FK4010 - Elektromagnetism, Fysikum, Stockholms universitet
Tentamensskrivning, måndag 17 mars 2014, kl 9:00 - 14:00

Läs noggrant genom hela tentan först. Börja med uppgifterna som du tror du klarar bäst!
Förklara tydligt ditt resonemang och ge rätt enhet när det behövs.
Hela tentan omfattar 7 frågor. Fråga ett ger 4 poäng, de övriga 6 poäng.
Det krävs 50% för att få godkänd.
Tillåtna hjälpmedel: Physics handbook, formellista och en miniräknare (ej grafisk).

Lycka till! Eddy Ardonne

1. Korta frågor.

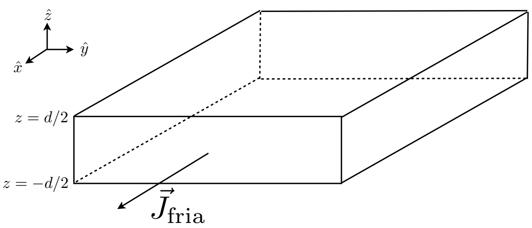
   a. (1p) Ge Faradays lag i lokal form (var noggrant med notationen!). Förklara kort betydelsen av Faradays lag.

   b. (1p) Ge Kirchhoffs två krets lagar.

   c. (1p) Beskriv en situation där två voltmetrar mäter två olika 'spänningar', även om de är anslutna till samma punkter.

   d. (1p) Förklara varför det (statiska) elektriska fältet är noll i en ledare.

2. (6p) Vi betraktar en ihålig cylinder med innre radie a och yttre radie b. På cylindern (dvs. för $a \leq r \leq b$) finns en laddningstäthet $\rho(r) = kr$, med k en konstant och r avståndet till cylinderns axel. Bestäm det elektriska fältet i de tre olika områdena $r < a$, $a \leq r \leq b$ och $r > b$.



3. En skiva är oändlig stor i $\hat{x}$ och $\hat{y}$ riktningen och har en tjocklek d. Genom skivan skickas en ström med konstant strömtäthet J_{fria} i $\hat{x}$ riktningen. Skivan är paramagnetisk med en konstant och positiv relativ permeabilitet $\mu_r > 1$.

   a. (3p) Bestäm $\vec{H}$ utanför ($|z| > d/2$) och inuti ($|z| \leq d/2$) skivan.

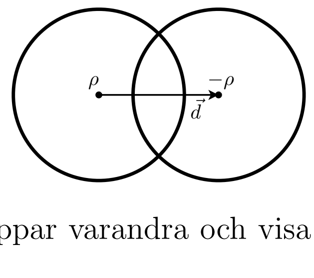
   b. (1p) Bestäm det magnetiska fältet $\vec{B}$ utanför och inuti skivan.

   c. (2p) Bestäm de bundna strömmar i skivan och på skivans ytorna (dvs. vid $z = d/2$ och $z = -d/2$).

4. Ett sfäriskt klot med radie a har en konstant laddningstäthet ρ.

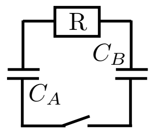
   a. (3p) Använd Gauss lag för att förklara att det elektriska fältet inuti klotet (dvs. $r \leq a$), ges av $\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$.

   Nu tar vi ett klot till, med samma radie a, men med motsatt laddningstäthet $-\rho$. Vi placera det andra klotet så att avståndet mellan medelpunkterna är d, som är *mindre* än $2a$, så att kloten överlappar varandra.



   b. (3p) Bestäm det elektriska fältet i området där kloten överlappar varandra och visa att det är konstant.

5. En krets består av två kondensatorer (kapacitans C_A och C_B), en motstånd (resistans R) och en strömbrytare. I början är kretsen öppet och kondensator A laddad till en spänning V_0, medan kondensator B är oladdad. Sedan stänger man kretsen vid tid $t = 0$ och kondensator A börjar urladdas delvis.



   a. (2p) Använd en allmän princip för att bestämma spänningen över kondensator A, när strömmen har blivit noll igen (dvs. långt efter brytaren stängdes).

   b. (2p) Härled differentialekvationen som beskriver strömmen genom kretsen och bestäm randvilkoret. Välj strömmen bort från kondensator A's positiva plattan som positiv och var noggrann med tecknen!

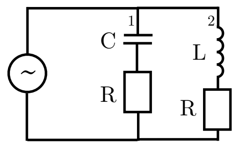
   c. (2p) Lös differentialekvationen för att bestämma strömmen som funktion av tiden.

6. En toroid spole har en rektangulär tvärsnitt, med höjd h, innre radie a och yttre radie b. Spolen har *totalt* n_t varv. Det magnetiska fältet inuti en sådan spole är $\vec{B} = \frac{\mu_0 n_t I}{2\pi r}\hat{\varphi}$, med r avståndet till spolens axel. Fältet är noll utanför spolen. I den här uppgiften gör vi inga antaganden om spolens dimensioner.

   a. (4p) Beräkna energin som är lagrat i det magnetiska fältet.

   b. (2p) Beräkna nu spolens självinduktans L. Fråga a. kan hjälpa med det!

7. En växelspänningskrets består av två grenar. Gren ett består av en motstånd med resistans R och en kondensator med kapacitans C. Gren två består av en mostånd med samma resistans R och en spole med självinduktans L, se figuren. Växelspänningen från källan ges av $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$.



   a. (4p) Bestäm först strömmen genom gren ett, sedan strömmen genom gren två. Ledning: försök *inte* att räkna ut kretsens totala impedans (man får inga poäng för det), utan betrakta kretsen som en strömdelare!

   b. (2p) När är den totala strömmen genom källan i fas med spänningen från källan? Ledning: om du inte har gjort det än, börja med att skriva strömmen genom grenarna på följande sätt: $I_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$, med A_1, B_1 konstanter och likadant för $I_2(t)$.

FK4010 ; Tentan 17e mars 2014.

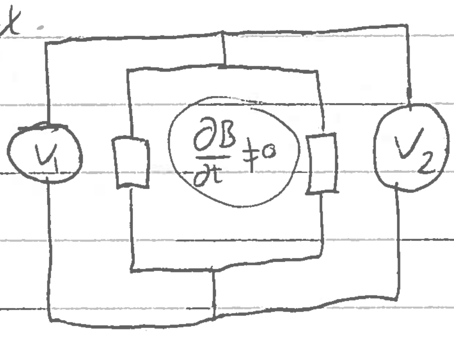
1 a) Faradays lag i lokal form: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

En ändring i det magnetiska fältet ger upphov till ett elektiskt fält. $\vec{E}$-fältet som genereras har slutna fältlinjer

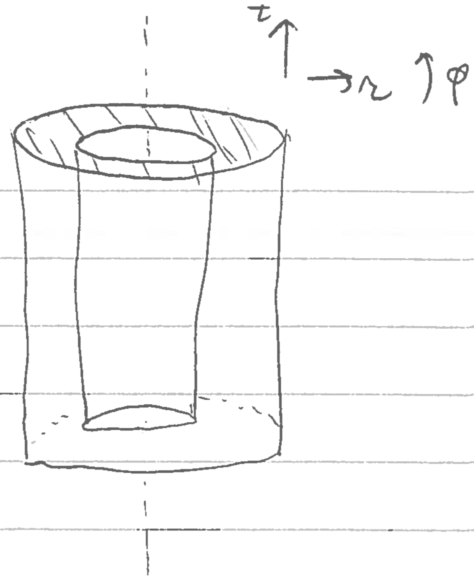
b) Spänningslag: summan av alla spänningar över komponenterna i sluten slinga av en krets är noll

Strömlag: summan av alla strömmar till en nod i en krets är noll (laddning bevaras).

c) Det händer när man har ett $\vec{B}$ fält som ändras med tiden. Då är $\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ inte noll, så potentialen är inte unikt definierat.



d) I en ledare finns elektroner som kan röra sig fria. Om det skulle finnas ett $\vec{E}$-fält i en ledare, så skulle e^- röra sig p.g.a. kraften tills kraften blir noll. Då är $\vec{E}$ också noll, så det finns inget $\vec{E}$-fält i en ledare



2) P.g.a. symmetri och Coulombs lag har vi:

$\vec{E} \parallel \hat{r}$, och $\vec{E}$ beror bara på r, avståndet till axeln.

Gauss lag: $\displaystyle\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{innuti}}}{\varepsilon_0}$

Som Gauss yta S tar vi en cylinder med radie r, och höjd h. Bara manteln bidrar till integralen, och vi får:

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi r\, h\, E_r(r)$$

Laddningen inuti S är: $r<a$: $Q_{\text{innuti}} = 0$

$$a<r<b: \quad Q_{\text{innuti}} = \iiint_V \rho(r)\, d\tau = \int dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^r dr'\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Jacobianen}}}{r'}\, \overset{\rho}{kr'}$$

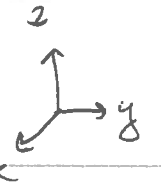
$$= 2\pi h\, k\, \frac{1}{3} r'^3 \Big]_{r'=a}^{r'=r}$$

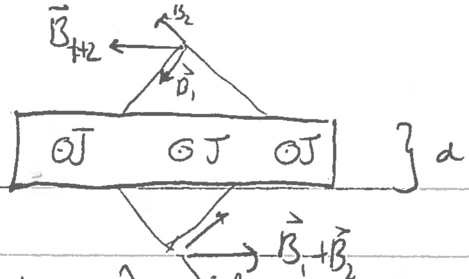
$$= \frac{2\pi}{3} h k \left(r^3 - a^3\right)$$

$r>b$: $\quad Q_{\text{innuti}} = \frac{2\pi}{3} h k \left(b^3 - a^3\right)$

Med Gauss lag får vi nu:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & r<a \\ \dfrac{k}{3\varepsilon_0}\left(r^2 - \dfrac{a^3}{r}\right)\hat{r} & a<r<b \\ \dfrac{k}{3\varepsilon_0}\dfrac{(b^3-a^3)}{r}\hat{r} & r>b \end{cases}$$



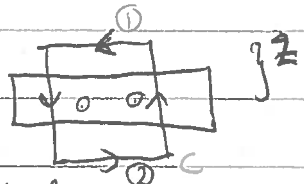


3| Strömmen är i $\hat{x}$ riktningen

Symmetrin ger att $\vec{H}$ och $\vec{B}$ är i $-\hat{y}$ riktningen om $z>0$, och $+\hat{y}$ riktningen om $z<0$; $|H(z)| = |H(-z)|$

a) Ampères lag i materia: $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{fria,C}$

Vi tar en ampere kurva C: (bredden b)



Bara de övre och nedre delen bidrar till integralen:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_{①} \vec{H}\cdot d\vec{l} + \int_{②} \vec{H}\cdot d\vec{l} = b\,H(z) + b\,H(-z)$$

$$= 2\,b\,H(z)$$

Om $z > d/2$: då är $I_{fria,C} = d\,b\,J_{fria}$;

Om $z < d/2$: då är $I_{fria,C} = 2z\,b\,J_{fria}$.

Med Ampères lag: $z > d/2$: $\vec{H} = (-\hat{y})\,\frac{d}{2}\,J_{fria}$

$z < -d/2$: $\vec{H} = (\hat{y})\,\frac{d}{2}\,J_{fria}$

$-\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2}$: $\vec{H} = -z\,J_{fria}\,\hat{y}$

b) Utanför skivan: $\mu_r = 1$; med $\vec{B} = \mu_0\mu_r H$ får vi

$\vec{B} = (-\hat{y})\,\frac{d}{2}\,\mu_0\,J_{fria}$ $(z > d/2)$

$\vec{B} = (\hat{y})\,\frac{d}{2}\,\mu_0\,J_{fria}$ $(z < -d/2)$

I skivan: $\mu_r > 1$, så vi får $\vec{B} = (-\hat{y})\,z\,\mu_0\mu_r\,J_{fria}$

c) Relationen mellan $\vec{M}, \vec{B}$ och $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M} \quad \text{, eller} \quad \vec{M} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{H}.$$

Inuti skivan har vi:

$$\vec{M} = -\hat{y}\, z\, J_{fria}(\mu_r - 1) \qquad \vec{M} = \vec{0} \text{ utanför.}$$

Bundna strömmar i skivan: $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}, \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}, \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right)$$

$$= \left(0 - (-J_{fr}(\mu_r - 1)), 0, 0\right) = \underline{\underline{(\mu_r - 1) J_{fria}\, \hat{x} = \vec{J}_b}}$$

Bundna strömmar på ytorna: $z = d/2$: $\hat{n} = \hat{z}$

$z = -d/2$: $\hat{n} = -\hat{z}$

$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$: vid $z = d/2$: $\vec{K}_b = -\underbrace{\left(\frac{d}{2}\right)}_{= z} J_{fria}(\mu_r - 1)\, \hat{y} \times \hat{z}$

$$= -\frac{d}{2} J_{fria}(\mu_r - 1)\, \hat{x} \quad //$$

vid $z = -\frac{d}{2}$: $\vec{K}_b = -\underbrace{\left(-\frac{d}{2}\right)}_{= z} J_{fria}(\mu_r - 1)\, \hat{y} \times (-\hat{z})$

$$= -\frac{d}{2} J_{fria}(\mu_r - 1)\, \hat{x} \quad //$$

4 a) Gauss lag: $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$

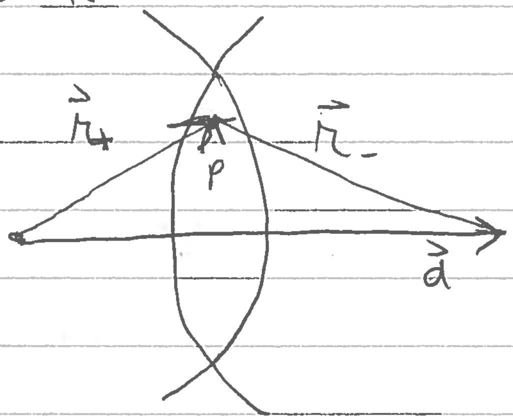
Med en sfär med radie $r < a$, får vi:

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r$$

Q_{in} är: $\rho \cdot \underbrace{\frac{4\pi r^3}{3}}_{\text{Volymen}}$

Så: $E_r = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$, eller $\vec{E} = \frac{\rho r \hat{r}}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0}$

b) Med superpositionsprincipen kan vi addera fältet från kloten.



$\vec{d} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$

I området där kloten overlappar, kan vi använda a) för fältet från båda kloten:

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho \vec{r}_+}{3\varepsilon_0} + \frac{-\rho(\vec{r}_-)}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = \frac{\rho \vec{d}}{3\varepsilon_0}$$

P var godtycklig inom området, så $\vec{E}$ måste vara konstant där!

5 a) När strömmen är noll igen, måste spänningen över bägge kondensatorer vara samma

Laddning på A i början är: $Q_0 = C_A V_0$

Laddning på B i slutet är: Q_B

" " A " " " $Q_A = Q_0 - Q_B$ (laddning är bevarat!)

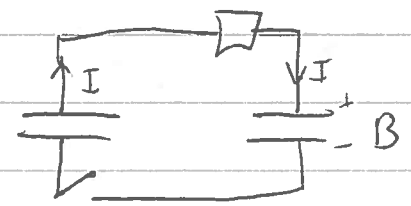
Spänningen i slutet blir: $V_1 = \frac{Q_A}{C_A} = \frac{Q_0 - Q_B}{C_A} = V_0 - \frac{Q_B}{C_A}$ (*)

$$V_1 = \frac{Q_B}{C_B} \quad (**)$$

$$* \quad V_1 = V_0 - \underbrace{\frac{Q_B}{C_A}}_{\uparrow (**)} = V_0 - \frac{V_1 C_B}{C_A} \Rightarrow V_1\left(1 + \frac{C_B}{C_A}\right) = V_0$$

$$\boxed{V_1 = \frac{V_0 C_A}{C_A + C_B}}$$

b)



$I = \frac{dQ}{dt}$, med Q laddning på B. $I = -\frac{dQ_A}{dt} = -\frac{d}{dt}(Q_0 - Q) = \frac{dQ}{dt}$

Spännings ekvationen: $V_A = IR + V_B$

$$\frac{Q_A}{C_A} = IR + \frac{Q}{C_B}$$

Tidsderivatan ger: $-I/C_A = \frac{dI}{dt}R + I/C_B$, eller

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{R}\left(\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B}\right) = -\frac{I}{R}\left(\frac{C_A + C_B}{C_A C_B}\right)$$

På $t=0$, är B oladdat, så, vi har:

$$V_A(0) = I(0)R \Rightarrow I(0) = \frac{V_0}{R}$$ //

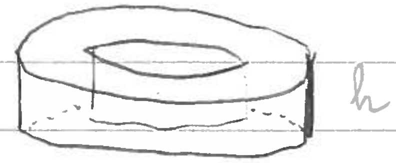
c) Den allmäna lösningen till $\frac{dI}{dt}(t) = -\frac{I(t)}{R}\frac{(C_A+C_B)}{C_AC_B}$ är:

$$I(t) = k\, e^{-\frac{(C_A+C_B)}{C_AC_B}\frac{1}{R}t}$$

$$I(0) = k = \frac{V_0}{R}, \text{ så: } I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{(C_A+C_B)}{C_AC_BR}t}$$

6 a) Energin av det magnetiska fältet ges av:

$$U_{pot} = \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2 \, d\tau$$, med integralen över spolens volym:



I cylinder koordinater har vi

$$U_{pot} = \frac{1}{2\mu_0}\int_{r=a}^{b} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{h} dz \; \underbrace{r}_{\text{från volym elementet}} \; B^2$$, med $B^2 = \frac{\mu_0^2 n_t^2 I^2}{4\pi^2 r^2}$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2 n_t^2 I^2}{4\pi^2} \underbrace{h}_{z \text{ int.}} \underbrace{2\pi}_{\varphi \text{ int.}} \underbrace{\int_{r=a}^{r=b} dr \, \frac{1}{r}}_{\ln b - \ln a} = \frac{\mu_0 n_t^2 I^2 h}{4\pi}\ln(b/a)$$

b) Energin av en induktans $U = \frac{1}{2}LI^2$, så med a)

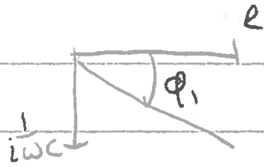
får vi: $$L = \frac{\mu_0 n_t^2 h}{2\pi}\ln(b/a)$$

7a] Vi skriver: $\mathcal{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}$, så att $V(t) = \mathrm{Re}[\mathcal{V}(t)]$.

Impedansen av gren 1: $Z_1 = R + 1/(i\omega C)$

" " " 2: $Z_2 = R + i\omega L$

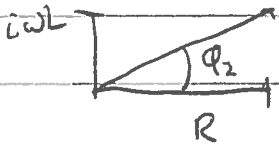
$$Z_1 = \underbrace{\left[R^2 + 1/(\omega C)^2\right]^{1/2}}_{|Z_1|} e^{i\varphi_1}$$, med



$\cos\varphi_1 = +\frac{R}{|Z_1|}$

$\sin\varphi_1 = \frac{-1}{|Z_1|\omega C}$

$$Z_2 = \underbrace{\left[R^2 + (\omega L)^2\right]^{1/2}}_{|Z_2|} e^{i\varphi_2}$$, med



$\cos\varphi_2 = \frac{R}{|Z_2|}$

$\sin\varphi_2 = \frac{\omega L}{|Z_2|}$

Komplexa strömmen i gren 1:

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{V}/Z_1 = \frac{V_0}{|Z_1|} e^{i\omega t - i\varphi_1}$$, så strömmen blir

$$I_1(t) = \frac{V_0}{\left(R^2 + (1/\omega C)^2\right)^{1/2}} \cos(\omega t - \varphi_1) \quad //$$

På samma sätt: $I_2(t) = \frac{V_0}{\left(R^2 + (\omega L)^2\right)^{1/2}} \cos(\omega t - \varphi_2)$ //

b) För att skriva strömmen på formen i uppgiften:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$I_1(t) = \frac{V_0}{|Z_1|}\left(+\frac{R}{|Z_1|}\cos(\omega t) + -\frac{1}{|Z_1|\omega C}\sin(\omega t)\right) \quad //$$

och $I_2(t) = \frac{V_0}{|Z_2|}\left(\frac{R}{|Z_2|}\cos(\omega t) + \frac{\omega L}{|Z_2|}\sin(\omega t)\right)$.

Den totala strömmen: $I(t) = I_1(t) + I_2(t) =$

$$I(t) = V_0\left(\frac{+R}{|Z_1|^2} + \frac{R}{|Z_2|^2}\right)\cos(\omega t)$$

$$+V_0\left(-\frac{1}{|Z_1|^2\omega C} + \frac{\omega L}{|Z_2|^2}\right)\sin(\omega t).$$

Strömmen $I(t)$ är i fas med källan om ~~andra~~ andra termen har amplitud noll, dvs:

$$\frac{1}{|Z_1|^2\omega C} = \frac{\omega L}{|Z_2|^2} \text{, eller } |Z_1|^2\omega^2 LC = |Z_2|^2.$$

som ger $\left(R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right)\omega^2 LC = R^2 + (\omega L)^2$, så

$$R^2(\omega^2 LC - 1) + \frac{L}{C} - \omega^2 L^2 = 0\text{, eller}$$

$$R^2(\omega^2 LC - 1) - \frac{L}{C}(\omega^2 LC - 1) = 0\text{, så}$$

$$\left(R^2 - \frac{L}{C}\right)(\omega^2 LC - 1) = 0$$

Så, strömmen är i fas om $\underline{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$, eller, för vilket ω som helst, om

$$\underline{R = \sqrt{L/C}}$$