FK4010 - Elektromagnetism, Fysikum, Stockholms universitet
Tentamensskrivning (1:a omtentan), tisdag 18 juni 2013, kl 9:00 - 14:00

Läs noggrant genom hela tentan först. Börja med uppgifterna som du tror du klarar bäst!
Förklara tydligt ditt resonemang och ge rätt enhet när det behövs.
Hela tentan omfattar 7 frågor. Fråga ett ger 4 poäng, de övriga 6 poäng.
Det krävs 50% för att få godkänd.
Tillåtna hjälpmedel: Physics handbook, formellista och en miniräknare (ej grafisk).

Lycka till! Eddy Ardonne

1. Korta frågor.

   a. (1p) Ge Gauss lag i integral form (var noggrant med notationen!). Förklara kort betydelsen av Gauss lag.

   b. (1p) Ge Lenz lag, och förklara kort dess betydelse.

   c. (1p) Beskriv kortfattat hur man i princip kan bestämma det magnetiska fältet på grund av en ström i en strömslinga (som har en godtycklig form).

   d. (1p) Förklara kortfattat varför det elektriska fältet precis vid ytan av en laddad (men icke strömförande) ledare alltid är vinkelrätt mot ledarens yta.

2. (6p) Vi betraktar en lång, rak cylindrisk tråd med radie R_a. I tråden finns en ström som ges av strömtätheten $J = k(R_a - r)$, med r avståndet till trådens mitten och k en konstant. Antar att den relativa permeabiliteten $\mu = 1$, tråden är inte magnetisk. Bestäm det magnetiska fältet både inuti och utanför tråden.

3. På en ledande sfär med radie R_a finns en laddning, med ytladdningstäthet σ. Precis rund sfären, i området $R_a < r < R_b$ (med r avståndet till sfärens medelpunkt) finns ett isolerande material med dielektrisk konstant ϵ.

   a. (2p) Bestäm $\vec{D}$ utanför ($r > R_b$) och inuti ($R_a \leq r \leq R_b$) det isolerande materialet.

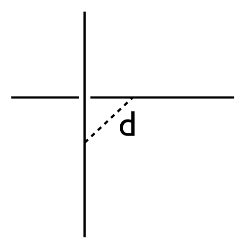
   b. (2p) Bestäm $\vec{E}$ utanför ($r > R_b$) och inuti ($R_a \leq r \leq R_b$) det isolerande materialet.

   c. (2p) Bestäm de bundna laddningarna på ytan av det isolerande materialet.

4. Magnetiska fält.

   a. (3p) Vi har en cirkelformig slinga med radie r, och en ström I. Bestäm det magnetiska fältet (både storleken och riktningen) precis i slingans medelpunkt. Använd Biot-Savarts lag.

   b. (3p) Vi har två långa, raka trådar, med en ström I_1 och I_2. Det minsta avståndet mellan trådarna är d, och de är vinkelrätt mot varandra. Bestäm kraften mellan trådarna. Ledning: det krävs inga krångliga integraler för att få svaret.



5. En krets består av en motstånd med resistans R, en spole med självinduktans L och en kondensator med kapacitans C som är kopplade i serie till en växelspänningskälla som ger en spänning $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$.

   a. (4p) Bestäm strömmen genom den här kretsen.

   b. (2p) Bestäm fasskillnaden mellan strömmen i och spänningen över moståndet. Antar att $R = 1.0\Omega$, $L = 1.0\text{mH}$, $C = 1.0\mu\text{F}$ och $\omega = 30\text{kHz}$. Ligger strömmen före eller efter spänningen?

6. En krets består av ett batteri med elektromotorisk spänning $\mathcal{E}_b$, en strömbrytare och en spole med självinduktans L och resistans R.

   a. (3p) På tid $t = 0$ stängs strömbrytaren. Härled differentialekvationen för strömmen i kretsen, och ge randvillkoren. Var noggrant med tecknen!

   b. (3p) Lös differentialekvationen, för att bestämma strömmen i kretsen som funktion av tiden.

7. Poynting vektorn.
   Vi betraktar en tråd med radie r och längd L. Det finns en spänning V över tråden, som ger upphov till en ström I.

   a. (2p) Ge det elektriska och magnetiska fältet vid trådens yta.

   b. (2p) Bestäm Poynting vektorn, och förklara kort dess betydelse.

   c. (2p) Bestäm med Poynting vektorn hur mycket energi (per tid) förs till tråden. Vad motsvarar den här energin?

FK 4010

Tentan 18 juni 2013.

1 a) Gauss lag: $\oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{innuti}}{\varepsilon_0}$.

Det elektriska flödet genom en sluten yta S ges av laddningen inuti S, oberoende av hur laddningen är fördelat. Det gäller för varje sluten yta S.

b) Om det magnetiska flödet genom en krets ändras, då induceras en (elektromotorisk) spänning. Strömmen som uppstår är så att den motverkar ändringen i det magnetiska flödet (Lenz lag), oavsett orsaken av ändringen i det magnetiska flödet.

c) Man kan använda Biot-Savarts lag, för att bestämma $\vec{B}$, i en punkt P, p.g.a. en ström I i en sluten slinga C:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{|\vec{r}|^2}$$

Integralen är längs kurvan C, $\vec{dl}$ är en infinitesimal bit, $\vec{r}$ är vektorn från $\vec{dl}$ till P, och bidraget till $\vec{B}$ p.g.a. dl är omvänd proportionellt mot avståndet i kvadrat, och riktningen ges ~~af~~ av $\vec{dl} \times \hat{r}$, med $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$.

d) I en ledare skulle en komponent av $\vec{E}$ parallell med ytan ge en kraft på elektronerna, så att $\vec{E}_{//}$ försvinner. Så, $\vec{E} \,//\, \hat{n}$, med $\hat{n}$ normal vektor mot ytan.

2) Ja använder cylinder koordinater, med $\vec{J} = k(R_a - r)\hat{z}$

P.G.A cylinder symmetrien har vi: $\vec{B}(\vec{r}) = B_\varphi(r)\,\hat{\varphi}$
($\vec{B} \parallel \hat{\varphi}$, och beror bara på r).

Amperes lag ger: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c$, och vi tar för C en cirkel med radie r.

Då har vi: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi r\, B_\varphi(r)$.

Nu antar vi att $r^* < R_a$, då: $I_c = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$, med S en cirkelskiva med radie ~~X~~ r:

$$I_c(r^*) = 2\pi \int_0^{r^*} dr'\, r' k(R_a - r')$$

$$= 2\pi k\left(\frac{1}{2}R_a (r^*)^2 - \frac{1}{3}(r^*)^3\right)$$

$$= \frac{\pi k}{3}\left(3R_a r^2 - 2r^3\right)$$

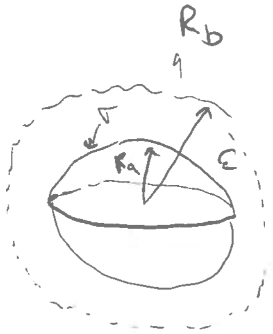
Så, för $r \leq R_a$: $B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 k}{6}\left(3R_a r - 2r^2\right)$

Om $r \geq R_a$ har vi $I_c(r) = I_c(R_a) = \frac{\pi k}{3} R_a^3$, så

$B_\varphi(r) = \mu_0 k/6 \left(\frac{R_a^3}{r}\right)$.

Svaret:
$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{6}\left(3R_a r - 2r^2\right)\hat{\varphi} & \text{om } r \leq R_a \\ \frac{\mu_0 k}{6}\frac{R_a^3}{r}\,\hat{\varphi} & \text{om } r \geq R_a \end{cases}$$

3)



a) Förskjutningen $\vec{D}$ beror bara på de fria laddningarna, som ges av σ i det här fallet, så

$$Q_{fria} = 4\pi R_a^2 \sigma$$

Gauss lag i materia:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{fria}.$$ P.G.A symmetrien: $\vec{D} \parallel \hat{r}$, och beror bara på $|\vec{r}|$.

Så, om $r \geq R_a$ får vi: $4\pi r^2 D_r = Q_{fria} = 4\pi R_a^2 \sigma$,

så $$\vec{D}(\vec{r}) = \sigma \frac{R_a^2}{r^2} \hat{r}$$, om $r \geq R_a$ (annars: $\vec{D} = \vec{0}$).

b) Om $r > R_b$, då har vi att $\varepsilon = 1$, så $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E}$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R_a^2}{r^2} \hat{r}$$, om $r > R_b$

Om $R_a \leq r \leq R_b$ har vi $\varepsilon \neq 1$, så vi får

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{R_a^2}{r^2} \hat{r}$$, om $R_a \leq r \leq R_b$

$[\vec{E} = \vec{0}$ om $r < R_a]$

c) De bundna laddningarna på ytan ges av $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$.
Vi antar att materialet är linjärt, så $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ger:
$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}$$

På insidan av isolatorn: $r = R_a$, $\hat{n} = -\hat{r}$:

$$\vec{P} = \frac{\cancel{\varepsilon_0}(\varepsilon-1)\sigma}{\cancel{\varepsilon_0}\varepsilon}\frac{\cancel{R_a^2}}{\cancel{R_a^2}}\hat{r} \Rightarrow \sigma_b = \sigma(1-\varepsilon)/\varepsilon \text{, eller}$$

den totala laddning på insidan: $4\pi R_a^2 \sigma(1-\varepsilon)/\varepsilon$.

På utsidan av isolatorn: $r = R_b$, $\hat{n} = \hat{r}$:

$$\vec{P} = (\varepsilon-1)\sigma/\varepsilon \, \frac{R_a^2}{R_b^2}\hat{r} \Rightarrow \sigma_b = \sigma(\varepsilon-1)/\varepsilon \, \frac{R_a^2}{R_b^2} \text{, eller den}$$

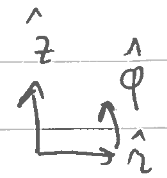
~~tot~~ totala laddningen på utsidan: $4\pi R_b^2 \sigma(\varepsilon-1)/\varepsilon \, R_a^2/R_b^2$

$$= 4\pi R_a^2 \sigma(\varepsilon-1)/\varepsilon,$$

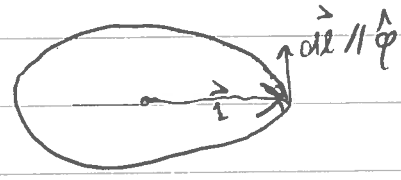
De totala bundna laddningarna tar ut varandra.

[$\rho_b = 0$, men det behövdes inte visas].

4 a) Vi använder Biot-Savarts lag:



$$\vec B(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \frac{\vec{dl}\times\hat r}{r^2}$$



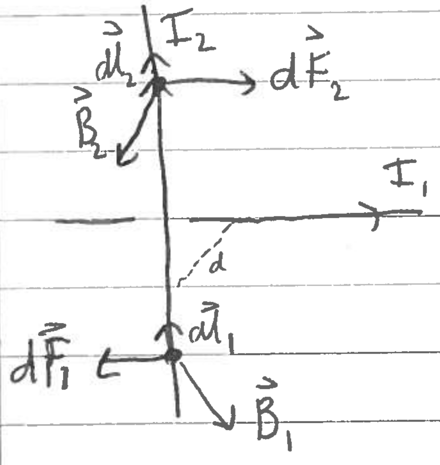
$$\vec{dl}\times\hat r = \underbrace{r\,d\varphi}_{=|\vec{dl}|}\,\hat z$$

$$\vec B(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\hat z\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{r\,d\varphi}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{2\pi}{r}\,\hat z$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2r}\,\hat z$$

b) Vi använder symmetrin i problemet.

$\vec B$-fältet p.g.a. tråd 1, vid 2 punkter av tråd 2:



Det ger två krafter, $d\vec F_1$ och $d\vec F_2$, nämligen:

$$d\vec F_1 = I_2\, \vec{dl}_1 \times \vec B_1$$

$$d\vec F_2 = I_2\, \vec{dl}_2 \times \vec B_2$$, och vi ser att

$$d\vec F_1 = -d\vec F_2 .$$

Kraften från tråd 1 på tråd 2 är noll (och tvärtom p.g.a. Newton).

5 a) Den komplexa impedansen ges av:

$$Z_t = R + i\omega L - {}^{i}/_{\omega C}, \text{ eller}$$

$$Z_t = |Z_t| e^{i\varphi}, \text{ med}$$

$$|Z_t| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \tfrac{1}{\omega C})^2} \text{ och } \varphi = \arctan\left(\frac{L\omega - {}^1/_{\omega C}}{R}\right)$$

Den komplexa spänningen:

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}, \text{ så vi får: } I = \frac{V}{Z} = \frac{V_0}{|Z_t|} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Den reella strömmen blir:

$$I(t) = \underbrace{\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - {}^1/_{\omega C})^2}}}_{\text{Amplituden}} \cos\underbrace{(\omega t - \varphi)}_{\text{fasen}}$$

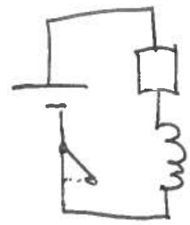
fasskillnaden: strömmen ligger φ efter spänningen.

b) $R = 1.0\,\Omega$; $C = 1 \cdot 10^{-6}$ F; $L = 1.0\ 10^{-3}$ H; $\omega = 30 \cdot 10^3\ s^{-1}$

$$\tan\varphi = 30 - {}^{10^6}/_{30 \cdot 10^{+3}} = -\frac{10}{3}, \text{ eller}$$

$$\varphi \simeq -73.3^\circ \quad (\varphi \simeq -0.41\pi)$$

Strömmen ligger $+73.3^\circ$ före spänningen

6 a) Kretsen ser ut så här: $\mathcal{E}_b$ 

EMS i kretsen ges av: $\mathcal{E}_b + \mathcal{E}_{ind} = \mathcal{E}_b - L\frac{dI}{dt}$,

eftersom självinduktansen motverkar strömmen.

Med Kirchhoffs lag får vi: $\mathcal{E}_b - L\frac{dI}{dt} = IR$,

eller $\underline{L\frac{dI}{dt} + IR = \mathcal{E}_b}$ (*)

På $t=0$ måste vi ha att $\underline{I(0)=0}$, ~~då~~ annars blir

$\mathcal{E}_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$ oändlig

b) Den homogena ~~version~~ versionen av (*): $\cancel{\frac{dI}{dt} =}$

$L\frac{dI}{dt} + IR = 0$, eller $\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$, med

lösning: $I(t) = Ce^{-R/L\,t}$, C en konstant

Speciell lösning för (*): $I(t) = \mathcal{E}_b/R$, så den allmänna

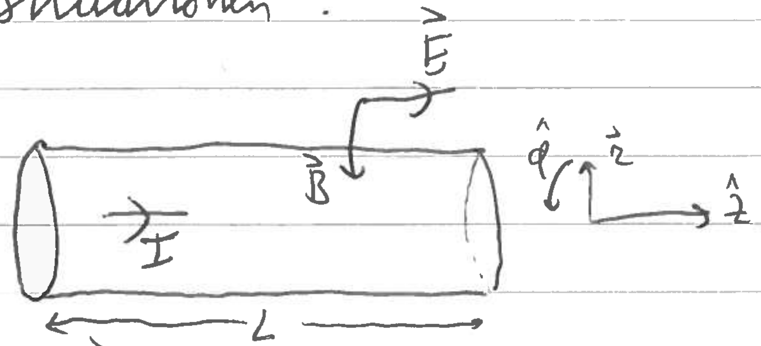
lösningen: $I(t) = \mathcal{E}_b/R + Ce^{-R/L\,t}$.

Nu har vi:

$$I(0) = \mathcal{E}_b/R + C\cdot 1 = 0 \Rightarrow C = -\mathcal{E}_b/R,$$ så

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_b}{R}\left(1 - e^{-R/L\,t}\right)$$

7 a) Situationen:



$\vec{E} \parallel \hat{z}$; $\vec{B} \parallel \hat{\varphi}$

Spänningen över tråden: $\Delta V = V$

$\vec{E}$ ges av: $\vec{E} = \frac{V}{L}\hat{z}$

$\vec{B}$ ges av: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\hat{\varphi}$ (vid ytan av tråden).

b) Poynting vektorn:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{VI}{2\pi r L}(-\hat{r}), \text{ ty } \hat{z}\times\hat{\varphi} = -\hat{r}$$

$$|\vec{S}| = \frac{VI}{2\pi r L}$$

$\vec{S}$: ger energi flödet per tidsenhet per ytenhet genom en yta, i det här fallet till tråden!

c) För att bestämma hur mycket energi per tid som tillförs tråden, integrera vi över trådens yta. $|\vec{S}|$ är konstant över ytan, så vi får:

$$P = \iint_A \vec{S}\cdot d\vec{A} = \frac{IV}{2\pi r L}\int_0^L dz \int_0^{2\pi} r\,d\varphi = \frac{VI}{2\pi r L}(2\pi r L) = VI,$$

precis Joule värme som utvecklas i tråden!