FK4010 - Elektromagnetism, Fysikum, Stockholms universitet
Tentamensskrivning, måndag 16 mars 2015, kl 9:00 - 14:00

Läs noggrant genom hela tentan först. Börja med uppgifterna som du tror du klarar bäst!
Förklara tydligt ditt resonemang och ge rätt enhet när det behövs.
Hela tentan omfattar 7 frågor. Fråga ett ger 4 poäng, de övriga 6 poäng.
Det krävs 50% för att få godkänd.
Tillåtna hjälpmedel: Physics handbook, formellista och en miniräknare (ej grafisk).

Lycka till! Eddy Ardonne

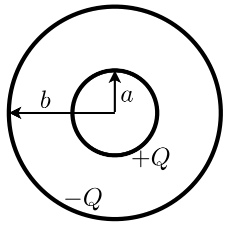
1. Korta frågor.
   a. (1p) Ge Faradays lag i integral form (var noggrant med notationen!) och förklara kort betydelsen av Faradays lag.
   b. (1p) Förklara varför det elektriska fältet är noll inuti en metall.
   c. (1p) Förklara kortfattat begreppet självinduktans.
   d. (1p) Ge Poyntings teorem och förklara kortfattat vad det innebär.

2. (6p) En punktladdning $+2q$ befinner sig i origo. Runt den här laddningen finns ett klot med radie R (så att punktladdningen är precis i klotets mittpunkt). Klotet är homogent laddat, och dess totala laddning är $-q$. Bestäm det elektriska fältet inuti och utanför klotet. Motivera din räkning noggrant!

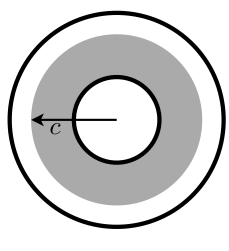
3. Vi har en lång, rak tråd av ett magnetiskt material, med relativ permeabilitet μ_r. Trådens radie är a, och strömmen i tråden beskrivs av strömtätheten $\vec{J} = kr\hat{z}$, med k en konstant, och r avståndet till trådens axel (i cylinderkoordinater).
   a. (2 p) Bestäm fältet $\vec{H}$ inuti och utanför tråden.
   b. (2 p) Bestäm, med hjälp av uppgift a. fältet $\vec{B}$ och magnetiseringen $\vec{M}$ inuti och utanför tråden.
   c. (2 p) Bestäm de bundna strömmar som finns p.g.a. magnetiseringen, både i tråden och på trådens yta.

4. En krets består av en motstånd med resistans R och en kondensator med kapacitans C som är kopplade i serie till en växelspänningskälla som ger en spänning $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$.
   a. (4p) Bestäm strömmen genom den här kretsen.
   b. (2p) Vad är medelvärdet (över en period) av effekten som källan måste leverera?

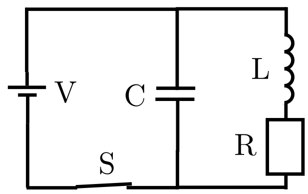
5. En kondensator består av två koncentriska ledande sfärer, med radie a och $b > a$. Laddningen på den inre sfären är $+Q$, på den yttre $-Q$. Vi antar först att det råder vakuum mellan sfärerna.



   a. (2 p) Bestäm först elektriska fältet inuti kondensatorn.
   b. (2 p) Bestäm kondensatorns kapacitans.
   c. (2 p) Nu antar vi att det finns en isolator i kondensatorn, som fyller rummet mellan sfärerna från radie a upp till en radie c (det gråa området i figuren). Isolatorn har relativ permittivitet ϵ_r. Vad blir kondensatorns kapacitans nu?



6. En spole med självinduktans L och resistans R är parallelt kopplad till en kondensator med kapacitans C, och ansluten till ett batteri med spänning V, se figuren. Kretsen har varit stängd en lång tid, så att vi har en jämnviktssituation, d.v.s. strömmen genom spolen är $I = V/R$ och kondensatorn är laddad till en spänning V. I det här läget öppnas strömbrytaren S (anta att vi gör det vid tiden $t = 0$).

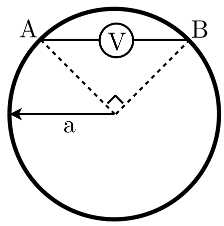


a. (3p) Härled differentialekvationen för strömmen i kretsen, och ge randvillkoren. Var noggrant med tecknen!

b. (2p) Nu antar vi att kretsen är kritiskt dämpad, d.v.s, $R = \sqrt{4L/C}$. Lös differentialekvationen.

c. (1p) Hur mycket energi har omvandlats till värme när kondensatorn har helt laddats ur?
Du får använda (men det behövs inte!) att
$\int_0^\infty e^{-\alpha x}(a + bx + cx^2)dx = a/\alpha + b/\alpha^2 + 2c/\alpha^3$ som gäller om $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

7. En cirkelformig ledande slinga, med radie a och resistans R finns i ett område med ett homogent magnetiskt fält. Riktningen på det magnetiska fältet är ut ur pappret, och storleken är tidsberoende, nämligen $B(t) = \alpha t$, med $\alpha > 0$.



a. (2 p) Bestäm strömmen genom slingan, både till storlek och riktning.

b. (1 p) Förklara varför den elektriska potentialen inte är definierad i det här fallet.

c. (1 p) Vad är det en voltmeter egentligen mäter?

d. (2 p) Bestäm spänningsskillnaden $V_A - V_B$ som voltmetern i figuren mäter.

1 a) Faradays lag i integral form:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Faradays lag säger att en ändring i det magnetiska flödet genom en sluten kurva ger upphov till ett elektriskt fält, så att integralen av $\vec{E}$ längs kurvan (den inducerade spänningen) ges av minus tidsderivatan av flödet. Det inducerade fältet har slutna fältlinjer.

b) En metall har lednings elektroner, som kan röra sig fritt. Om $\vec{E}$ inte skulle vara noll i metallen då skulle det finnas en kraft på e^-, så att de skulle röra på sig, och skapa ett eget $\vec{E}$-fält, som motverkar fältet som fanns. I jämvikt är $\vec{E}$ alltså noll inuti metallen.

c) En ström i en krets skapar ett $\vec{B}$-fält, prop. med strömmen. Flödet av $\vec{B}$ genom kretsen är också proportionellt med strömmen, och själv-induktans L är:

$L = \Phi_B / I$ ell. $L = \frac{d\Phi}{dI}$. En själv-induktans motverkar

ändringen i strömmen.

d) Poyntings teorem säger att den totala energien bevaras. Minskning i pot. energi ges av uträttat arbete, och hur mycket energi som förs bort:

$$\frac{dU_{pot}}{dt} = \frac{d}{dt}\Bigg(\underbrace{\int_V \left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \tfrac{1}{2\mu_0} B^2\right) dt}_{U_{pot}}\Bigg) = -\underbrace{\frac{dW}{dt}}_{\text{uträttat arbete}} - \underbrace{\oint\!\!\!\oint_S \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\, d\vec{S}}_{\text{energi som förs bort, per tid}}$$

2 g Vi använder Gauss lag.

Laddningsfördelningen har sfärisk symmetri, så det följer att $\vec{E} \parallel \hat{r}$ (sfäriska koordinater), och att $\vec{E}$ beror bara på r, avståndet till origo.

Gauss lag: $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{inuti}}{\varepsilon_0}$. Vi väljer S: sfär med radie r. Eftersom $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\hat{r}$, har vi:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi E_r(r) r^2$$

Om $r < R$, då blir laddningen inuti S följande.

Punktladdning ger ett bidrag $+2q$.

Laddningstätheten för ~~sfären~~ klotet: $\rho = \frac{-q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, som är konstant.

Så, laddning i en sfär med ~~rate~~ radie R: $Q = \frac{-q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= -q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

Laddning inuti S: $Q_{in} = q\left(2 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right)$ $(r < R)$

Om $r > R$, då har vi $Q_{in} = q$

Så för $r < R$ har vi, med Gauss lag: $4\pi E_r r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(2 - \frac{r^3}{R^3}\right)$,

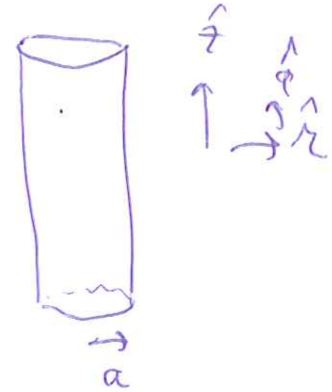
eller: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)\hat{r}$.

Om $r > R$ har vi:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}.$$

3 a) Vi har en tråd med

strömtäthet: $\vec{J}_f = k r \hat{z}$



P.g.a. symmetri har vi:

$\vec{H}(\vec{r}) = H_\varphi(r)\hat{\varphi}$ ($\vec{H}$ pekar i $\hat{\varphi}$ riktning, beror bara på r, avståndet till axeln).

Ampères lag i materia:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{f,C}$$

För C tar vi en cirkel med radie r: då har vi:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H_\varphi$$

$I_{f,C}$ är ~~...~~ den fria strömmen, som ges av integralen av strömtätheten: $I_{f,C} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r} dr' \, r' \, J_f(r')$

cylinder koordinater — Jacobianen!

För $r<a$ får vi: $I_{f,C} = 2\pi k \int_0^{r} dr' (r')^2 = \frac{2}{3}\pi k r^3$

Om $r>a$ får vi: $I_{f,C} = 2\pi k \int_0^{a} dr' (r')^2 = \frac{2}{3}\pi k a^3$

Så, för $r<a$ har vi: $H_\varphi(r) = \frac{2}{3}\pi k r^3 / (2\pi r) = \frac{1}{3} k r^2$

$r>a$: $H_\varphi(r) = \frac{1}{3} k \, a^3/r$

eller: $$\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{3} k r^2 \hat{\varphi} & r \le a \\ \frac{1}{3} k \, a^3/r \, \hat{\varphi} & r > a \end{cases}$$

b) $\vec{B}$ ges av $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, så för $r<a$ ($\mu_r \neq 1$):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu_r}{3} k\, r^2 \hat{\varphi} \quad (r \leq a)$$

Om $r>a$ har vi $\mu_r = 1$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 k}{3} \frac{a^3}{r} \hat{\varphi} \qquad (r>a)$$

Magnetiseringen blir, med $\vec{M} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{H} = (\mu_r - 1)\vec{H}$:

För $r>a$: $\vec{M} = \vec{0}$, för ~~M<~~ $r \leq a$: $\vec{M} = \frac{(\mu_r - 1)}{3} k r^2 \hat{\varphi}$

c) De bundna strömmar inuti tråden ges av:

$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$, men vi har $\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H}$, och $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{fria}$,

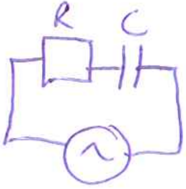
Så $\vec{J}_b = (\mu_r - 1) k r \hat{z}$

De bundna strömmar på ytan: $\vec{i}_s = \vec{M} \times \hat{n}$, där

$\vec{M} \parallel \hat{\varphi}$ och $\hat{n} = \hat{r}$. Vi har $\hat{\varphi} \times \hat{r} = -\hat{z}$, så vi

får (på ytan är $r=a$):

$$\vec{i}_s = (-\hat{z}) \frac{(\mu_r - 1)}{3} k a^2$$

4 a) Kretsen är: 

Använd den komplexa impedansen: $Z_{tot} = R - \frac{i}{\omega C}$

$$= \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}\, e^{-i\varphi}, \quad \text{med} \quad \tan\varphi = \frac{1}{\omega RC}$$

$$= |Z_t|\, e^{-i\varphi}$$

Den komplexa spänningen är: $\mathcal{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}$, och

$$\mathcal{J}(t) = \frac{\mathcal{V}(t)}{Z_t} = \frac{V_0}{|Z_t|} e^{i(\omega t+\varphi)}$$

Så strömmen ges av: $I(t) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{J}(t)\right] = \frac{V_0}{|Z_t|} \cos(\omega t+\varphi)$

Och vi kan skriva det som: $I(t) = \frac{V_0}{|Z_t|}\left(\cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi\right)$

$$= \frac{V_0}{|Z_t|^2}\left(R\cos(\omega t) - \frac{1}{\omega C}\sin(\omega t)\right)$$

b) Medelvärdet av effekten ges av:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\,V(t)\,dt$$

$$= \frac{V_0^2}{T|Z_t|^2}\left[\underbrace{\int_0^T R\cos^2(\omega t)\,dt}_{RT/2} + \underbrace{\int_0^T \frac{1}{\omega C}\sin(\omega t)\cos(\omega t)\,dt}_{=0}\right]$$

$$= \frac{V_0^2 R}{2|Z_t|^2} \left(= \frac{V_0^2}{2|Z_t|}\cos\varphi\right)$$

$$= \frac{V_0^2 R}{2\left(R^2 + (1/\omega C)^2\right)}$$

5 a) För att bestämma $\vec{E}$-fältet inuti kondensatorn använder vi Gauss lag:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E}$ är radiellt utåt, och beror på r.

Med S ~~är~~ en sfär med radie r $(a<r<b)$:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r = \frac{+Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

b) För att bestämma kapacitansen, $C = \frac{Q}{V}$, räknar vi ut potentialskillnaden:

$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E_r \, dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}\Big]_a^b = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(a-b)}{ab} = \frac{Q(b-a)}{4\pi\varepsilon_0 ab}$$

Så kapacitansen blir: $C = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{(b-a)} \; (>0)$.

c) P.g.a. isolatorn minskas $\vec{E}$-fältet i området $a<r<c$, med en faktor $\frac{1}{\varepsilon_r}$. Så spänningsskillnaden minskas:

$$V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_a^c \frac{1}{\varepsilon_r r^2} dr + \int_c^b \frac{1}{r^2} dr\right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{c-a}{\varepsilon_r (ac)} + \frac{b-c}{bc}\right]$$

$$V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{b(c-a) + \varepsilon_2 a(b-c)}{\varepsilon_2 abc}\right]$$

Så kapacitansen blir:

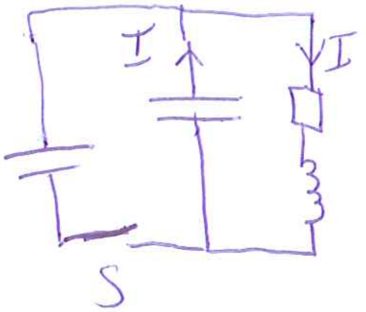
$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 abc}{(b(c-a) + \varepsilon_2 a(b-c))}$$

(OBS: $\varepsilon_2 \to 1$ eller $c \to a$ ger samma svar som i b))

Man kan också betrakta det fallet som två kondensatorer (med $C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 ac}{c-a}$ och $C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 cb}{b-a}$) i serie, och som $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

6 a) För att herleda diff. ekvationen gör vi en spänningsvandring.

Välj strömmen bort från C som positiv (strömmen just ~~ett~~ efter S öppnas).



$$I = -\frac{dQ}{dt}$$ (kondensatorn laddas ur!)

Spänningen över C ökar i strömriktningen, och minskar över R; och vi har den inducerade spänningen i spolen:

$$\mathcal{E}_{ind} + V_c = V_R \Rightarrow -L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = IR.$$

Nu tar vi tidsderivatan: $-L\frac{d^2I}{dt^2} - \frac{1}{C}I = \frac{dI}{dt}R$, eller

(*) $$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0$$

Randvillkoren: på $t=0$ måste strömmen ges av $I(0) = \frac{V}{R}$, annars blir $\frac{dI}{dt}$ oendlig för $t=0$.

Med $\mathcal{E}_{ind} + V_c = V_R$ får vi, på $t=0$: $-L\frac{dI}{dt}(0) + V = V$,

eller: $\frac{dI}{dt}(0) = 0$.

b) För att lösa (*) tar vi: $I(t) = e^{+kt}$, som ger:

$Lk^2 + Rk + 1/C = 0 \Rightarrow k_\pm = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - 4L/C}$, så

$k_+ = k_- = -\frac{R}{2L}$, eftersom kretsen är kritiskt dampat.

Den allmänna lösningen blir:

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} + B\cancel{t}\, e^{-R/2L\, t}.$$

På $t=0$ har vi: $I(0) = V/R$, så

$$I(0) = A = V/R,$$

$$\frac{dI}{dt} = \left[A\left(-\frac{R}{2L}\right) + B + Bt\left(-\frac{R}{2L}\right)\right] e^{-R/2L\, t}$$

Så $\frac{dI}{dt}(0) = -\frac{R}{2L}A + B = -\frac{V}{2L} + B = 0 \Rightarrow B = \frac{V}{2L}$

Så vi har att: $I(t) = Ve^{-R/2L\, t}\left(\frac{1}{R} + \frac{t}{2L}\right) = \frac{V}{R}\left(1 + \frac{tR}{2L}\right)e^{-\frac{R}{2L}t}$

c) Värme kan räknas ut genom att integrera $I^2(t)R$:

$$W = \int_0^\infty dt\, I^2(t) R = \frac{V^2}{R}\int_0^\infty dt \left(1 + \frac{tR}{2L}\right)^2 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$= \frac{V^2}{R}\int_0^\infty dt\left(1 + \frac{tR}{L} + \frac{t^2R^2}{4L^2}\right)e^{-\frac{R}{L}t}, \text{ eller}$$

$$= \frac{V^2}{R}\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{R/L}{\alpha^2} + \frac{2R^2/4L^2}{\alpha^3}\right] \text{ med } \alpha = R/L$$

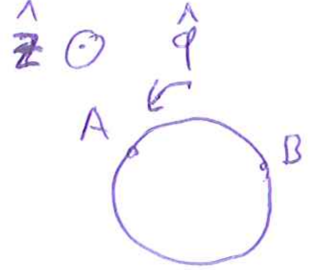
$$= \frac{V^2}{R}\frac{L}{R}\left[1 + 1 + \frac{1}{2}\right] = \frac{5}{2}\frac{V^2L}{R^2} \underset{R^2 = \frac{4L}{C}}{=} \frac{5}{8}CV^2.$$

Detta är också energi lagrat i kretsen på $t=0$:

$U_C = \frac{1}{2}CV^2$, och $U_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\frac{V^2}{R^2} = \frac{1}{8}CV^2$, så

$$U_{tot} = \frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{8}CV^2 = \frac{5}{8}CV^2$$

7 a) $\vec{B}$ beror på tiden, och är ut ur pappret $\vec{B} = \alpha t \hat{z}$



Så det finns en inducerad spänning i slingan, p.g.a. Faradays lag:

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

~~Absolut~~ Absolut värde är: $|\mathcal{E}_{in}| = \left|-\frac{d\Phi}{dt}\right| = \underbrace{\pi a^2}_{\text{area}} \left|\frac{dB}{dt}\right|$

$= \pi a^2 \alpha$.

I blir då: $I = \pi a^2 \alpha / R$ Riktning fås med Lenz lag: strömmen motverkar ändring i $\vec{B}$-fältet. P.g.a strömmen finns ~~det~~ ett fält in i pappret, så strömmen är mot urs, i $-\hat{\varphi}$ riktningen (som det inducerade $\vec{E}$-fältet).

b) Skillnad i elektrisk potential definieras som $V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$. I det tidsberoende fallet beror integralen på ~~vilken~~ vilken väg man tar, så man kan inte definiera en potential.

c) 'Spänning' skillnaden som en voltmeter visar är $V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$, med integral vägen längs sladdorna och genom voltmetern!

d) Vi måste räkna ut: $V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$, med kurvan $A \to B$

Vi kan skriva: $\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$

C:

A B

$A \to B$

Första integralen:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Faraday}}}{=} -\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{dB}{dt}}}{\alpha}\ \text{Area}(⌓) = \frac{\alpha a^2}{4}(2-\pi)$$

$$\text{Area}(⌓) = \frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{1}{2}a^2 \quad |\varepsilon|$$

Andra integralen:

$$E_\varphi = -\frac{\overbrace{\pi\alpha a^2}}{\underbrace{2\pi a}_{\text{längd}}} = -\alpha a/2$$

$$\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} d\varphi\, \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Jacobianen}}}{a}\left(-\frac{\alpha a}{2}\right) = -\frac{\alpha\pi a^2}{4}$$

: spänning pg.a strömmen genom slingan med motstånd!

$$\text{Så, vi har } V_A - V_B = \frac{\alpha a^2}{4}(2-\pi) - \left(-\frac{\alpha\pi a^2}{4}\right)$$

$$= \frac{\alpha a^2}{2}$$