FYSIKUM
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Dugga nr 1 inom kursen Elektromagnetism 12 hp
Måndag 1 februari 2010, kl. 9.15 – 11.15 D.L.

Motiveringa och beräkningar kan vara kortfattade, men tillräckligt tydliga för att tillåta en bedömning. Erhållna poäng räknas om till tentamenspoäng (bonus) vid ordinarie tentamenstillfälle omedelbart efter kursen. Hjälpmedel: kalkylator, Physics Handbook, lärobok (K.Hultqvist) och Översikt och sammanfattning (version 4).

Lycka till! / D.L.

1. Fyra lika stora punktladdningar, vardera likamed $3{\cdot}10^{-8}$ C, är placerade i hörnen av en kvadrat med diagonalen 60 cm. Beräkna dels den elektriska fältstyrkan, dels den elektriska potentialen, i en punkt precis i kvadratens centrum. (Betänk symmetrin!) (1 p)

Lösning: Avståndet r från varje laddning Q = $3{\cdot}10^{-8}$ C till kvadratens centrum P är 30 cm = 0.3 m. Av symmetriskäl ses genast att den totala elektriska fältstyrkan $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3+\mathbf{E}_4$ i P är noll (vektor-addition!). Potentialen Φ i P blir summan

$$\Phi = 4\cdot\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}\right) \approx \underline{3600\,V}$$

2. En proton består av två s.k. upp-kvarkar, vardera med laddningen $+2e/3$, och en s.k. ner-kvark med laddningen $-e/3$, där e är beloppet av laddningen hos en elektron. Kvarkarna är punktformiga. Anta att de tre kvarkarna i protonen befinner sig i var sin ände av en liksidig triangel med sidan 10^{-15} meter. (Detta är nog inte sant, men det är en trevlig modell.) Vad är den elektrostatiska energin hos detta laddningssystem, dvs det arbete som skulle krävas för att föra samman de tre kvarkarna från oändligheten till dessa positioner? (1 p)

Lösning: Triangelsidan är $l = 10^{-15}$ m. Den elektrostatiska energin blir

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}}+\frac{q_1q_3}{r_{13}}+\frac{q_3q_2}{r_{32}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(\frac{2}{3}e)(\frac{2}{3}e)}{l}+\frac{(\frac{2}{3}e)(-\frac{1}{3}e)}{l}+\frac{(-\frac{1}{3}e)(\frac{2}{3}e)}{l}\right) = 0$$

Svar: noll

3. En massiv metallkula har radien R och laddningen Q. Inga strömmar finns i kulan. Antag att den elektriska potentialen på stort avstånd från kulan sätts = 0. Inga andra laddningar finns i närheten, och kulan befinner sig i luft (≈ vacuum). Beräkna den elektriska potentialen i kulans centrum. (Svaret skall motiveras med hjälp av Gauss' lag.) (1 p)

Lösning: Inga strömmar i kulan innebär att elektriska fältet $\mathbf{E} = 0$ inuti kulan, varav följer att potentialen Φ är konstant, dvs samma i kulans centrum som på dess yta. Utanför kulan ($r > R$) är fältet $\mathbf{E}$ samma som från en punktladdning Q i kulans centrum (följer av Gauss' lag), varav följer att potentialen för $r > R$ också är samma som från en punktladdning Q i kulans centrum. Potentialen på kulans yta ($r = R$) och därmed även i kulans centrum är således

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R} \qquad \text{(svar)}$$

4. Två oändligt stora, parallella, plana ytor har samma konstanta ytladdningstäthet σ. Beräkna den elektriska fältstyrkan dels i området mellan de båda ytorna, dels i de områden som inte är mellan de båda ytorna. Ytorna befinner sig i vacuum. (1 p)

Lösning: Vardera ytan ger på ömse sidor upphov till ett utåtriktat fält **E** (vinkelrätt mot ytan) med styrkan E = $\sigma/2\varepsilon_0$ (följer av Gauss' lag). Enkel superposition av fälten från de båda ytorna ger att fältstyrkan är likamed noll mellan ytorna, och att fältet är riktat vinkelrätt bort från ytorna i det övriga området, med styrkan $E = \sigma/\varepsilon_0$.
Alternativ lösning: placera en Gaussyta i form av en parallellepiped mellan ytorna; den inneslutna laddningen är då noll, och av symmetrin ses att fältet där måste vara noll. Placera därefter en liknande Gauss-yta så att den omsluter en ändlig area *A* av båda ytorna. Den inneslutna laddningen är då $2\cdot\sigma\cdot A$, varav av Gauss' lag och symmetrin ses att fältstyrkan på ömse sidor måste vara $E = \sigma/\varepsilon_0$.

5. En plattkondensator består av två parallella metallskivor, vilka befinner sig i luft och vänder en yta på 1 m^2 mot varandra. Avståndet mellan skivorna är 1 mm. Spänningen mellan dem är 1000 V. Hur mycket energi frigörs då kondensatorn urladdas? (1 p)

Lösning: Energin per volymsenhet hos det elektriska fältet är $\varepsilon_0 E^2/2$. Fältstyrkan $E = V/d$, där *d* är avståndet mellan plattorna och *V* spänningen. Volymen hos fältet är *Ad*, där *A* är ytan. Den totala energin hos fältet, dvs den vid urladdning frigjorda energin, är alltså
$W = (\varepsilon_0 E^2/2)\cdot Ad = (\varepsilon_0 V^2/2d^2)\cdot Ad = \varepsilon_0 V^2 A/2d \approx (8.854\cdot10^{-12}\cdot1000^2\cdot1) / 2\cdot0.001$
$= 4.427\cdot10^{-3}$ J.
Alternativ lösning: Beräkna och använd kondensatorns kapacitans C.

6. Enligt måttligt tillförlitliga uppgifter kan ett blixtnedslag tänkas innebära en urladdning som varar en tusendels sekund, och sker över en spänning på fem miljoner volt. Den frigjorda energin kan tänkas vara 100 miljoner joule. Beräkna från dessa uppgifter den genomsnittliga strömstyrkan i urladdningen samt den totala överförda laddningen. (1 p)

Lösning: Effekten *P* i nedslaget ges av *P* = energi/tid = 100 000 000 J / 0.001 s = 10^{11} J/s. Enligt formeln $P = V\cdot I$ (effekt =spänning · ström) fås $I = 10^{11} / 5\cdot10^6$ = 20 000 A. Den överförda laddningen blir *Q* = ström · tid = 20 000 · 0.001 = 20 C.

7. Ett batteri ansluts till en variabel yttre resistans *R*. När strömmen *I* genom kretsen är 6 A, är spänningen *V* över resistansen *R* likamed 8.4 V. Nu minskar man *R*, varvid *I* ökar till 8 A medan *V* sjunker till 7.2 V. Beräkna batteriets elektromotoriska spänning ε och inre resistans *r*. (1 p)

Lösning: Formeln $\varepsilon = r\cdot I + V$ ger ekvationssystemet

$$\varepsilon = r\cdot6 + 8.4$$
$$\varepsilon = r\cdot8 + 7.2$$

vilket ger $r = 0.6\ \Omega$ och $\varepsilon = 12$ V.

8. Ett smal sträng av plast (ej ledande) har böjts till en cirkulär ring med radien 10 cm. Denna ring har tillförts laddningen 10 μC, vilken fördelats jämnt kring ringen. Ringen roterar i sitt eget plan kring sin mittpunkt *M*, med 1000 varv per sekund. Beräkna styrkan av det resulterande magnetfältet i punkten *M*. (1 p)

Lösning: Rotationen innebär en ström $I = Q/t$, där *Q* är laddningen på ringen och *t* tiden för ett varv, dvs $I = 10\cdot10^{-6} / 10^{-3} = 10^{-2}$ A. Då laddningen är jämnt fördelad runt ringen är strömmen konstant och situationen cirkulärsymmetrisk kring ringens mittpunkt. Från Biot-Savarts lag fås då formeln

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$ (fältet i centrum av en cirkulär strömslinga med radien r)

varav fås $B = 4\pi\cdot10^{-7}\cdot10^{-2} / 2\cdot0.1 = 2\pi\cdot10^{-8}$ T