FK4010 - Elektromagnetism, Fysikum, Stockholms universitet
Tentamensskrivning (1:a omtentan), tisdag 17 juni 2014, kl 9:00 - 14:00

Läs noggrant genom hela tentan först. Börja med uppgifterna som du tror du klarar bäst!
Förklara tydligt ditt resonemang och ge rätt enhet när det behövs.
Hela tentan omfattar 7 frågor. Fråga ett ger 4 poäng, de övriga 6 poäng.
Det krävs 50% för att få godkänd.
Tillåtna hjälpmedel: Physics handbook, formellista och en miniräknare (ej grafisk).

Lycka till! Eddy Ardonne

1. Korta frågor.

   a. (1p) En av Maxwells ekvationer betyder att det inte finns magnetiska monopolar. Ge den här ekvationen, både i lokal och integral form (var noggrant med notationen!).

   b. (1p) Förklara begreppet polarization.

   c. (1p) Ge Poyntings teorem, och förklara kort dess betydelse.

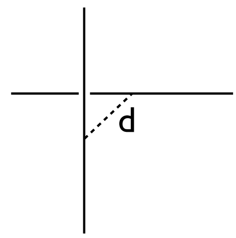
   d. (1p) Förklara kortfattat hur en (växelspännings) generator fungerar.

2. (6p) Vi betraktar en lång, rak cylindrisk tråd med radie a. I tråden finns en ström som ges av strömtätheten $J = kr^2$, med r avståndet till trådens mitten och k en konstant. Anta att den relativa permeabiliteten $\mu = 1$, tråden är inte magnetisk. Bestäm det magnetiska fältet både inuti och utanför tråden.

3. Laddade trådar.

   a. (2p) Vi har en lång, tunn rak tråd, med (linje) laddningstäthet λ_1. Använd Gauss lag för att förklara att det elektriska fältet av tråden ges av $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$ i cylinderkoordinater.

   b. (4 p) Nu har vi har två långa, raka trådar, med (linje) laddningstätheter λ_1 och λ_2, som har samma tecken. Det minsta avståndet mellan trådarna är d, och de är vinkelrätt mot varandra. Bestäm först riktningen av kraften mellan trådarna, och sedan storleken. Är du förvånat över svaret, och varför?

   Du får använda följande integraler:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)} = \pi \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \pi/2 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 3\pi/8 \ .$$

4. En kondensator består av två sfäriska skal med samma medelpunkt. Det inre skalet har radie a, det yttre radie b.

   a. (4 p) Beräkna kapacitansen av den här kondensatorn.

   b. (1 p) Hur mycket energi är lagrat på kondensatorn, om den är laddat till en spänning V?

   c. (1 p) Bestäm kapacitansen av en enda laddad sfär.

5. Magnetiska dipolar
   Det magnetiska fältet av en ideal magnetisk dipol, med dipol moment $\vec{m}$, som befinner sig i origo, ges, i sfäriska koordinater, av $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\big(3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}\big)$.
   OBS: för att lösa den här uppgiften behöver man inte göra krånliga beräkningar.

   a. (2 p) En ideal dipol med dipolmoment $\vec{m}_2$ befinner sig i det magnetiska fältet av en annan ideal dipol med dipolmoment $\vec{m}_1$. Visa att systemets magnetiska energie ges av
   $$U = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\big(\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1\cdot\hat{r})(\vec{m}_2\cdot\hat{r})\big)\ .$$

   b. (2 p) Vi har två mycket små trådslingor med ytor som beskrivs av vektorerna $\vec{a}_1$ och $\vec{a}_2$. Slingorna är långt ifrån varandra, så att fältet från slingan 1 är uniform hos slingan 2. Vad är den ömsesidiga induktansen av slingorna? Stämmer det att $M_{12} = M_{21}$?

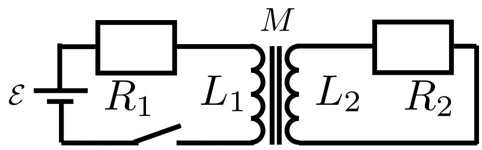
   c. (2 p) Det finns en ström I_1 i slingan 1. Nu sätter vi på en ström I_2 i slingan 2. Hur mycket arbete krävs det för att behålla strömmen i slingan 1 på I_1? Jämför svaret med uppgift a.

6. Vi har en krets med en kondensator (med kapacitans C), en spole med självinduktans L och en resistor (med resistans R) kopplade i serie med en källa $V(t) = V_0\cos(\omega t)$.

   a. (4 p) Bestäm strömmen genom kretsen, både amplituden och fasen.

   b. (2 p) Förklara begreppet resonans, och beräkna resonansfrekvensen om $R = 1.0k\Omega$, $C = 0.20\mu F$ och $L = 50mH$.

7. Två spolar har en ömsesidig induktans M. Spolarna har självinduktans L_1 och L_2, och resistans R_1 och R_2. I krets ett finns ett batteri (se figuren). På tid $t = 0$ stängs strömbrytaren i krets ett.



   a. (3p) Härled differentialekvationerna som beskriver strömmen I_1 och I_2 i kretsen, och ge randvillkoren.

   b. (3p) Nu antar vi att $R_2 = 0$. Lös ekvationerna, för att få ett uttryck för strömmarna I_1 och I_2.

FK 4010; tenta 2, 2014-06-17.

1a) 'Gauss' lag för det magnetiska fallet:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$ $\vec{B}$-flödet genom en sluten yta är noll.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$ $\vec{B}$-fältet har inga källor.

b) Polarisation uppstår när ett material är utsatt för ett $\vec{E}$-fält. I isolatorer förskjuts elektronmolnen hos atomerna (mycket lite), och ~~en~~ på ytan samlas (induceras) laddning (om $\vec{E}$ inte är konstant, finns det laddning inuti materialet också).

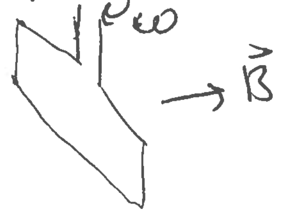
c) Poyntings teorem säger att energi bevaras. Minskningen av potentiell energi (i fälten) i ett område ges av uträttat arbete och hur mycket energi har förts bort (vågor osv.):

$$\frac{d(U_{pot})}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_V \left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \tfrac{1}{2\mu_0} B^2\right) d\tau\right) = -\frac{dW}{dt} - \oint\!\!\oint_S \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) d\vec{S}$$

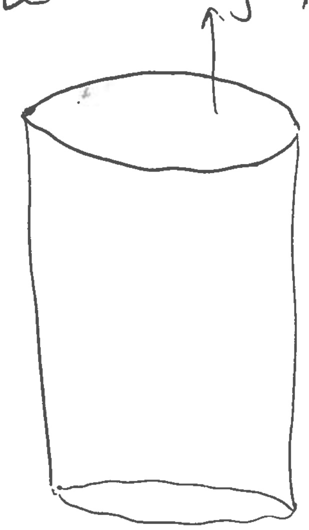
uträttat arbete

energi som förts bort per tid.

d) En generator ~~motor~~ använder induktion:
En slinga vrids rund i ett $\vec{B}$-fält, som ger upphov till en periodisk spänning, eftersom ~~B~~ flödet beror på tiden;



2) En cylinder med radie a: $\vec{J} = k r^2 \hat{z}$



z, r, $\hat{\varphi}$: cylinderkoordinater

P.g.a. cylinder symmetri har vi att $\vec{B}$-fältet är i $\hat{\varphi}$ riktningen, och beror bara på r. $\vec{B}(\vec{r}) = B_\varphi(r)\,\hat{\varphi}$.

Ampères lag kan användas: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c$

Som Ampère kurva tar vi en cirkel med radie r.

Integralen blir: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} d\varphi\, r B_\varphi(r) = 2\pi r B_\varphi(r)$

I_c är strömmen genom cirkeln.

Om $r<a$, måste vi integrera strömtätheten:

$$I_c = \int_0^r dr' \int_0^{2\pi} d\varphi\, \underbrace{r'}_{\text{Jakobianen}} (k r'^2) = 2\pi k \int_0^r dr'\, (r')^3$$

$$= 2\pi k \left[\frac{1}{4}(r')^4\right]_{r'=0}^{r'=r} = \frac{\pi k}{2} r^4$$

Om $r \geq a$, då blir strömmen $\frac{\pi k}{2} a^4 = I_c$.

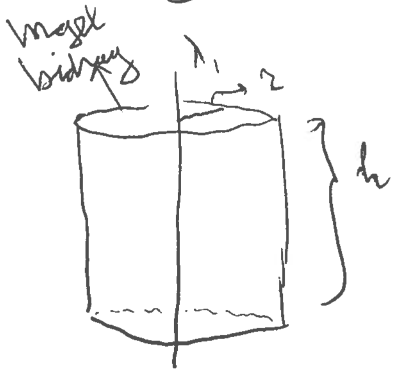
Så, $$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 k r^3}{4}\,\hat{\varphi} & r \leq a \\[2ex] \dfrac{\mu_0 k a^4}{4\cancel{\pi} r}\,\hat{\varphi} & r \geq a \end{cases}$$

3 a) Vi använder Gauss lag i cylinderkoordinater.

S: cylinder med radie r, höjd h:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{inuti}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E}$-fältet är radiellt, och beror bara på r (p.g.a. symmetri)



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = h \int_0^{2\pi} d\varphi \; r E_r(r) = 2\pi r h E_r(r)$$

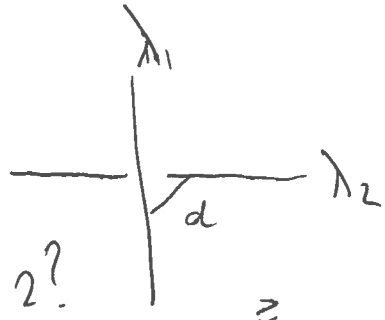
$d\vec{S} \parallel \vec{E}$

$Q_{inuti} = \lambda_1 h \Rightarrow$

$$2\pi r h E_r(r) = \frac{\lambda_1 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

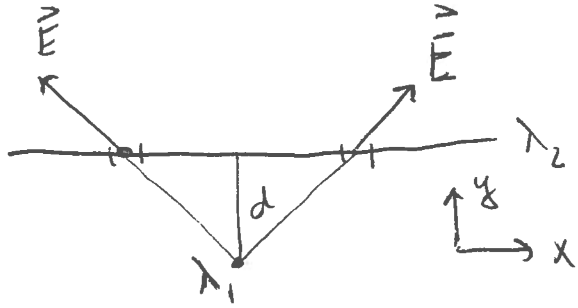
eller $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\lambda_1 \hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r}$

b) Situationen:



Vad är kraften på tråd 2?

Vy uppifrån, med $\vec{E}_1$ inritat:
(anta: λ_1 och λ_2 positiv).



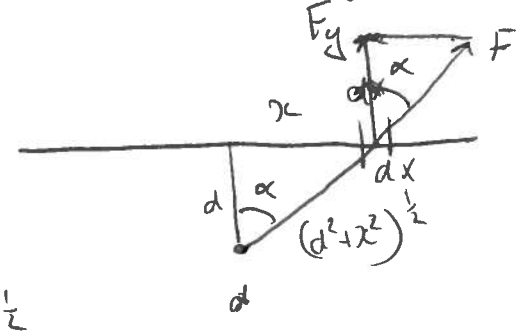
Kraft: $\vec{E}$ · laddning; $\vec{F} = q\vec{E}$.

P.g.a. symmetrin ser vi att krafterna i $\hat{x}$ riktning tar ut varandra; kraften är bara i $\hat{y}$ riktningen, och är

repulsiv. $(\lambda_1 \lambda_2 > 0)$

Vi delar upp tråd 2 i bitar dx, och integrerar.

F_y komponenten.



laddning i dx: $\lambda_2 dx$

fältet: $\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 (x^2+d^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$dF_y = \cos\alpha \, dF = \frac{d}{(x^2+d^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\lambda_1\lambda_2 dx}{(x^2+d^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ så:}$$

$$F_y = \frac{\lambda_1\lambda_2 d}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x^2+d^2)}, \text{ med } l = x/d \text{ får vi}$$

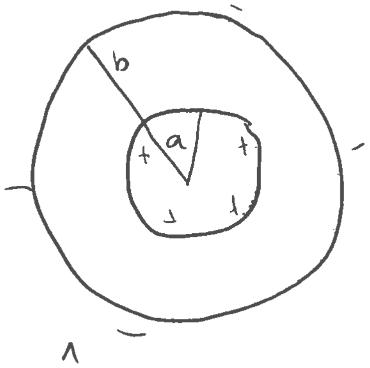
$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{1}{(l^2+1)} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\varepsilon_0}$$

Svaret kan förvåna: det beror inte på d!

Men, $\frac{\lambda_1\lambda_2}{\varepsilon_0}$ har som enhet Newton, så vi vet att $F \propto \frac{\lambda_1\lambda_2}{\varepsilon_0}$. I problemet finns bara en längdskala, d; så man kan inte skriva något som beror på d, men som inte har ~~något~~ någon enhet.

Så, F kan inte bero på avståndet d!

4a) Vi har en sfärisk kondensator:



(inre skal: $+Q$
yttre skal: $-Q$)

$\vec{E}$ är radiell, från A till B.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$C = \dfrac{Q}{V}$, så vi bestämmer först V.

$$V = \phi_A - \phi_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$V = \int_a^b dr \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

Kapacitansen blir $C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{ab}{(b-a)}$.

b) Energi av en laddat kondensator: $U = \frac{1}{2}CV^2$, eller

$$U = 2\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{(b-a)} V^2.$$

c) En ensam sfär: kan ses som en sfär kondensator med $b \to \infty$: $C = \lim\limits_{b\to\infty} 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{ab}{(b-a)} = 4\pi\varepsilon_0 a$

~~Ett~~ Eller: $V_{sfär} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, så vid ytan är $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 a$$

5 a) Fältet av dipol i origo:
som inkler

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left(3(\vec{m}_1\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}_1\right)$$

Hos dipol 2 är det här fältet homogent (en idealisk dipol har ingen storlek), så vi kan använda: $U_{pot} = -\vec{m}_2\cdot\vec{B}_1$

$$U_{pot} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}_2}{r^3}\left(3(\vec{m}_1\cdot\hat{r})\cdot\hat{r} - \vec{m}_1\right)$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1\cdot\hat{r})(\vec{m}_2\cdot\hat{r})\right)$$

b) Flödet genom slingan 2 ges av: $\Phi_2 = \vec{B}_1\cdot\vec{a}_2$, eftersom $\vec{B}_1$ är konstant hos slingan 2.

Definitionen av dipolmoment: $\vec{m} = I\vec{a}$

Så, $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r^3}\left(3(\vec{a}_1\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{a}_1\right)$, som ger

$$\Phi_2 = I_1\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(3(\vec{a}_1\cdot\hat{r})(\vec{a}_2\cdot\hat{r}) - \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\right)$$

Ömsesidig induktans ges av: $\Phi_2 = M_{21}I_1$, eller

$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(3(\vec{a}_1\cdot\hat{r})(\vec{a}_2\cdot\hat{r}) - \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\right)$. Det är symmetrisk i $\vec{a}_1$ och $\vec{a}_2$, så vi har $M_{21} = M_{12} = M$

c) Vi ändrar I_2, så flödet genom slingan 1 ändras. Det inducerar en spänning: $\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt}$.

Arbetet mot den här spänningen (effekten): $\frac{dW}{dt} = -I_1\mathcal{E}_1 = MI_1\frac{dI_2}{dt}$

Det totala arbetet blir: $W = MI_1I_2$.
(om I_2 går från noll till värde I_2)

Med $\vec{m} = \vec{a}I$ får vi att $W = U_{pot}$ från uppgift a).

6a) Den komplexa impedansen är:

$$Z_{tot} = R + Z_L + Z_C = R + i\omega L - i/\omega C$$

$$Z_{tot} = |Z_{tot}| e^{i\varphi}, \text{ med } |Z_t| = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)$$

Den komplexa spänningen:

$$V = V_0 e^{i\omega t}$$

$$J = \frac{V}{Z_t} = \frac{V_0}{|Z_t|} \frac{e^{i\omega t}}{e^{i\varphi}} = \frac{V_0}{|Z_t|} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Den (reella) strömmen i kretsen: $I = Re[J] = \frac{V_0}{|Z_t|} \cos(\omega t - \varphi)$

Amplituden: $I_0 = \frac{V_0}{\left(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\right)^{\frac{1}{2}}}$; fasen är $\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$

b) Vi har resonans när $|Z_t|$ är minimal, då är I_0 maximal. Det händer när impedansen av spolen och kondensator tar ut varandra: $\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

(då är $|Z_t| = R$).

Med $C = 0.20 \cdot 10^{-6}$ F och $L = 50 \cdot 10^{-3}$ H får vi: $\omega_0 = 1 \cdot 10^{4}\ s^{-1}$

7 a) Vi har två kretsar, och vi gör en spänningsvandring i båda, med källor till EMS på vänster sida:

Vänster: $\mathcal{E}_b + \cancel{\mathcal{E}_{ind}} - L_1 dI_1/dt + M\frac{dI_2}{dt} = I_1 R_1$ $\underline{(*)}$

Höger: $-L_2\frac{dI_2}{dt} + M\frac{dI_1}{dt} = I_2 R_2$ $\underline{(**)}$

OBS: vi kan byta tecken på ~~to~~ båda termer prop. med M.

För randvillkoren: den inducerade spänningen kan inte blir ∞, så vi måste ha $\underline{I_1(0) = I_2(0) = 0}$, annars har vi $\frac{dI_1}{dt}(0) \to \infty$.

b) Vi antar nu att $R_2 = 0$.
Då får vi:

$$(**) \to \frac{dI_2}{dt} = \frac{M}{L_2}\frac{dI_1}{dt}$$, så $(*)$ blir

$$\mathcal{E}_b - L_1\frac{dI_1}{dt} + \frac{M^2}{L_2}\frac{dI_1}{dt} = I_1 R_1,$$ eller

$$\left(\frac{M^2 - L_1L_2}{L_2}\right)\frac{dI_1}{dt} = I_1 R_1 - \mathcal{E} \qquad (***)$$

Lösning med I_1 konstant: $I_1(t) = \mathcal{E}/R_1$

Allmän lösning till $\left(\frac{M^2-L_1L_2}{L_2}\right)\frac{d\hat{I}_1}{dt} = \hat{I}_1 R_1$ är:

$$\hat{I}_1(t) = C\, e^{-\frac{L_2R_1}{(L_1L_2-M^2)}t} \qquad (\text{OBS: } L_1L_2 - M^2 \geq 0\,!)$$

Den allmänna lösningen till (~~***~~) är:

$$I_1(t) = \hat{I}(t) + \mathcal{E}_b/R_1 = \frac{\mathcal{E}_b}{R_1} + c\, e^{-\frac{L_2 R_1}{(L_1 L_2 - M^2)} t}$$

$I_1(0) = 0$ ger $c = -\mathcal{E}_b/R_1$, så vi har:

$$I_1(t) = \frac{\mathcal{E}_b}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{L_2 R_1}{(L_1 L_2 - M^2)} t}\right)$$

För att få $I_2(t)$, använder vi $\frac{dI_2}{dt} = \frac{M}{L_2}\frac{dI_1}{dt}$, som

ger $I_2(t) = \frac{M}{L_2} I_1(t) + c_2$, men $I_1(0) = I_2(0) = 0$, så vi

har $c_2 = 0$.

$$I_2(t) = \frac{M\mathcal{E}_b}{L_2 R_1}\left(1 - e^{-\frac{L_2 R_1}{(L_1 L_2 - M^2)} t}\right)$$