FYSIKUM
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Dugga nr 1 inom kursen Elektromagnetism 12 hp
Måndag 31 januari 2011, kl.9.20 – 11.20

Motiveringar, förklaringar och beräkningar kan vara kortfattade, men måste vara tillräckligt utförliga för att tillåta en bedömning. Svar skall markeras med understrykning eller liknande. Glöm ej att ange eventuell sort! Erhållna poäng räknas om till tentamenspoäng (bonus) vid ordinarie tentamenstillfälle omedelbart efter kursen. Hjälpmedel: kalkylator, Physics Handbook, lärobok (K.Hultqvist) och Översikt och sammanfattning (version 4).

Numerisk hjälp: $1/4\pi\varepsilon_0 \approx 9\cdot10^9$ Nm^2/C^2. Det räcker att ange svar med 2 – 3 siffrors noggrannhet.

Lycka till! / D.L.

---

1. En elektron med hastigheten 10^6 m/s rör sig i ett plan vinkelrätt mot ett homogent magnetfält med styrkan 10^{-4} T (Tesla).
a) Beräkna radien hos elektronens bana. (0.5p)
b) Genom att addera ett homogent elektriskt fält kan man få elektronen att istället röra sig längs en rät linje. Vilken styrka krävs på det elektriska fältet? (0.5p)

Lösning: a) Kraften på elektronen ges av $\mathbf{F} = -e\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$. Eftersom v är vinkelrät mot B fås, till beloppen, $F = evB$, varav (med centripetalaccelerationen v^2/r) fås $mv^2/r = evB$, där r är banans radie. Således $r = mv/eB = 9.1\cdot10^{-31}\cdot10^6/(1.6\cdot10^{-19}\cdot10^{-4}) = 5.7\cdot10^{-2}$ m = 5.7 cm.
b) Man vill ha $\mathbf{F} = -e\cdot(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) = 0$, varav, till beloppen (eftersom **v**, **B** och **E** är vinkelräta mot varandra), $E = vB = 10^6\cdot10^{-4} = 10^2$ = 100 V/m.

2. En spänning på 1.2 V föreligger mellan ändpunkterna av en koppartråd med längden 6.3 m. Beräkna den effekt som utvecklas per volymsenhet i tråden. (1 p)

Lösning: Den elektriska fältstyrkan i tråden är $E = 1.2 / 6.3 = 0.19$ V/m. Strömtätheten ges av $j = E/\rho$, där resistiviteten $\rho = 1.67\cdot10^{-8}$ ohm-m (från Physics Handbook). Således $j = 0.19/(1.67\cdot10^{-8})$ $= 0.114\cdot10^8$ A/m^2. Effekten per volymsenhet är $p = E\cdot j = 0.19\cdot0.114\cdot10^8 = 2.2\cdot10^6$ W/m^3.

3. Enligt måttligt tillförlitliga uppgifter kan ett blixtnedslag tänkas innebära en urladdning som varar en tusendels sekund, och sker över en spänning på fem miljoner volt. Den frigjorda energin kan tänkas vara 100 miljoner joule. Beräkna från dessa uppgifter den genomsnittliga strömstyrkan i urladdningen samt den totala överförda laddningen. (1 p)

Lösning: Effekten i nedslaget ges av P = energi/tid = $100\cdot10^6$ [J]/10^{-3} [s] = 10^{11} [J/s]. Enligt formeln $P = V\cdot I$ (V = spänning, I = ström) fås $I = P/V = 10^{11}/5\cdot10^6$ = 20 000 [A]. Den överförda laddningen blir $Q = I\cdot t = 20\,000 \cdot 0.001$ = 20 [C].

4. Fyra lika stora punktladdningar, vardera likamed $3\cdot10^{-8}$ C, är placerade i hörnen av en kvadrat med diagonalen 60 cm. Vi bortser från andra laddningar i omgivningen.
a) Beräkna den elektriska fältstyrkan i kvadratens centrum. (0.5 p)
b) Beräkna den elektriska potentialen i kvadratens centrum, under förutsättning att potentialen antas vara noll på oändligt avstånd från kvadraten. (0.5 p)

Lösning: a) Var och en av punktladdningarna har storleken $Q = 3\cdot10^{-8}$ C och ger fältstyrkan $E = (1/4\pi\varepsilon_0)\cdot(Q/r^2)$ i kvadratens centrum. Här är $r = 0.3$ m avståndet från ett hörn till kvadratens centrum. Emellertid är den totala fältstyrkan vektorsumman
$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4$
av de fyra fälten, vilken är noll ($\mathbf{E} = 0$) (ses av symmetrin).
b) Var och en av laddningarna ger bidraget $V = (1/4\pi\varepsilon_0)\cdot(Q/r)$ till potentialen i centrum, vilken således blir $V = 4\cdot(1/4\pi\varepsilon_0)\cdot(Q/r) \approx 4\cdot9\cdot10^{-9}\cdot(3\cdot10^{-8}/0.3) = 3600$ V.

5. En metallsfär med radien 1 m har laddats upp till spänningen 100 000 V relativt omgivningen. Sfären befinner sig på ett stort avstånd från andra ledande föremål och laddningar.

a) Beräkna laddningen på sfären. (0.5p)

b) Beräkna energin per volymsenhet hos det elektriska fältet vid sfärens yta. (0.5p)

Lösning: a) Laddningen ges av $Q = VC$ där kapacitansen för en metallsfär är $C = 4\pi\varepsilon_0 R$, där R är sfärens radie. Således $Q = 100\,000 \cdot (1/9) \cdot 10^{-9} \cdot 1$ = 11 µC.

b) Elektriska fältet är samma som från en punktladdning i sfärens centrum, dvs $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 R^2) = V \cdot 4\pi\varepsilon_0 R/(4\pi\varepsilon_0 R^2) = V/R$ = 100 000/1 = 100 000 V/m.. Energitätheten ges av $w = \varepsilon_0 E^2/2 = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot (100\,000)^2/2 = 4.4 \cdot 10^{-2}$ J/m^3

6. En total laddning Q är homogent fördelad inuti ett klot med radien R. Det elektriska fältet kan antas vara sfäriskt symmetriskt kring klotets centrum. Beräkna det elektriska fältets styrka E som funktion av avståndet r från klotets centrum för $r < R$. (1p)

Lösning: Vi antar som Gauss-yta en sfär med radien r. Gauss' lag, dvs $\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ ger

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad \text{varav} \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{r}{R^3} \quad \text{(=svar)}$$

7. En elektron rör sig, med hastigheten 1 m/s, parallellt med en mycket lång, rak ledande, ej laddad tråd, i vilken går en ström med styrkan 1 A. Avståndet mellan elektronen och den ledande tråden är 1 m, och elektronen rör sig åt samma håll som strömmen. Elektronen påverkas av en viss kraft.

a) Vilken riktning har denna kraft? (0.5p)

b) Hur starkt måste ett elektriskt fält vara som ger en lika stor kraft på elektronen? Ange det elektriska fältet i sorten volt/meter. (0.5p)

Lösning: Magnetfältets styrka på avståndet r från ledaren ges av

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \quad \text{vilket på 1 m avstånd blir} \quad B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2\pi \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ T.}$$

B är vinkelrät mot strömriktningen. Riktningen hos B fås med högerhandsregeln.

a) Eftersom elektronen rör sig vinkelrätt mot detta fält, blir kraften på elektronen enligt $F = -e \cdot (v \times B)$ till beloppet likamed evB. Kraften är riktad radiellt bort från tråden. (Glöm inte elektronens negativa laddning!)

b) Fältets styrka ges av eE = evB, dvs $E = vB = 1 \cdot 2 \cdot 10^{-7} = 2 \cdot 10^{-7}$ V/m.

8. I en lång, rak, cylindrisk ledare med radien R flyter en ström I_0 längs med ledaren. Strömtätheten är densamma överallt i ledaren, och genererar ett magnetfält inuti och utanför ledaren. Beräkna magnet-fältets styrka på avståndet $R/2$ från ledarens centrum. (1 p)

Lösning: Vi använder Ampères lag, dvs $\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I$

på en cirkel med radien r och mittpunkt i ledarens centrum. Detta ger $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I = \mu_0 I_0 \cdot (r^2/R^2)$ varav

$B = \mu_0 I_0 \cdot (r/2\pi R^2)$. För r = R/2 fås härav $B = \mu_0 I_0 \cdot (1/4\pi R)$