FK4010 - Elektromagnetism, Fysikum, Stockholms universitet
Tentamensskrivning (2:a omtentan), fredag 30 augusti 2013, kl 9:00 - 14:00

Läs noggrant genom hela tentan först. Börja med uppgifterna som du tror du klarar bäst!
Förklara tydligt ditt resonemang och ge rätt enhet när det behövs.
Hela tentan omfattar 7 frågor. Fråga ett ger 4 poäng, de övriga 6 poäng.
Det krävs 50% för att få godkänd.
Tillåtna hjälpmedel: Physics handbook, formellista och en miniräknare (ej grafisk).

Lycka till! Eddy Ardonne

1. Korta frågor.

   a. (1p) Ge Ampères lag (med Maxwell termen) i integral form (var noggrant med notationen!) och förklara kort betydelsen av denna lag.

   b. (1p) Beskriv kortfattat principen bakom Faradays bur.

   c. (1p) Förklara kortfattat hur en transformator fungerar.

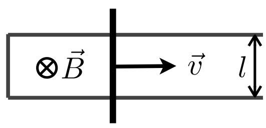
   d. (1p) Ge Poyntings teorem, och förklara kort dess betydelse.

2. En punktladdning Q befinner sig precis i mitten av ett sfäriskt skal. Skalet består av ett dielektriskt material med relativt dielektriskt konstant $\epsilon > 1$. Skalets inre radie är R_a, yttre radie är R_b.

   a. (4p) Bestäm först fältet $\vec{D}$ överallt (i.e., $r < R_a$, $R_a < r < R_b$ och $r > R_b$), och med hjälp av $\vec{D}$ det elektriska fältet $\vec{E}$.

   b. (2p) Bestäm den bundna laddningen på skalets inre yta $r = R_a$, samt skalets yttre yta $r = R_b$.

3. En ledande stav rörs till höger med en konstant hastighet $|\vec{v}|$, över en u-format ledande räls, med försumbar resistans; avståndet mellan 'benen' är l. Staven har resistans R mellan kontaktpunkterna.

   Hela systemet finns i ett konstant magnetiskt fält $\vec{B}$, som pekar in i pappret, se figuren.

   a. (2p) Beräkna strömmen i systemet, både styrkan och riktningen.

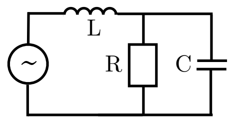
   b. (2p) Det krävs en kraft för att behålla stavens hastighet konstant. Bestäm den här kraften.

   c. (1p) Vad är effekten som tillförs till systemet på grund av den här kraften?

   d. (1p) Vid tid $t = 0$ upphör kraften som vi betraktade under b. och c. plötsligt. Beskriv kvalitativt vad som händer med staven, och skissa stavens hastighet som funktion av tiden.

4. (6p) En lång, ihålig cylinder av koppar har inre radie R_a, och yttre radie R_b. Genom cylindern går en ström (parallellt med cylinderns axel), som beskrivs av strömtätheten $J(r) = kr$, med r avståndet till cylinderns axel. Bestäm, med hjälp av Maxwells ekvationer, det magnetiska fältet överallt (i.e., $r < R_a$, $R_a < r < R_b$ och $r > R_b$).

5. Vi betraktar en krets, som består av en ideal växelspänningskälla, en ideal spole, som är kopplade i serie med en motstånd och kondensator; de två sistnämda är parallellt kopplade till varandra, se figuren.



Källan ger en spänning $V_k(t) = V_0 \cos(\omega t)$, spolen har självinduktans L, motståndet resistans R, och kondensator kapacitans C.

a. (2 p) Vi betraktar kretsen som en spännigsdelare, där Z_1 motsvara spolen, och Z_2 impedansen av resten av kretsen. Ge den komplexa spänningen över motståndet i termer av Z_1 och Z_2.

b. (4 p) Nu antar vi att $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Bestäm (den reella) spänningen över motståndet. Ge både amplituden och fasen. Ligger spänningen över motståndet före eller efter spänningen från källan?

6. En krets består av en kondensator med kapacitans C, en strömbrytare och en ideal spole med självinduktans L i serie. I början är strömbrytaren öppen, och kondensator laddat, till en spänning V_0.

a. (3p) På tid $t = 0$ stängs strömbrytaren. Härled differentialekvationen för strömmen i kretsen, och ge randvillkoren. Var noggrant med tecknen!

b. (3p) Lös differentialekvationen för att bestämma strömmen i kretsen som funktion av tiden.

7. I ett område där det inte finns någon strömtäthet, ges de tidsberoende elektriska och magnetiska fälten av $\vec{E} = (0, e_y \sin(kx - \omega t), e_z \sin(kx - \omega t))$ och $\vec{B} = (b_x \sin(kx - \omega t), 0, b_z \sin(kx - \omega t))$, i kartesiska koordinater.

a. (0.5 p) Bestäm laddningstätheten ρ.

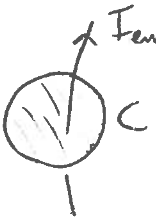
b. (2.5 p) Bestäm storleken av e_z och b_x.

c. (2.5 p) Bestäm sambandet mellan b_z och e_y, samt sambandet mellan $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, k och ω.

d. (0.5 p) Vad beskriver den här lösningen till Maxwell's ekvationer?

1 a) Amperes lag: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc,C} + \mu_0\varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

innebär att både strömmar och ändringar i flödet av det elektriska fältet ge upphov till ett magnetiskt fält, med slutna fältlinjer. Integralen ~~av~~ av $\vec{B}$ längs en godtycklig sluten kurva ges av strömmen genom kurvan och ändringen av det elektriska fältet genom kurvan.



b) En Faradaybur består av ett metalliskt 'skal', som skärmar området inuti från elektriska fält. Ett externt $\vec{E}$-fält gör att laddningarna i buren rör sig, så att de skapar ett $\vec{E}$-fält, som precis tar ut det ~~elekt~~ externa fältet i buren.

c) En transformator består av två spolar, som är länkade så att $\vec{B}$-flödet från den ena (primära) spolen går genom den andra (sekundära) spolen.
En växelspänning i den primära spolen inducerar en spänning i den sekundära spolen, som är proportionell med antalet lindningar i den sekundära spolen. ~~A~~ Man kan transformera spänningen enligt: $\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}$

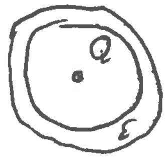
d) Poyntings teorem: $\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V u_{pot}\, d\tau - \oint_A \vec{S}\cdot d\vec{a}$

$u_{pot} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$ = pot. energi per volym

Poyntings teorem säger att energi bevaras: Arbete per tid ~~utfö~~ uträttat av $\vec{E}$- och $\vec{B}$-fält är lika med minskningen av den potentiella energin, minus energin som har förts bort med $\vec{E}$- och $\vec{B}$ fält, i form av strålning (vågor)

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})$ = Poynting vektorn

= energi som flödar genom en yta, per ytenhet, per tidsenhet

2 Situationen: 

Vi har sfärisk symmetri, så vi har att $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\hat{r}$, i sfäriska koordinater, samma för $\vec{D}$. (beror bara på $r = |\vec{r}|$, $//\hat{r}$)

a) $\vec{D}$ fältet beror bara på Q, inte de bundna laddningar, så vi har $\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q$, om S är en yta runt Q.

Vi tar en sfär med radie r: $\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D_r = Q$,

Så vi får $\vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$, oberoende av $\vec{r}$, så i alla tre områden.

$\vec{E}$-fältet bestäms av $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon_0\varepsilon$, med $\varepsilon = 1$ utanför skalet, $\varepsilon > 1$ i skalet.

Så vi får:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{om } r < R_a \text{ eller } r > R_b \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\hat{r} & \text{om } R_a \leq r \leq R_b \end{cases}$$

b) Den bundna laddningstätheten på en yta ges av $\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n}$, med $\hat{n}$ normalvektorn, och $\vec{P} = \varepsilon_0\chi_E\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\vec{E}$.

Vid R_a, inre ytan: $\hat{n} = -\hat{r}$, så

$$\sigma_b = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{1}{R_a^2}(\hat{r}\cdot\underbrace{(-\hat{r})}_{=\hat{n}}) = -\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}\frac{Q}{4\pi R_a^2}$$

Den totala bunden laddning blir: $Q_{b,R_a} = 4\pi R_a^2\sigma_b = -\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}Q$.

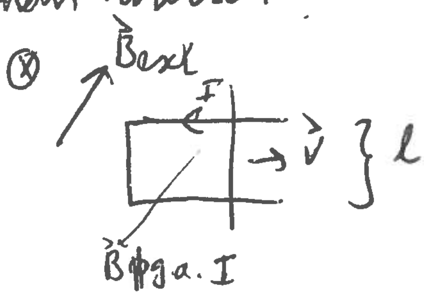
Vid R_b, yttre ytan: $\hat{n} = \hat{r}$, så vi får

$$\sigma_b = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{1}{R_b^2}(\hat{r}\cdot\hat{r}) = \frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}\frac{Q}{4\pi R_b^2}$$, eller den totala

bunden laddning: $Q_{b,R_b} = 4\pi R_b^2\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}\frac{Q}{4\pi R_b^2} = \frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}Q$.

3a) Rälsen och staven formar en krets, och p.g.a. att staven rörs, får vi en spänning och en ström.

Lenz lag: Strömmen är åt det hållet som gör att den motverkar ändringen i flödet genom kretsen.



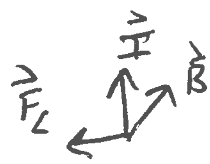
Flödet blir större, så $\vec{B}$ p.g.a. strömmen är ut ur pappret. Så strömmen måste vara mot urs.

Faraday: $$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\underbrace{\frac{d\overset{\text{area}}{A}}{dt}}_{vl} = -Bvl$$

Strömstyrkan blir $$I = \frac{|\mathcal{E}_{ind}|}{R} = \frac{Blv}{R}$$

b) Det finns en Lorentzkraft på staven, eftersom den för en ström, och vi har ett $\vec{B}$-fält.

~~Styr~~ Styrkan av Lorentzkraften: $|\vec{F}_L| = l\,|(\vec{I}\times\vec{B})|$
$= lIB$

Riktningen av $\vec{F}_L$: 

$\vec{F}_L$ pekar åt vänster!

Kraften som vi måste ge på staven är åt höger och har storlek: $F = IBl = (Bl)^2 v/R$

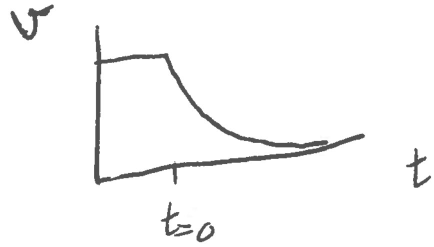
c) Effekten p.g.a. kraften: $$P = \frac{d\overset{\text{arbete}}{W}}{dt} = \frac{d}{dt}Fx$$
$$= F\frac{dx}{dt} = Fv = IBlv = (Blv)^2/R$$

Eller, effektutveckling p.g.a. strömmen är lika stor:

$$P = IV = I^2R = \left(\frac{Blv}{R}\right)^2 R = (Blv)^2/R$$

d) Om den externa kraften på staven upphör finns det bara Lorentzkraften, som motverkar stavens rörelse, och F_L är proportionellt med hastigheten.

Så, hastigheten går mot noll exponentiellt:



$$|F_L| = IBl = \frac{(Bl)^2}{R} v$$

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{(Bl)^2}{R} v$$

$$\Rightarrow v(t) \propto e^{-\frac{(Bl)^2}{Rm} t}$$

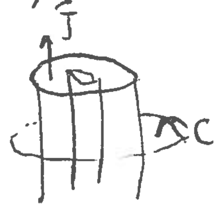
4) Vi har cylindersymmetri, så $\vec{B}$ beror bara på avståndet till axeln, och är parallellt med $\hat{\varphi}$: $\vec{B}(\vec{r}) = B_\varphi(r)\,\hat{\varphi}$, i cylinderkoordinater.

$\hat{z}$ $\uparrow$ $J\hat{\varphi}$

Vi använder Ampères lag: $\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{inne,C}$.

med C en cirkel med radie r $\perp$ mot $\hat{z}$, får vi:

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = 2\pi r B_\varphi = \mu_0 I_{inne}$$



Den inneslutna strömmen beror på r:

Om $r < R_a$: $I_{inne} = 0 \Rightarrow B_\varphi = 0$.

om $R_a < r < R_b$: $I_{inne} = 2\pi \int_{R_a}^{r} J(r)\,r\,dr = 2\pi \int_{R_a}^{r} (k\,r)\,r\,dr$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{3} r^3 k\right]_{R_a}^{r} = \frac{2\pi k}{3}\left[r^3 - R_a^3\right]$$

Så, vi får $B_\varphi = \frac{\mu_0 k}{3r}\left[r^3 - R_a^3\right]$

Om $r > R_b$ har vi $I_{inne} = 2\pi \int_{R_a}^{R_b} J(r)\,r\,dr = \frac{2\pi k}{3}\left[R_b^3 - R_a^3\right]$,

så $B_\varphi = \frac{\mu_0 k}{3r}\left[R_b^3 - R_a^3\right]$

Svaret:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{om } r < R_a \\ \frac{\mu_0 k}{3r}\left[r^3 - R_a^3\right]\hat{\varphi} & R_a < r < R_b \\ \frac{\mu_0 k}{3r}\left[R_b^3 - R_a^3\right]\hat{\varphi} & r > R_b \end{cases}$$

5] a) Vi ser kretsen som en spänningsdelare; den totala komplexa spänningen, strömmen och impedansen är: V_k, I, och $Z_{tot} = Z_1 + Z_2$, och vi har:

$$V_k = I Z_{tot} = I(Z_1 + Z_2) \Rightarrow I = \frac{V_k}{(Z_1+Z_2)}$$

Spänningen över motståndet är spänningen över Z_2:

$$V_R = V_C = I Z_2 = \frac{V_k Z_2}{(Z_1+Z_2)} = \frac{V_k}{(1+Z_1/Z_2)}$$

b) Vi måste ~~veta~~ veta: Z_1/Z_2.

$$Z_1 = i\omega L \,;\quad \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\underbrace{(1/i\omega C)}_{Z_C}} = \frac{1}{R} + i\omega C$$

Så vi får: $1 + Z_1/Z_2 = 1 + i\omega L\left(\frac{1}{R} + i\omega C\right) = 1 + \frac{i\omega L}{R} - \omega^2 LC$

Nu använder vi att $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, så $\omega^2 LC = 1$, så vi har

$$1 + Z_1/Z_2 = \frac{i\omega L}{R}.$$

Nu har vi att $V_R = \frac{R}{i\omega L} V_k$, eller med $V_k = V_0 e^{i\omega t}$

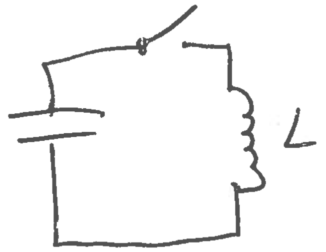
har vi $\cancel{V_k} = V_R = \frac{RV_0}{\omega L} e^{i(\omega t - \pi/2)}$, så $V_R(t) = \frac{RV_0}{\omega L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

Så amplituden av spänningen över R är: $|V_R| = \frac{RV_0}{\omega L}$, och fasen är $\omega t - \pi/2$, så V_R ligger efter spänningen från källan.

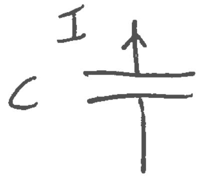
8) Kretsen ser ut så här:

C är laddad till V_0.

På $t=0$ stängs brytaren.



a) När brytaren stängs, får vi en ström. Vi väljer strömmen så:



, så $-\frac{dQ}{dt} = I$, med Q laddning på C.

Kirchhoffslag (spännings vandring) ger oss:

$V_C + \mathcal{E}_{ind} = 0$ (ingen motstånd), eller, med $\mathcal{E}_{in} = -L\frac{dI}{dt}$, $V_C = Q/C$

$Q/C - L\frac{dI}{dt} = 0$;

Vi tar tids derivatan: $-I/C - L\frac{d^2I}{dt^2} = 0$, så $\boxed{\frac{d^2I}{dt^2} = -\frac{I}{LC}}$

Randvillkoren: på $t=0$ är strömmen noll, annars skulle vi ha att $|\mathcal{E}_{ind}| \to \infty$. $\boxed{I(0) = 0}$

På $t=0$ har vi dessutom: $V_C(0) = V_0 = -\mathcal{E}_{ind}(0) = L\frac{dI}{dt}(0)$, så $\boxed{\frac{dI}{dt}(0) = \frac{V_0}{L}}$

b) Med $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ har vi $\frac{d^2I(t)}{dt} = -\omega^2 I(t)$,

som har allmän lösning $I(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.

$I(0) = A = 0 \Rightarrow I(t) = B\sin(\omega t)$

$\frac{dI}{dt}(t) = B\omega\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{dI}{dt}(0) = B\omega = \frac{V_0}{L} \Rightarrow B = \frac{V_0}{\omega L} = V_0\sqrt{\frac{C}{L}}$

Så strömmen blir $I(t) = V_0\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$, så strömmen oscillerar!

7) Vi använder Maxwells ekvationer i lokal form:

a) Gauss lag: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0+0+0 = 0,$$ så inga laddningar

b) Vi använder $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = b_x k \cos(kx-\omega t) + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{b_x = 0}$$

Faradays lag: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (0, 0, -(b_z(-\omega)\cos(kx-\omega t))$
$= (0, 0, \omega b_z \cos(kx-\omega t))$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$
$$= (0, -k e_z \cos(kx-\omega t), k e_y \cos(kx-\omega t))$$

Så, $e_z = 0$ också.

c) Från b) får vi: $\omega b_z = k e_y$, eller $b_z/e_y = k/\omega$

Med Ampères lag: $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \underset{0}{\underset{\parallel}{\vec{J}}} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = (0, -b_z k \cos(kx-\omega t), 0) = \mu_0\varepsilon_0 (0, -\omega e_y \cos(kx-\omega t), 0)$$

Eller: $b_z k = \omega e_y (\mu_0\varepsilon_0)$, som ger: $\frac{b_z}{e_y} = \frac{\omega}{k}\mu_0\varepsilon_0 = \frac{\omega}{k}\frac{1}{c^2}$

Men, vi har $\frac{b_z}{e_y} = \frac{k}{\omega}$, så vi får: $c = \omega/k$ (c, k, ω är positiva).

d) Den här lösningen beskriver plan <u>vågor</u>