ konstant om $\bar{F}_B$ balanseras av en kraft $\bar{F}_E = q\bar{E}_t$, dvs om $\bar{F}_E + \bar{F}_B = 0$, dvs

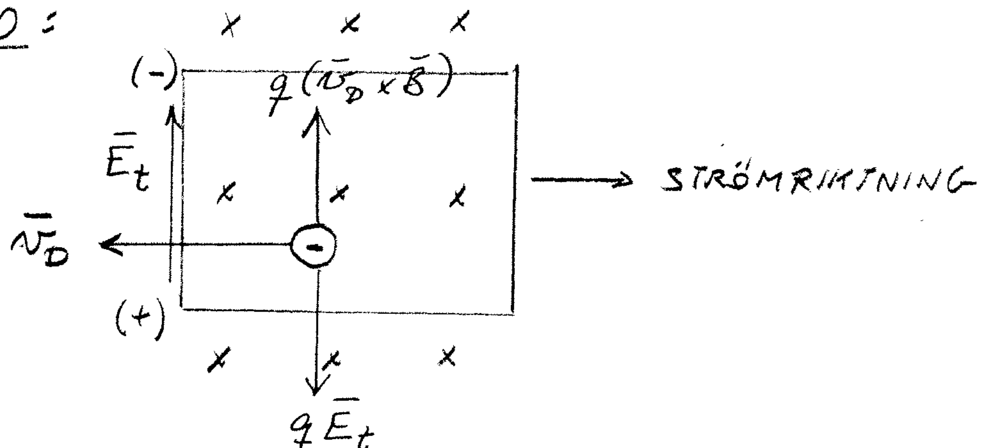
$$\bar{E}_t = -\bar{v}_D \times \bar{B}$$

Om $\bar{v}_D$ och $\bar{B}$ är vinkelräta fås $\underline{\underline{E_t = v_D B}}$

Om $q > 0$:



Om $q < 0$:



∴ $\bar{E}_t$ får motsatt riktning (med $\bar{B}$ och ström som referens) om laddningsbärarna är positiva snarare än negativa.

7 Maxwells ekvationer i vacuum; inga strömmar ($\bar{j}=0$) och inga laddningar ($\rho = 0$):

$$\operatorname{div} \bar{E} = 0 \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\operatorname{rot} \bar{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

Av ekv. (4) fås

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \bar{E})$$

varav

$$\operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \bar{B}}_{=0} - \nabla^2 B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right)$$

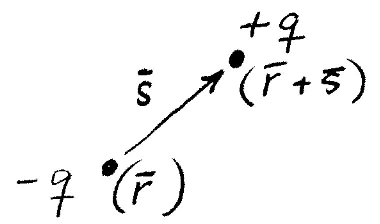
där vi utnyttjat (2), (3) samt den givna identiteten. Således

$$\nabla^2 B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

dvs

$$\nabla^2 B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

8 a)



Dipolmoment:

$\bar{p} = q\bar{s}$

Vi har $\quad \bar{F} = q\,\bar{E}(\bar{r}+\bar{s}) - q\,\bar{E}(\bar{r})$

Om $|\bar{s}|$ är litet fås

$$E_x(\bar{r}+\bar{s}) \simeq E_x(\bar{r}) + \frac{\partial E_x}{\partial x} s_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} s_y + \frac{\partial E_z}{\partial z} s_z$$

samt motsv. för E_y och E_z.

Således

$$F_x = q\left(E_x(\bar{r}+s) - E_x(\bar{r})\right) \approx q\cdot\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} s_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} s_y + \frac{\partial E_x}{\partial z} s_z\right)$$

$$= p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \qquad (1)$$

På samma sätt visas motsvarande formler för F_y och F_z.

V.S.B.

b) Om $\bar{E}$ är konservativt så gäller ju $\bar{E} = -\operatorname{grad}\phi$, varav t.ex.

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(E_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

På motsv. sätt fås $\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$ och $\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$, dvs

$\operatorname{rot}\bar{E} = 0$.

Tillämpa detta på (1) så fås

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad (2a)$$

På motsv. sätt fås tydligen

$$F_y = p_x \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial y} \qquad (2b)$$

$$F_z = p_x \frac{\partial E_x}{\partial z} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial z} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad (2c)$$

Men $\bar{p}\cdot\bar{E} = p_x E_x(\bar{r}) + p_y E_y(\bar{r}) + p_z E_z(\bar{r})$ så (2) innebär att

$$\bar{F} = \operatorname{grad}(\bar{p}\cdot\bar{E}(\bar{r})) \qquad \text{V.S.B.}$$