FYSIKUM
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Dugga nr 1 inom kursen Elektromagnetism 12 hp
Måndag 30 januari 2012, kl.10.15 – 12.00

Motiveringar och beräkningar kan vara kortfattade, men måste vara tillräckligt tydliga för att tillåta en bedömning. Erhållna poäng räknas om till tentamenspoäng (bonus) vid första ordinarie tentamen efter kursen.
Hjälpmedel: kalkylator, Physics Handbook, lärobok (*K.Hultqvist*) *och* Översikt och sammanfattning *(version 4).*

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9.0\cdot10^{9}\ \text{Vm/As}, \quad \mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}\ \text{Vs/Am}, \quad e \approx 1.602\cdot10^{-19}\ \text{C}$$

Elektronens massa $m = 9.109\cdot10^{-31}$ kg   Lycka till! / D.L.

---

1. En punktladdning Q är placerad i punkten $(x, y) = (0,0)$ i ett cartesiskt koordinatsystem. En annan punktladdning $-Q$ är placerad i punkten $(x, y) = (d, 0)$.
a) Rita en figur, med vars hjälp du grafiskt konstruerar riktningen hos den resulterande elektriska fältvektorn **E** i punkten $(x,y) = (d/2, d/2)$. (0.5 p)
b) Beräkna det elektriska fältets styrka i punkten $(x,y) = (d/2, d/2)$, uttryckt i Q, d och ε_0. (0.5 p)

2. En punktladdning $Q_1 = +0.30\ \mu$C befinner sig på avståndet 5.0 cm från en annan punktladdning $Q_2 = -2.70\ \mu$C. Vilken energi åtgår för att flytta Q_1 till avståndet 10.0 cm från Q_2? (1p)

3. De snabbaste fria elektronerna i koppar rör sig med hastigheten $1.56\cdot10^{6}$ m/s. Antag att en sådan elektron rör sig i ett homogent magnetfält med styrkan 0.01 Tesla, och att rörelsen utgör en cirkel i ett plan vinkelrätt mot magnetfältet. Beräkna cirkelns radie. (1p)

4. Ett metallklot omges av ett slutet metalliskt skal. Skalet är inte nödvändigtvis sfäriskt, utan kan ha en oregelbunden form. Ingen elektrisk kontakt finns mellan dem. Metallklotet har den statiska laddningen Q, medan skalet har den statiska laddningen $-Q/3$. Beräkna den totala laddningen på skalets insida samt på skalets utsida. (1 p)

5. En metallsfär med radien R, som befinner sig på mycket stort avstånd från andra kroppar och laddningar, har den totala laddningen Q. Beräkna den totala energin hos det elektriska fält som omger den laddade sfären.
(Ledning: två enkla formler är allt som behövs!) (1 p)

6. Genom en koppartråd med diametern 1 mm går en elektrisk ström på 0.1 A. Antalet fria elektroner per volymsenhet i koppar är $8.50\cdot10^{28}$ per m^3.
a) Beräkna de fria elektronernas drifthastighet i tråden. (0.5 p)
b) Resistiviteten hos koppar är $1.67\cdot10^{-8}$ Ωm. Beräkna den elektriska fältstyrkan E i tråden. (0.5 p)

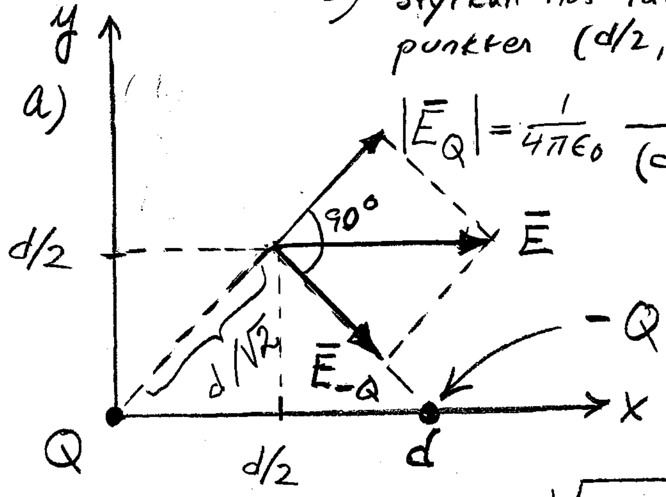
7. I en enkel modell av väteatomen rör sig elektronen i en cirkulär bana kring den stillaliggande atomkärnan (protonen). Banans radie är $0.53\cdot10^{-10}$ m och elektronen rör sig med hastigheten $2.19\cdot10^{6}$ m/s. Beräkna styrkan hos det resulterande magnetfältet i den punkt där atomkärnan befinner sig. (1p)

8. En lång cylinder (dvs ett rör), bestående av ett isolerande material, har längden L och den yttre radien R där $L >> R$.. Ytan på cylindern har försetts med en konstant laddning σ per ytenhet. Cylindern roterar kring sin längdaxel (symmetriaxel) med N varv per sekund. Beräkna styrkan hos det resulterande magnetiska fältet inuti cylindern. Bortse från kanteffekter på fältet i cylinderns ändar. (1p)

LÖSNINGAR DUGGA 1, 2012:

1

a)



b) Styrkan hos fältet $\bar{E}_Q$ från Q i punkten $(d/2, d/2)$:

$$|\bar{E}_Q| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{(d/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q}{d^2}$$

$$|\bar{E}_{-Q}| = |\bar{E}_Q|$$

(symmetri)

90° mellan $\bar{E}_Q$ och $\bar{E}_{-Q}$

$$\bar{E} = \bar{E}_Q + \bar{E}_{-Q} \longrightarrow E = \sqrt{|\bar{E}_Q|^2 + |E_{-Q}|^2} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot|\bar{E}_Q| = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\epsilon_0}\frac{Q}{d^2}}}$$; $\bar{E}$ pekar i <u>x-axelns riktning</u>

---

2 Potentiell energi hos Q_1 på avståndet r från Q_2 är

$$Q_1\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{r}\right)}_{\text{potential fr. } Q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r}$$

Arbete för att flytta Q från r_1 till r_2 är likamed skillnaden i potentiell energi:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q_1Q_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) =$$

$$\simeq 9\cdot10^9\cdot(0.3\cdot10^{-6})\cdot(-2.70\cdot10^{-6})\cdot\left(\frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.05}\right) =$$

$$\simeq \underline{\underline{7.3\cdot10^{-2}\ \text{J} = 0.073\ \text{J}}}$$

(3) Kraften på elektronen är $\bar{F} = -e(\bar{v} \times \bar{B})$.
Om rörelsen är i ett plan vinkelrätt mot $\bar{B}$, så är $\bar{v}$ ständigt vinkelrät mot $\bar{B}$, så att $F = evB$. Kraften = massan × centripetalaccelerationen dvs

$$evB = m\frac{v^2}{R}$$

där R är banans radie. Således $eB = \frac{mv}{R}$ varav

$$R = \frac{mv}{eB}$$

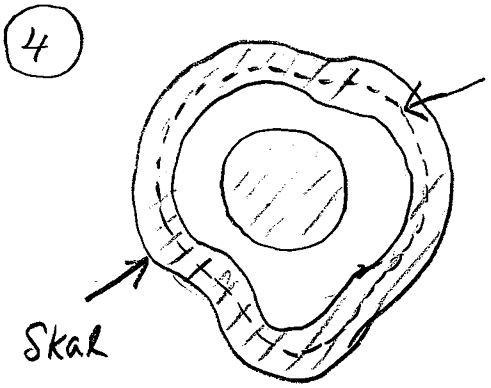
Insatta siffror ger

$$R = \frac{9.109 \cdot 10^{-31}\,[kg] \cdot 1.56 \cdot 10^{6}\,[m/s]}{1.602 \cdot 10^{-19}\,[C] \cdot 0.01\,[T]} \approx \underline{\underline{8.87 \cdot 10^{-4}\,m \approx 0.9\,mm}}$$

(Egentligen bryts denna rörelse upp p.g.a. elektronens spridning.)

---

(4)



Om vi lägger en Gauss-yta inuti skalet, så vet vi att $\bar{E} = 0$ där (statiska laddningar). Enligt Gauss' lag

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{Q_{innesluten}}{\epsilon_0}$$

så vet vi att den totala inneslutna laddningen $= 0$. Således måste vi ha <u>laddningen $-Q$ på skalets insida</u>. Eftersom skalets totala laddning är $-Q/3$, så måste vi alltså ha en <u>laddning $\frac{2}{3}Q$ på skalets utsida</u> $\left(\frac{2}{3}Q - Q = -\frac{Q}{3}\right)$.

Av argumentet framgår att vi <u>inte</u> behöver anta sfärisk symmetri.

(5) Den totala energin hos det elektriska fältet är likamed den energi som fordras för att ladda upp sfären. Denna energi är

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

där C är kapacitansen, dvs $C = 4\pi\epsilon_0 R$.
Således är energin hos det elektriska fältet (*)

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \underline{\underline{\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}}}$$

---

(6) a) Vi har strömtätheten $j = n \cdot e \cdot v_d$ och strömmen $I = j \cdot A = j \cdot \pi R^2 = n \cdot e \cdot v_d \cdot \pi \cdot R^2$

där R är trådens radie. Drifthastigheten blir alltså

$$v_d = \frac{I}{n \cdot e \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{0.1\ [A]}{\underset{[m^{-3}]}{8.5 \cdot 10^{28}} \cdot \underset{[C]}{1.602 \cdot 10^{-19}} \cdot \pi \cdot \underset{[m^2]}{(0.5 \cdot 10^{-3})^2}}$$

$$= \underline{\underline{9.35 \cdot 10^{-6}\ [m/s]}}$$

b) $$E = \rho \cdot j = \frac{\rho \cdot I}{A} = 1.67 \cdot 10^{-8}\ [\Omega \cdot m] \cdot \frac{0.1\ [A]}{\pi \cdot (0.5 \cdot 10^{-3})^2\ [m^2]}$$

$$= \underline{\underline{0.213 \cdot 10^{-2}\ [V/m]}}$$

(*) alternativ: använd

$$U = \frac{1}{2}\int \rho \phi \, d\tau$$

eller integrera energitätheten $E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$!

(7) Biot-Savarts lag

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \cdot \frac{\bar{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

ger här

$$B = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{v}{r^2}$$ (ty $\bar{v}$ är vinkelrät mot $\hat{r}$, se fig.)

(Samma resultat fås om vi ser elektronen som en ström $I = \frac{e}{(2\pi r / v)} = \frac{ev}{2\pi r}$

och sätter in i formeln för fältet i mitten av en cirkulär strömslinga, dvs

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 e v}{4\pi r^2}.)$$

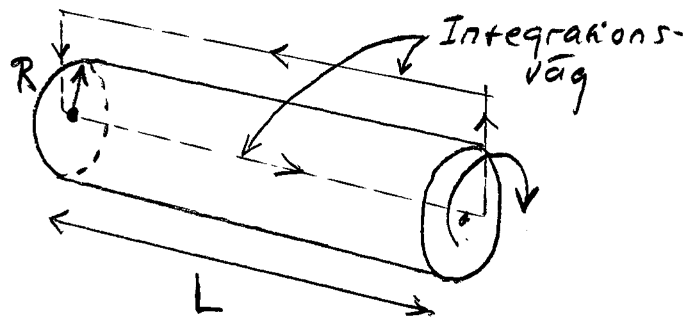
Insatta värden ger

$$B \approx \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 2.19 \cdot 10^{6}}{4\pi \cdot (0.53 \cdot 10^{-10})^2} \approx \underline{\underline{12.5\ [T]}}$$

Ett mycket starkt magnetfält!

---

(8) Påminner tydligen om en lång solenoid!



Amperes lag:

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 I$$

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = B \cdot L$$ (bidrag endast inuti cylindern – $B \approx 0$ utanför)

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{\sigma \cdot 2\pi R \cdot L}{1/N} = N \cdot \sigma \cdot 2\pi R \cdot L$$

$$\therefore\ B \cdot L = \mu_0 N \cdot \sigma \cdot 2\pi R L \longrightarrow \underline{\underline{B = \mu_0 N \sigma \cdot 2\pi R}}$$