FK4010 - Elektromagnetism, Fysikum, Stockholms universitet
Tentamensskrivning (1:a omtentan), tisdag 16 juni 2015, kl 9:00 - 14:00

Läs noggrant genom hela tentan först. Börja med uppgifterna som du tror du klarar bäst!
Förklara tydligt ditt resonemang och ge rätt enhet när det behövs.
Hela tentan omfattar 7 frågor. Fråga ett ger 4 poäng, de övriga 6 poäng.
Det krävs 50% för att få godkänd.
Tillåtna hjälpmedel: Physics handbook, formellista och en miniräknare (ej grafisk).

Lycka till! Eddy Ardonne

1. Korta frågor.

   a. (1p) Formulera Ampère's lag med Maxwell termen i differentiell form (var noggrann med notationen!) och förklara kort dess betydelse.

   b. (1p) Förklara begreppet polarisation i ett dielektriskt material.

   c. (1p) Förklara kortfattat varför det elektriska fältet precis vid ytan av en laddad ledare är vinkelrätt mot ledarens yta (anta att det inte finns någon ström i ledaren).

   d. (1p) Formulera Lenz lag, och förklara den kortfattat.

2. (6p) En lång, ihålig cylinder av koppar har inre radie a, och yttre radie b. Det finns en ström i cylindern (parallell med cylinderns axel), som ges av strömtätheten $J(r) = k/r$, där r är avståndet till cylinderns axel och k en konstant. Bestäm det magnetiska fältet överallt (d.v.s. för $r < a$, $a \leq r \leq b$ och $r > b$), och argumentera noggrann.

3. En krets består av ett motstånd med resistans R, en spole med självinduktans L och en kondensator med kapacitans C som är kopplade i serie till en växelspänningskälla som ger en spänning $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$.

   a. (4p) Bestäm strömmen genom den här kretsen.

   b. (2p) Förklara begreppet resonans, och bestäm resonansfrekvensen för R = 10 Ω, L = 0.5 H och C = 20 nF.

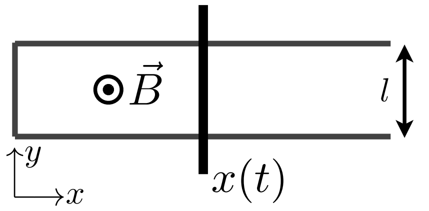
4. En punktladdning q befinner sig precis i mitten av en sfär med radie a. Sfären består av ett dielektriskt material med dielektrisk konstant $\epsilon_r > 1$.

   a. (2p) Bestäm först fältet $\vec{D}$ överallt (d.v.s. för $0 < r \leq a$ och $r > a$).

   b. (2p) Bestäm seden det elektriska fältet $\vec{E}$ överallt.

   c. (2p) Bestäm den bundna laddningen på sfärens yta. Var befinner sig den kompenserande laddningen?

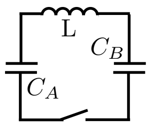
5. En ledande stav med försumbar massa rörs över en u-formad skena med försumbar resistans. Stavens position ges av $x(t) = x_0 + a\sin(\omega t)$, se figuren. Staven har resistans R mellan kontaktpunkterna. Hela systemet finns i ett konstant magnetiskt fält $\vec{B}$, som pekar ut ur pappret.



   a. (3p) Beräkna strömmen i systemet som funktion av tid (välj riktningen moturs som positiv).

   b. (3p) Det krävs en kraft för att röra staven på det här sättet. Bestäm den här kraften.

6. En krets består av två kondensatorer (kapacitans C_A och C_B), en ideal spole (med självinduktans L) och en strömbrytare. Från början är kretsen öppen och kondensator A laddad till en spänning V_0, medan kondensator B är oladdad. Sedan stänger man kretsen vid tid $t = 0$.



   a. (3p) Härled differentialekvationen som beskriver strömmen genom kretsen och bestäm randvilkoren. Välj strömmen bort från kondensator A's positiva platta som positiv och var noggrann med tecknen!

   b. (3p) Lös differentialekvationen för att bestämma strömmen som funktion av tiden.

7. Poynting-vektorn.
   Vi betraktar en tråd med radie a och längd l. Det finns en spänning V över tråden, som ger upphov till en ström I.

   a. (2p) Bestäm det elektriska och magnetiska fältet vid trådens yta.

   b. (2p) Bestäm Poynting-vektorn, och förklara kort dess betydelse.

   c. (2p) Bestäm med Poynting-vektorn hur mycket energi (per tidsenhet) som förs till tråden. Vad motsvarar den här energin?

FK 4010, tenta 2, 2015-06-16.

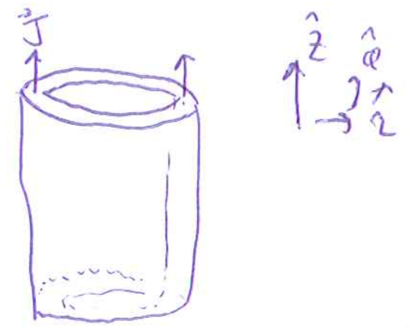
1(a) Ampères lag: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$,
säger att en ström (täthet) ger upphov till ett magnetiskt fält. En ändring i ett elektriskt fält gör samma sak (Maxwelltermen). I båda fall har $\vec{B}$-fältet slutna fältlinjer.

b) Polarisation uppstår när ett (dielektriskt) material befinner sig i ett $\vec{E}$-fält. Elektronmolnen hos atomerna förskjuts (mycket) lite, och man får en laddning på ytorna, och inuti materialet om $\vec{E}$ inte är homogent.

c) En ledare har rörliga elektroner. Om det skulle finnas ett $\vec{E}$-fält parallellt med ytan, då skulle elektronerna röra på sig, och minska den här parallella komponenten. I jämvikt har vi att $\vec{E}_{//}$ är noll.

d) Om det magnetiska flödet genom en krets ändras, då induceras en spänning. Lenz lag säger att strömmen som uppstår <u>mot</u>verkar ändringen i flödet.

2)



Systemet har cylinder symmetri, så $\vec{B}$ beror bara på r, inte på φ och z. Desutom pekar $\vec{B}$ i $\hat{\varphi}$ riktningen.

Använd Amperes lag: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C$, med

C en cirkel med radie r, och I_C strömmen genom C.

P.g.a. symmetri har vi: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} d\varphi \; r B_\varphi = 2\pi r B_\varphi(r)$

Strömmen genom C beror på r:

Om $r < a$ har vi: $I_C = 0$.

Om $a \le r \le b$ har vi: $I_C = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^r dr' \; \underset{\uparrow}{r'}\, J(r')$

Jacobianen

$$= 2\pi \int_a^r dr' \; \frac{\cancel{r'} k}{\cancel{r'}} = 2\pi k\,[r-a]$$

Om $r > b$: $I_C = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b dr'\, r' J(r') = 2\pi\, k\,[b-a]$

Med Amperes lag har vi:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{om } r < a \\ \mu_0 k \left(1 - \frac{a}{r}\right) \hat{\varphi} & a \le r \le b \\ \mu_0 k \frac{(b-a)}{r} \hat{\varphi} & r > b \end{cases}$$

3a) Den komplexa impedansen av kretsen:

$$Z_t = R + i\omega L - 1/\omega C \text{, eller}$$

$$= |Z_t| e^{i\varphi} \quad \text{med } |Z_t| = \left(R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ och}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega - 1/\omega C}{R}\right)$$

Komplexa spänningen: $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$, så vi har:

$$J(t) = \frac{V(t)}{Z_t} = \frac{V_0}{|Z_t|} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Den reella strömmen blir $I(t) = \mathrm{Re}[J(t)] = \underbrace{\frac{V_0}{[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{\frac{1}{2}}}}_{\text{Amplituden}} \cos(\overbrace{\omega t - \varphi}^{\text{fasen}})$

Extra:

$I(t)$ kan skrivas som: (använd $\cos\varphi = \frac{R}{|Z_t|}$, $\sin\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{|Z_t|}$)

$$I(t) = \frac{V_0}{[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]} \left(R\cos(\omega t) + (\omega L - 1/\omega C)\sin(\omega t)\right)$$

b) Resonans uppstår när den komplexa delen av impedansen försvinner; då är $|Z_t|$ minimal, och amplituden av strömmen är maximal.

För resonansfrekvensen ω_c har vi: $\omega_c L - 1/\omega_c C = 0$,

eller $\omega_c^2 = \frac{1}{LC}$, så $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Med $L = 0.5$ H och $C = 20$ nF har vi:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{0.5 \cdot 20 \cdot 10^{-9}}} = \sqrt{10^8} = 10^4 \text{ rad/s}$$

(eller Hz)

4 a) För att bestämma $\vec{D}$ använder vi Gauss lag:

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{fria}, \quad \text{med } Q_{fria} \text{ punktladdningen.}$$

$\vec{D}$ är radiell, och beror bara på r. För S tar vi en sfär med radie r. $\vec{D} \parallel \hat{r}$, $d\vec{S} \parallel \hat{r}$, så

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D_r$$

Q_{fria} beror inte på r, vi har alltid $Q_{fria} = q$. Så:

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

b) Relationen mellan $\vec{D}$ och $\vec{E}$ är $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$.

Om $r < a$ har vi $\varepsilon_r > 1$ så:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Om $r > a$ har vi $\varepsilon_r = 1$, så.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

c) Ytladdningstätheten på ytan (i.e., $r = a$) ges av:

$\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n}$, och $\vec{P}$ ges av $\vec{P} = (\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}) = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$

$\hat{n}$ är $\hat{r}$ i det här fallet, så

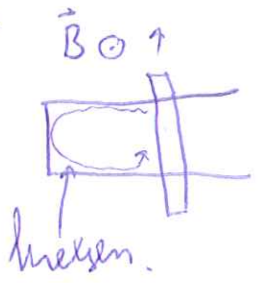
$$\sigma_b = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_r} \frac{q}{a^2}.$$

Den totala laddningen på ytan: $Q_b = \sigma_b \cdot 4\pi a^2 = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} q$

Den kompenserande laddning, $-\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} q$ finns ~~per~~ precis runt punktladdningen!

5a) Arean av kretsen ändras eftersom staven rörs, så $\vec{B}$-flödet genom kretsen varierar. Det ger en inducerad spänning (Faraday), som ger en ström.

$x(t) = x_0 + a\sin(\omega t)$



Spänningen: $\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = I(t)R$

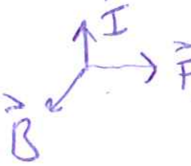
Riktning av strömmen fås med Lenz lag: på $t=0$ rörs staven åt höger, så arean blir större. Strömmen motverkar ändringen, så strömmen skapar ett $\vec{B}$-fält in i pappret, och är medurs. ~~Så med~~ Så på $t=0$ är strömmen negativ, moturs var pos. riktning.

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} B l\, x(t) = Bl \frac{d}{dt}(x_0 + a\sin(\omega t)) = Bla\omega\cos(\omega t)$$

$I(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Bla\omega}{R}\cos(\omega t)$. På $t=0$ är detta negativ, så tecknet stämmer! $\underline{I(t) = -\frac{Bla\omega}{R}\cos(\omega t)}$

b) Vi har en ström i ett $\vec{B}$-fält, så det finns en Lorentzkraft på staven: $\vec{F}_L = l\,\vec{I}(t)\times\vec{B}$ (I: pos in moturs riktning)

Riktning av $\vec{F}_L$:



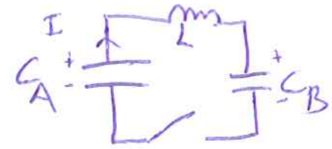
(~~om I pos.~~) (i fall I är positiv).

$\vec{B}\perp\vec{I}$, så vi har:

$\vec{F}_L = -\frac{Bla\omega}{R}\cos(\omega t)\, lB\,\hat{x} = -\frac{l^2B^2a\omega}{R}\cos(\omega t)\,\hat{x}$, så på $t=0$ är $\vec{F}_L$ åt vänster!

Kraften som man behöver för att röra staven är $-\vec{F}_L$, eftersom staven har en försumbar massa

$\Rightarrow \vec{F} = +\frac{l^2B^2a\omega}{R}\cos(\omega t)$.

6 a) Kretsen: 

På $t=0$ är C_A laddad till V_0, och strömmen bort från A är positiv, så $I = -\frac{dQ_A}{dt}$, och $I = +\frac{dQ_B}{dt}$.

Spännings vandring genom kretsen ger:

$$V_A + V_L = V_B \text{, eller } \frac{Q_A(t)}{C_A} - \frac{L\,dI(t)}{dt} = \frac{Q_B(t)}{C_B} \quad (*)$$

Nu differentiera vi med tiden:

$$\frac{1}{C_A}\frac{dQ_A}{dt} - L\frac{d^2I}{dt^2} = \frac{1}{C_B}\frac{dQ_B}{dt} \Rightarrow -\frac{1}{C_A}I(t) - L\frac{d^2I(t)}{dt^2} = \frac{1}{C_B}I(t),$$

eller: $$\frac{d^2I(t)}{dt^2} = -\frac{1}{L}\underbrace{\left(\frac{1}{C_A}+\frac{1}{C_B}\right)}_{:=\frac{1}{C_t}=\frac{C_A+C_B}{C_AC_B}} I(t) = -\frac{1}{LC_t}I(t) \quad (**)$$

Differential ekvationen: $$\frac{d^2I(t)}{dt^2} = -\frac{1}{LC_t}I(t).$$

Randvillkoren: på $t=0$ är $I(0)=0$, annars skulle $V_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$ blir (-) oändlig på $t=0$.

På $t=0$: $\frac{Q_A(0)}{C_A} = V_0$, och $\frac{Q_B(0)}{C_B} = 0$, så med $(*)$: $\frac{dI}{dt}(0) = \frac{Q_A(0)}{LC_A} = \frac{V_0}{L}$

b) Den allmänna lösningen till dif ekv:

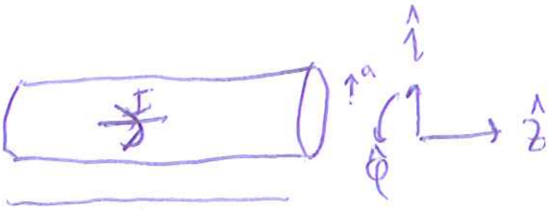
$$I(t) = A\cos\left(t/\sqrt{LC_t}\right) + B\sin\left(t/\sqrt{LC_t}\right).$$

$$I(0) = A = 0 \Rightarrow A = 0.$$

$$\frac{dI(0)}{dt} = \frac{B}{\sqrt{LC_t}}\cos(0) = \frac{B}{\sqrt{LC_t}} = \frac{V_0}{L} \Rightarrow B = V_0\sqrt{\frac{C_t}{L}}$$

Strömmen är: $$I(t) = V_0\sqrt{\frac{C_t}{L}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC_t}}\right) \Leftarrow$$

7 a) Situationen:



$\vec{E}$-fältet är längs tråden, l

$$\vec{E} = \frac{V}{l}\hat{z}$$

$\vec{B}$-fältet är i $\hat{\varphi}$ riktning: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\hat{\varphi}$

Vid trådens yta: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{\varphi}$.

b) Poyntingvektorn: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$, som ger

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\frac{V}{l}\frac{\mu_0 I}{2\pi a}(\underbrace{\hat{z}\times\hat{\varphi}}_{=-\hat{r}}) = \frac{VI}{2\pi a l}(-\hat{r}), \quad |\vec{S}| = \frac{VI}{2\pi a l}$$

$\vec{S}$ är energi 'flödet' per tidsenhet per area, genom en viss yta. I det här fallet är 'flödet' till tråden!

c) För att ~~bes~~ bestämma hur mycket energi per ~~tid~~ tidsenhet som förs till tråden, integrera ~~vi~~ vi över ytan. $|\vec{S}|$ är konstant över ytan, så vi får:

$$P = \iint_A \vec{S}\cdot d\vec{A} = \frac{IV}{2\pi l a}\int_0^l dz\int_0^{2\pi} a\,d\varphi = \frac{VI}{2\pi a l}(l\,2\pi a) = VI.$$

Detta är precis effekten i tråden, så energi per tid som går förlorad som Joule värme!