FK4010 - Elektromagnetism, Fysikum, Stockholms universitet
Tentamensskrivning, måndag 18 mars 2013, kl 9:00 - 14:00

Läs noggrant genom hela tentan först. Börjar med uppgifterna som du tror du klarar bäst!
Förklara tydligt ditt resonemang och ge rätt enhet när det behövs.
Hela tentan omfattar 7 frågor. Fråga ett ger 4 poäng, de övriga 6 poäng.
Det krävs 50% för att få godkänd.
Tillåtna hjälpmedel: Physics handbook, formellista och en miniräknare (ej grafisk).

Lycka till! Eddy Ardonne

1. Korta frågor.

   a. (1p) Ge Faradays lag i integral form (var noggrant med notationen!). Förklara kort betydelsen av Faradays lag.

   b. (1p) Ge en definition av både självinduktans och ömsesidig induktans.

   c. (1p) Beskriv kortfattat rörelsen av en laddad partikel i ett konstant magnetiskt fält. Anta att partikelns hastighet är vinkelrätt mot det magnetiska fältet i början.

   d. (1p) Beskriv kortfattat en situation som visar att Ampères lag utan Maxwells term inte kan vara korrekt. Du behöver inte härleda formen av Maxwells term.

2. (6p) På ett sfäriskt skal, med inre radie R_a och yttre radie R_b, finns en sfäriskt symmetrisk laddningsfördelning $\rho(r) = kr$, med k en konstant. Använd Gauss lag för att bestämma det elektriska fältet inuti skalet ($r < R_a$), i skalet ($R_a \leq r \leq R_b$) och utanför skalet ($r > R_b$).

3. En lång, rak tråd med radie R_a består av ett linjärt magnetiskt material med relativ permeabilitet μ. I tråden finns en ström med en konstant strömtäthet $J_{\text{fria}} = k$.

   a. (3p) Bestäm $\vec{H}$ utanför ($r > R_a$) och inuti ($r \leq R_a$) tråden.

   b. (1p) Bestäm det magnetiska fältet $\vec{B}$ utanför ($r > R_a$) och inuti ($r \leq R_a$) tråden.

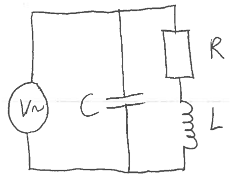
   c. (2p) Bestäm de bundna strömmar inuti tråden och på trådens yta.

4. En lång, tunn, rak spole med längd $l = 20cm$ och radie $a = 1cm$ har $N = 1000$ varv per meter. Rund den här spolen finns en kort spole, med bara 10 varv totalt.

   a. (4p) Beräkna spolarnas ömsesidiga induktansen. Börja med formeln för det magnetiska fältet av en lång spole.

   b. (2p) Strömmen genom den långa spolen ändras med $\frac{dI}{dt} = 2As^{-1}$. Beräkna den inducerade spänningen mellan ändpunkterna av den korta spolen, som inte är ansluten till någonting.

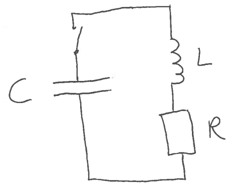
5. En krets består av en motstånd med resistans R i serie med en spole med självinduktans L. Dessutom finns en kondensator med kapacitans C som är kopplat parallellt till motståndet och spolen. Den här kretsen är ansluten till en växelspänningskälla som ger en spänning $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$.



   a. (4p) Bestäm både strömmen genom kondensatorn och strömmen genom spolen.

   b. (2p) Bestäm fasskillnaden mellan strömmen genom kondensatorn och strömmen genom spolen. Antar att $R = 1.0\Omega$, $L = 1.0mH$, $C = 1.0pF$ och $\omega = 1.0 \cdot 10^3 s^{-1}$.

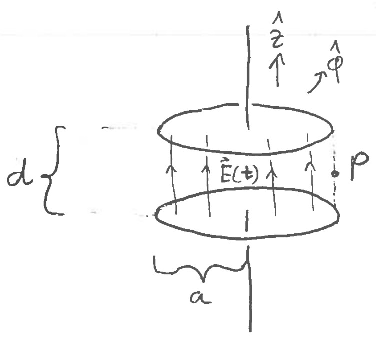
6. En kondensator med kapacitans C är uppladdat till en spänning V_0. Genom att sluta en strömbrytare på tid $t = 0s$ börjar kondensatorn laddas ur genom en spole med med självinduktans L och en motstånd med resistans R.



   a. (3p) Herled differentialekvationen för strömmen i kretsen, och ge randvillkoren. Var noggrant med tecknen!

   b. (3p) Nu tittar vi på situationen utan spolen, så att kondensatorn laddas ur bara genom moståndet. Bestäm det nya randvillkoret, och lös differentialekvationen (med $L = 0$) för strömmen.

7. En plattkondensator har runda plattor med radie a. Avståndet mellan plattorna är d. Kapacitansen ges av $C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d}$. I början är kondensatorn laddat till en spänning V_0. Kondensatorn laddas ur genom en motstånd R. På grund av detta avtar det elektriska fältet i kondensatorn, nämligen $\vec{E}(t) = \frac{V_0}{d} e^{-\frac{t}{RC}} \hat{z}$. Anta att randeffekter kan försummas.



   a. (2p) Visa att det magnetiska fältet i en punkt P, som ligger på avstånd a från axeln och mellan plattorna, ges (i cylinderkoordinater) av

$$\vec{B}(P,t) = -\frac{\mu_0 V_0}{2\pi a R} e^{-\frac{t}{RC}} \hat{\varphi} \ .$$

   b. (2p) Bestäm Poynting vektorn, och förklara kort dess betydelse.

   c. (2p) Bestäm med Poynting vektorn hur mycket energi förs bort från området mellan plattorna under urladdningen av kondensatorn.

Svar:

1. a. Faradays lag är $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_{B,C}}{dt}$. Den innebär att ändringar i det magnetiska flödet skapar ett elektriskt fält som har slutna fält linjer. Nämligen, integralen av det elektriska fältet längs en godtycklig sluten kurva C (den elektromotoriska spänningen om det handlar om en krets), ges av minus ändringen av det elektriska flödet genom den här kurvan. Det inducerade elektriska fältet motverkar ändringen i det magnetiska flödet.

   b. Om vi har en ström genom en krets, då skapar den ett magnetiskt fält, vars storlek är proportionellt mot strömmen. Flödet Φ genom kretsen är också proportionellt mot strömmen. Självinduktansen L definieras som $L = \frac{d\Phi}{dI}$, eller $L = \frac{\Phi}{I}$.
   Om en ström I_1 genom en krets C_1 ger ett flöde Φ_2 genom en krets C_2, då är Φ_2 proportionellt mot I_1. Vi kan skriva $\Phi_2 = M_{21}I_1$, och tvärtom har vi $\Phi_1 = M_{12}I_2$. Det gäller att $M_{21} = M_{12} = M$, där M är den ömsesidiga induktansen.

   c. Partikelns hastighet är vinkelrätt mot $\vec{B}$-fältet, så det finns en Lorentzkraft $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$. Kraften är vinkelrätt mot hastigheten, så $v = |\vec{v}|$ ändras inte, men riktningen av $\vec{v}$ ändras. Lorentzkraften stannar vinkelrätt mot hastigheten och fungerar som centripetalkraften. Partikelns bana är en cirkel, med radie $r = \frac{mv}{qB}$, där m q är partikelns massa och laddning.

   d. Ampères lag utan Maxwells term är $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C$.
   Om vi tittar på en kondensator som laddas upp med en ström I, och tar kurvan C så att den går rund tråden till kondensatorn, då beror den innesluten ström I_C på vilken yta vi väljer för att beräkna strömmen genom kurvan. Vi kan välja en skiva, så att den innesluten ström är I. Vi kan också välja en påse rund en av kondensatorns plattor, och då är den innesluten ström $I_C = 0$. Så , det måste finnas en extra term i Ampères lag för att den ska gäller allmänt. Nämligen $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_{E,C}}{dt}$.

2. Vi använder Gauss lag $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{inuti}}}{\epsilon_0}$.

   På grund av symmetrien hav vi att $\vec{E} \parallel \hat{r}$, och $\vec{E}$ beror bara på $r = |\vec{r}|$. Som Gauss yta väljer vi en sfär med radie r, och vi har $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_r(4\pi r^2)$.

   Om $r > R_b$, då har vi att $Q_{\text{inuti}} = \int_V \rho d\tau = 4\pi k\int_{R_a}^{R_b} r^2 r dr = \pi k(R_b^4 - R_a^4)$, och vi får $E_r = \frac{k}{4\epsilon_0}\left(\frac{R_b^4 - R_a^4}{r^2}\right)$.
   Om $r < R_a$, då har vi att $Q_{\text{inuti}} = 0$, så vi har $E_r = 0$. Om $R_a \le r \le R_b$, då har vi $Q_{\text{inuti}} = 4\pi k\int_{R_a}^{r} r'^2 r' dr' = \pi k(r^4 - R_a^4)$, som ger $E_r = \frac{k}{4\epsilon_0}\left(\frac{r^4 - R_a^4}{r^2}\right)$.
   Svaret blir alltså

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{k}{4\epsilon_0}\left(\frac{R_b^4 - R_a^4}{r^2}\right)\hat{r} & \text{om } r \ge R_b\ , \\ \frac{k}{4\epsilon_0}\left(\frac{r^4 - R_a^4}{r^2}\right)\hat{r} & \text{om } R_a \le r \le R_b\ , \\ \vec{0} & \text{om } 0 \le r \le R_a \end{cases}$$

3. Vi har cylindersymmetri, så $\vec{H}$, $\vec{B}$ och $\vec{M}$ beror bara på r, och är parallella med $\hat{\varphi}$. Vi använder Ampères lag i formen $\oint_C \vec{H} \cdot \vec{dl} = I_{\text{fria,C}}$.

   a. Vi tar en Ampère kurva C som är en cirkel med radie r, som ger oss $\oint_C \vec{H} \cdot \vec{dl} = 2\pi r H_\varphi$. Om $r > a$ har vi $I_{\text{fria,C}} = \pi a^2 J_{\text{fria}}$, så att $2\pi r H_\varphi = \pi a^2 k$, eller $H_\varphi = \frac{a^2 k}{2r}$. Om $r < a$ får vi $I_{\text{fria,C}} = \pi r^2 k$, som ger $H_\varphi = \frac{rk}{2}$. Svaret är

$$\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{a^2 k}{2r}\hat{\varphi} & \text{om } r \geq a \ , \\ \frac{rk}{2}\hat{\varphi} & \text{om } r \leq a . \end{cases}$$

   b. Materialet är linjärt, så $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$. Utanför tråden har vi at $\mu = 1$, medan $\mu \neq 1$ inuti tråden. Det leder till svaret:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 a^2 k}{2r}\hat{\varphi} & \text{om } r \geq a \ , \\ \frac{\mu_0 \mu r k}{2}\hat{\varphi} & \text{om } r \leq a . \end{cases}$$

   c. För att bestämma de bundna strömmer behöver vi $\vec{M}$, som ges av $\vec{M} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{H}$, eller $\vec{M} = (\mu - 1)\vec{H}$, eftersom $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$. Så utanför tråden har vi $\vec{M} = \vec{0}$ eftersom $\mu = 1$. För $r \leq a$ har vi $\vec{M} = (\mu - 1)\frac{rk}{2}\hat{\varphi}$.
   De bundna strömmer (per längd) på utan ges av $\vec{i}_s = \vec{M} \times \hat{n}$, med $\hat{n} = \hat{r}$, så vi har (med $r = a$) $\vec{i}_s = (\mu - 1)\frac{ak}{2}\hat{\varphi} \times \hat{r} = -(\mu - 1)\frac{ak}{2}\hat{z}$, eftersom $\hat{\varphi} \times \hat{r} = -\hat{z}$.
   De bundna strömmer (per area) inuti tråden ges av $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$. Ampères lag i lokal form ger oss $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{fria}}$, så vi får att $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = (\mu - 1)\vec{\nabla} \times \vec{H} = (\mu - 1)\vec{J}_{\text{fria}} = (\mu - 1)k\hat{z}$.
   Svaret är:

$$\vec{i}_s = -(\mu - 1)\frac{ak}{2}\hat{z} \qquad\qquad \vec{J}_b = (\mu - 1)k\hat{z} \ .$$

   OBS: den totala bundna strömmen på utan är $(\mu - 1)\frac{ak}{2}(2\pi a) = (\mu - 1)k\pi a^2$, i $-\hat{z}$ riktningen. Den totala bundna strömmen inuti är $(\mu - 1)k(\pi a^2) = (\mu - 1)k\pi a^2$, i $+\hat{z}$ riktningen, så de är lika stora.

4. a. Det magnetiska fältet av den långa spolen (1) ges av $B_1 = \mu_0 N_1 I_1$. Flödet genom den korta spolen (2) är $\Phi_2 = A_1 B_1 n_2$, med A_1 area av spole (1) och n_2 total antalet varv av spole (2). Så vi har $\Phi_2 = A_1 B_1 n_2 = \mu_0 \pi a^2 N_1 n_2 I_1 = M I_1$, med M den ömsesidiga induktansen. Svaret är $M = \mu_0 \pi a^2 N_1 n_2 = 3.9 \cdot 10^{-6} H$.

   b. Den inducerade spänningen i den korta spolen ges av $\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$, så spänningsskillnaden blir $|\mathcal{E}_{\text{ind}}| = (3.9 \cdot 10^{-6})\, 2 = 7.9 \cdot 10^{-6}$ Volt.

5. a. Vi använder den komplexa metoden, och skriver $\mathcal{V} = V_0 e^{i\omega t}$, så att $\mathrm{Re}(\mathcal{V}) = V(t) = V_0 \cos(\omega)t$. Den komplexa impedansen av kondensatorn är $Z_C = \frac{-i}{\omega C} = \frac{1}{i\omega C}$. Den komplexa impedansen av grenen med spolen och motståndet är $Z_{L,R} = R + i\omega L = (R^2 + \omega^2 L^2)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}$, med $\varphi = \arctan(\omega L/R)$.
Strömmen genom kondensatorn bestämms av $\mathcal{I}_C = \frac{\mathcal{V}}{Z_C} = i\omega C V_0 e^{i\omega t} = \omega C V_0 e^{i(\omega t + \pi/2)}$, så den reella strömmen genom kondensatorn blir
$I_C = \omega C V_0 \cos(\omega t + \pi/2)$.
Strömmen genom grenen med spolen och motståndet är $\mathcal{I}_{L,R} = V_0 e^{i\omega t}(R^2 + \omega^2 L^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\varphi} = V_0 (R^2 + \omega^2 L^2)^{-\frac{1}{2}} e^{i(\omega t - \varphi)}$, så att den reella strömmen ges av
$I_{L,R} = \frac{V_0}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{\frac{1}{2}}} \cos(\omega t - \varphi)$, med $\varphi = \arctan(\omega L/R)$.

b. Strömmen genom kondensatorn ligger före strömmen genom grenen med spolen och motståndet. Fasskillnaden ges av $\Delta\varphi = \pi/2 - (-\varphi) = \pi/2 + \arctan(\omega L/R)$, eller om vi sätter in värden får vi att $\Delta\varphi = \pi/2 + \arctan(1) = 3\pi/4$ som motsvarar 135°.

6. a. Kondensatorn laddas ur, så jag väljer strömmen bort från kondensatorns positiva plattan som positiv. Det innebär att $I = -\frac{dQ}{dt}$, med Q kondensatorns laddning. Dessutom ökar spänningen över kondensatorn i den positiva strömriktningen, när vi gör en potentialvandring för att bestämma differentialekvationen (i.e., när vi använder Kirchhoffs lag).
Så, vi har följande resultat från spänningsvandringen i kretsen: $V_C + V_{\mathrm{ind}} = V_R$, med V_C spänningen över kondensatorn, V_{ind} den inducerade spänningen i spolen (som motverkar strömmen!), och V_R spänningen över motståndet. Det innebär att

$$\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = IR \ ,$$

eller, om vi tar tidsderivatan och använder att $I = -\frac{dQ}{dt}$, får vi ekvationen för strömmen

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0 \ .$$

Randvilkoren följer från att inser att strömmen på tid $t = 0$ måste vara noll. Annars skulle den inducerade spänningen $V_{\mathrm{ind}} = -L\frac{dI}{dt}$ blir gränslös stor. Så vi har $I(0) = 0$. Med detta följer att vi har relationen $V_C + V_{\mathrm{ind}} = 0$ på $t = 0$, eller $V_0 - L\frac{dI}{dt}(0) = 0$, så att $\frac{dI}{dt}(0) = \frac{V_0}{L}$.
Svaret är

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0 \qquad I(0) = 0 \qquad \frac{dI}{dt}(0) = \frac{V_0}{L}$$

b. Nu betraktar vi situationen att $L = 0$. Så vi har inte argumentet att $I(0) = 0$ längre. Nu har vi att på tid $t = 0$ att $V_C = I(0)R$, eller $I(0) = \frac{V_0}{R}$. Differentialekvationen blir $R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0$, eller

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC}I \ .$$

Den allmänna lösningen till denna ekvation är $I(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$, och genom att använda randvilkoret får vi att konstanten A blir $A = \frac{V_0}{R}$. Så svaret är

$$I(t) = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \ .$$

7. a. Vi använder Ampères lag med Maxwells term, nämligen $\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_C + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_{E,C}}{dt}$, med $\Phi_{E,C}$ flödet av det elektriska fältet genom kurvan C. Randeffekter får försummas, och på grund av symmetrien har vi att det magnetiska fältet $\vec{B}$ som finns på grund av ändringen i det elektriska fältet är parallellt med $\hat{\varphi}$, är oberoende av φ, och oberoende av z, så länge vi är mellan plattorna.

Som Ampère kurva C tar vi en cirkel med radie a genom punkt P. Strömmen genom den här kurvan är $I_C = 0$ (vi använder skivan som har den här cirkel som rand för att bestämma strömmen), så vi får bara ett bidrag från Maxwells term.

Det elektriska fältet i kondensatorn beror inte på positionen, och är vinkelrätt mot ytan, så flödet av det elektriska fältet genom kurvan ges av produkten av E och arean. Så vi har $\Phi_{E,C} = \pi a^2 E = \pi a^2 \frac{V_0}{d} e^{-\frac{t}{RC}}$. Ampères lag ger nu att (tänk på tidsderivatan) $2\pi a B_\varphi = \mu_0 \epsilon_0 \pi a^2 \frac{V_0}{d}(-\frac{1}{RC}) e^{-\frac{t}{RC}} = -\mu_0 \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$, där vi har använd att $C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d}$. Så vi får att

$$\vec{B}(P,t) = -\frac{\mu_0 V_0}{2\pi a R} e^{-\frac{t}{RC}} \hat{\varphi} \ ,$$

som skulle visas.

b. Poynting vektorn är $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$. I cylinderkoordinater har vi att $\hat{z} \times \hat{\varphi} = -\hat{r}$, så Poynting vektorn i punkt P blir $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{-\mu_0 V_0}{2\pi a R} \frac{V_0}{d} \right) e^{-\frac{2t}{RC}} (-\hat{r}) = \frac{V_0^2}{2\pi a d R} e^{-\frac{2t}{RC}} \hat{r}$.

Poynting vektorn ger energi flödet genom en yta, per ytenhet, per tidsenhet, eller hur mycket energi förs bort från ett område genom en yta, per area per tid.

c. Vi vill veta hur mycket energi förs bort från kondensatorn under urladdningen. Energien är lagrat i det elektriska fältet mellan kondensatorns plattorna. Det här området begränsas av en cylinder med radie a, och höjd d. På den här ytan är $\vec{S}$ konstant, och $\vec{S}$ är vinkelrätt mot ytan, och pekar utåt (energien förs bort!). Så energien som förs bort från kondensator per tidsenhet ges av $2\pi a d$ (arean av cylindern) gånger Poynting vektorn, eller $P(t) = (2\pi a d) \frac{V_0^2}{2\pi a d R} e^{-\frac{2t}{RC}} = \frac{V_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}}$. Den totala energien som förs bort är alltså $U = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt = -\frac{V_0^2}{R} \frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}} |_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{2} C V_0^2$. Det här är precis energien som var lagrat i kondensatorn i början!