FYSIKUM
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Dugga nr 2 inom kursen Elektromagnetism 12 hp
Fredag 18 februari 2011, kl.10.15 – 12.00

Lösningar

---

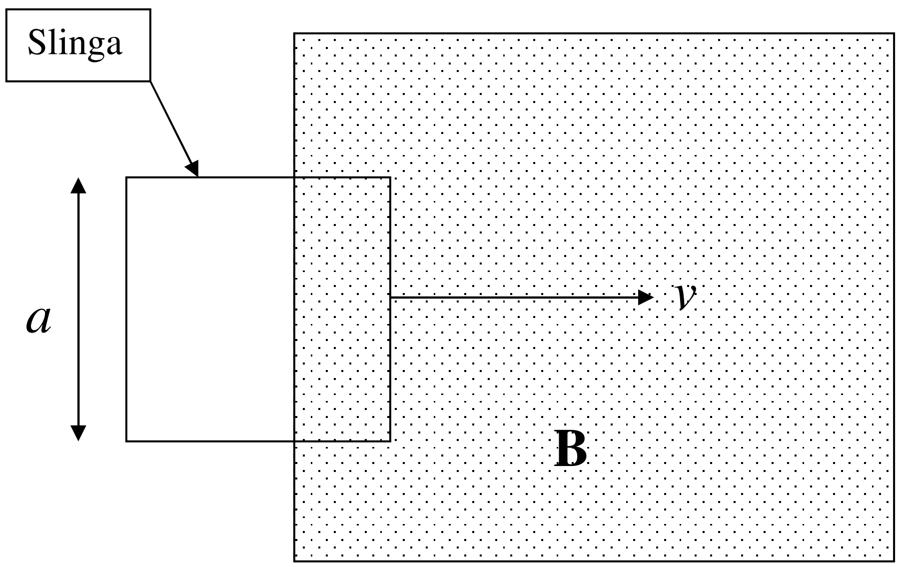
1. En rak, smal kopparstav med längden 0.5 m befinner sig i ett homogent magnetfält med styrkan 0.1 T. Fältet är vinkelrätt mot staven. Staven rör sig med hastigheten 10 m/s i en riktning som är vinkelrät både mot staven och fältet. Beräkna spänningen mellan stavens ändpunkter. (1 p)

Lösning: Lorentzkraften på en elektron i staven är $-e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$, där E är det elektriska fält som upprättas längs staven vid omfördelningen av ledningselektronerna. Eftersom **E**, **v** och **B** är vinkelräta mot varann fås till beloppet att $E = v\,B$. Spänningen över staven är $V = E\,l = l\,v\,B$, där l är stavens längd. Alltså $V = 0.5 \cdot 10 \cdot 0.1 = \underline{0.5\text{ V}}$.

2. Vi fortsätter med problem 1. En voltmeter ansluts med stela, oböjliga ledningar till ändarna på kopparstaven. Voltmetern och ledningarna följer med staven i dess rörelse genom magnetfältet, så att varje del av kretsen (stav, ledningar och voltmeter) hela tiden har precis samma hastighet och rörelseriktning som staven. Vad visar voltmetern? Motivera ditt svar omsorgsfullt med hjälp av någon lämpligt vald av Maxwells ekvationer. (1 p)

Lösning: Det magnetiska flödet genom den krets som bildas av staven, ledningarna och voltmetern är konstant, eftersom kretsen translateras genom ett homogent fält. Enligt Faradays lag är då den elektromotoriska spänningen i kretsen noll, varför ingen ström går och voltmetern visar <u>noll</u>.

3. En platt kvadratisk ledande slinga med sidan a och den totala resistansen R förs med en konstant hastighet v in i ett område, i vilket finns ett homogent, konstant magnetfält **B** riktat vinkelrätt mot slingans plan. Området är antytt (skuggat) i figuren nedan. Magnetfältet är riktat <u>in i</u> bilden. Utanför det skuggade området är magnetfältet = 0. (Vi bortser från detaljerna i hur **B** varierar nära randen av området, dvs vi antar att fältstyrkan B ändras abrupt från noll till ett konstant värde då vi passerar randen. Vi bortser också från slingans självinduktans.)



Ange, med noggrann motivation och tydlig figur, riktningen hos den i slingan inducerade strömmen. Ange även, med figur och motivering, riktningen hos den kraft $\mathbf{F}_m$ varmed magnetfältet påverkar slingan. (1 p)

Lösning: Komponenten längs ledningen av kraften på en elektron i ledningen är $-e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, vilket blir riktat vinkelrätt mot ledningen (åt motsatta håll) för de delar av slingan som är parallella med rörelseriktningen, noll för den del av slingan som är utanför fältet samt riktat nedåt på den högra sidan av slingan. Strömmen blir alltså riktad uppåt i denna del, dvs strömmen går <u>moturs</u> runt slingan. Samma resultat får även med Faradays lag (Lenz' lag), enligt vilken strömmen skall få en sådan riktning att det magnetfält strömmen ger upphov till motverkar den flödesändring som rörelsen ($\mathbf{v}$) hos slingan åstadkommer. Kraften på slingan ges av

$$\mathbf{F}_m = \oint (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) dL$$

vilket ger ett nettobidrag endast från högra kanten av slingan; vi får $\mathbf{F}_m = (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) \cdot a$, där I är strömmen i den högra kanten, dvs $\mathbf{F}_m$ blir riktat <u>åt vänster</u> i figuren.

4. En plattkondensator med kapacitansen 0.10 μF och luft mellan plattorna ansluts till ett batteri med elektromotoriska spänningen 12 V. Kondensatorn får då en viss laddning. I mellanrummet mellan plattorna införs nu ett dielektriskt material med den relativa dielektriska konstanten $\varepsilon_r = 4.0$. Beräkna den ändring av kondensatorns laddning som därvid äger rum. Ökar eller minskar laddningen? (1p)

Lösning: Då strömmen är noll (dvs vid jämvikt) är spänningen V över kondensatorn likamed batteriets ems, dvs 12 V. Laddningen hos kondensatorn är $Q = C \cdot V$, där kapacitansen $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 A/d$ där ε_r har värdet 1.0 för luft och 4.0 för det nämnda materialet (A = plattornas yta, d = avstånd mellan plattorna). Följaktligen ökar kapacitansen med en faktor 4 då det dielektriska materialet förs in mellan plattorna. Laddningen med luft mellan plattorna är $Q = C \cdot V = 0.1 \cdot 10^{-6} \cdot 12$ C. Laddningen med det nämnda materialet mellan plattorna blir 4 gånger detta, dvs skillnaden (en <u>ökning</u>) blir $3 \cdot 0.1 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \text{ C} = \underline{3.6 \cdot 10^{-6} \text{ C}}$.

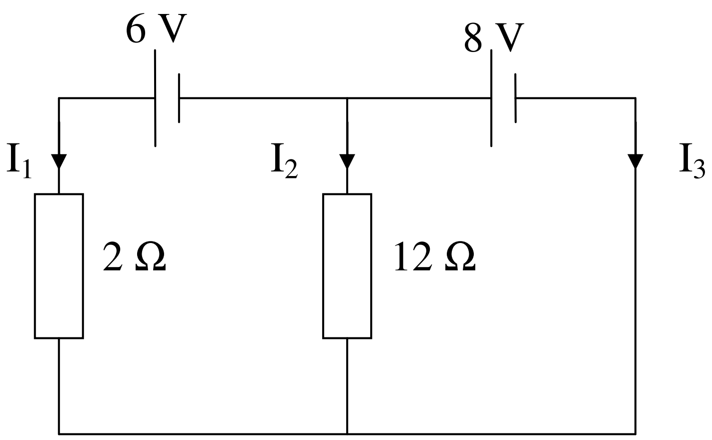
5. En spole med självinduktansen 0.2 H och resistansen 20 Ω är ansluten till en växelspänningskälla med spänningen 220 V (effektivvärde) och frekvensen 60 perioder per sekund. Beräkna strömstyrkan i spolen (effektivvärdet) samt fasförskjutningen mellan ström och spänning. (1 p)

Lösning: Med en seriekopplad resistans R = 20 Ω och en induktans L = 0.2 H fås impedansens belopp till

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{20^2 + (2\pi \cdot 60)^2 \cdot 0.2^2} = 78.0 \quad \Omega$$

Härav fås effektivvärdet av strömstyrkan I = V/Z = 220/78.0 = 2.82 A.
Fasförskjutningen ϕ fås av $\tan \phi = \omega L/R = 2\pi \cdot 60 \cdot 0.2/20 = 3.77$ varav $\phi = 75.1^0$.

6. Beräkna strömmarna I_1, I_2 och I_3 i nedanstående krets, vilken som synes består av två spännings-källor och två resistanser. Vi bortser från den inre resistansen hos spänningskällorna. (1 p)

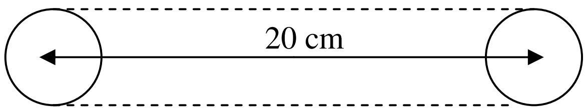


Lösning: Ställ upp Kirchoffs lag att summan av spänningsfallen är noll, dels för den vänstra, dels för den högra maskan i figuren:
$-2\, I_1 + 12\, I_2 + 6 = 0$
$-12\, I_2 + 8 = 0$
Den andra ekvationen ger genast $\underline{I_2 = 2/3 \text{ A}}$, vilket insatt i den första ekvationen ger $\underline{I_1 = 7 \text{ A}}$. Vidare ställer vi upp Kirchoffs strömlag $I_1 + I_2 + I_3 = 0$, vilket genast ger $\underline{I_3 = -(7 + 2/3)\ \text{A}}$.

7. En ideal, förlustfri transformators sekundärspole är ansluten till en en metallstav med resistansen 0.10 Ω. Till primärspolen ansluts en växelspänningskälla. Effektivvärdet av spänningen över primärspolen är 500 V. Primärspolen har 1000 varv och sekundärspolen 10 varv. Vad är effektivvärdet av strömmen i primärspolen? (1p)

Lösning: För den ideala transformatorn gäller $V_1/V_2 = N_1/N_2$ samt $N_1I_1 = N_2I_2$, med sedvanliga beteckningar. Vi får följaktligen $V_2 = V_1\cdot(N_2/N_1) = 500\cdot(10/1000) = 5$ V, varav $I_2 = V_2/R = 5/0.1 = 50$ A (R är resistansen hos metallstaven), varav $I_1 = (N_2/N_1)\cdot I_2 = (10/1000)\cdot 50 = \underline{0.5 \text{ A}}$.

8. Kring en smal, cirkulär ring av mjukjärn har man lindat en spole med 200 varv. Ringen har en radie på 10 cm. Järnet har den relativa permeabiliteten $\mu_r = 250$. Genom spolen flyter strömmen 0.1 A.
a) Beräkna beloppen av fälten **B** och **H** inuti ringen. (0.5 p)
b) Beräkna magnetiseringen **M** hos ringen, samt styrkan hos den mot **M** svarande bundna ström som flyter genom en cirkulär yta vars rand ligger helt inuti järnet (ytans radie = 10 cm). (0.5 p)



Ringen sedd från sidan

Lösning: a) Amperes lag ger $H\cdot 2\pi R = N\cdot I$ där $R = 0.1$ m, $N = 200$ och $I = 0.1$ A, varav $\underline{H = (100/\pi) \approx 31.8 \text{ A/m}}$. Vidare fås $B = \mu_r\mu_0 H = 250\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot(100/\pi) = \underline{0.01 \text{ T}}$.
b) Beloppet av **M** ges av $M = (B/\mu_0) - H = (\mu_r - 1)\cdot H \approx 249\cdot 31.8 \approx 7926$ A/m. Den motsvarande bundna strömmen genom den cirkulära ytan ges av

$$I_b = \oint M \cdot \mathbf{dr} = M \cdot 2\pi R = 7926 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0.1 \approx \underline{4980\,\text{A}}\,.$$