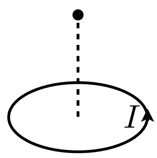
FK4010 - Elektromagnetism, Fysikum, Stockholms universitet
Dugga 2, Fredag, 20 februari 2015, kl 10:15 - 12:15

Förklara tydligt ditt resonemang och ge rätt enhet när det behövs.
Erhållna poäng räknas om till tentamenspoäng (bonus) vid tentamenstillfällena under 2015.
Tillåtna hjälpmedel: Physics handbook eller motsvarande, läroboken eller dina föreläsnings anteckningarna och en kalkylator.

Lycka till! Eddy

1. (1 p) Biot-Savarts lag

   Genom en cirkulär strömslinga går en ström I. Använd Biot-Savarts lag för att bestämma *riktningen* av det magnetiska fältet i en punkt mitt över slingan. Gör en tydlig skiss för att förklara ditt resonemang!

2. Magnetiskt dipolmoment av en spole.

   a. (0.5 p) En spole med 20 varv är kvadratiskt, med längden av sidorna 2 cm. Genom spolen går en ström $I = 2$ A. Bestäm det magnetiska dipolmomentet av spolen.

   b. (0.5 p) Spolen befinner sig i ett *externt* konstant magnetiskt fält $B = 0.3$ T, som är riktat parallellt med det magnetiska fältet av spolen. Hur mycket arbete krävs det för att rotera spolen ett halvt varv rund spolens axel?

3. (1 p) En växelspänning med period T kan beskrivas på följande sätt. I en period avtar spänningen linjärt från V_0 till $-V_0$. Så vi kan skriva $V(t) = V_0(1-2t/T)$ för $0 \leq t < T$ och vi har $V(t+T) = V(t)$. Vad är effektiv-värdet (RMS-värdet) för den här växelspänningen?

4. (1 p) En strömslinga ligger i xy-planet, rund origo (till exempel slingan från uppgift 1). Strömmen i slingan är I. Vad är integralen av $\vec{B}$ längs z-axeln, dvs. $\int_{-\infty}^{\infty} B_z(0,0,z)dz$?

5. (1 p) Vi har en mycket lång, rak spole med längd l_1, radie r_1, och N_1 varv per längd. Rund den här spolen finns en kort spole med längd $l_2 \ll l_1$, radie $r_2 > r_1$, och n_t varv totalt. Bestäm den ömsesidiga induktansen.

6. (1 p) En ideal spole (i.e., $R = 0\ \Omega$) med självinduktans $L = 0.20$ mH och en kondensator med kapacitans $C = 1.0\mu$F är kopplade i serie till en källa som ger en spänning $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, med $V_0 = 20V$, och $\omega = 1.0 \cdot 10^5 s^{-1}$. Bestäm strömmen genom kretsen, båda amplituden och fasen. Ligger strömmen före eller efter spänningen?

7. I ett område kring origo finns ett elektriskt fält som ges, i kartesiska koordinater, av $\vec{E} = k(-x^2 t, 2xyt, 0)$, med k en konstant.

   a. (0.5 p) Finns det laddning i området?

   b. (0.5 p) Bestäm det magnetiska fältet i området. Anta att $\vec{B} = \vec{0}$ för $t = 0$.

8. En metallisk ring har en radie a, och en resistans R. Det finns ett homogent magnetiskt fält vinkelrätt mot ringen, som är tidsberoende, nämligen $B(t) = -\alpha t$, med α en konstant.

   a. (0.5 p) Åt vilket håll går den inducerade strömmen i ringen (gör en tydlig skiss)?

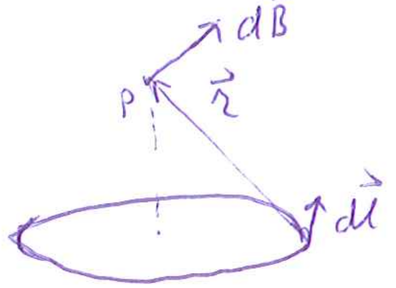
   b. (0.5 p) Hur stor är den här strömmen?

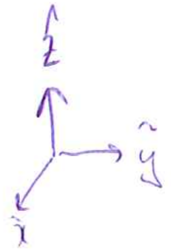
1] Biot-Savarts lag: $d\vec{B}(P)$ p.g.o. en bit $\vec{dl}$ av ~~en~~ en ström slinga:

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\vec{dl}\times\hat{r}}{r^2}$$

, med $\vec{r}$ vektor från $\vec{dl}$ till P.

För en cirkel:





Om vi integrera längs cirkeln, då beskriver $d\vec{B}(P)$ en kon:

Så, komponenterna av $d\vec{B}$ i $\hat{x}$ och $\hat{y}$ riktningen tar ut varandra, och

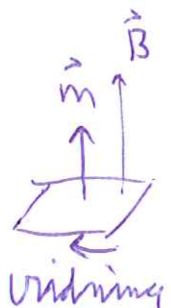
$\vec{B}$ är i $\hat{z}$ riktningen!

2] a. Det magnetiska dipol moment av en slinga ges av: $\vec{m} = I\cdot\vec{S}$, med S area av slingan.

Vi har 20 varv, med area $(0.02\ \text{m})^2$, så

$$m = 2\cdot 20\cdot \cancel{d}(2\cdot 10^{-2})^2 = 1.6\cdot 10^{-2}\ \text{A m}^2$$

b) Energi i ett externt $\vec{B}$-fält: $U_p = -\vec{m}\cdot\vec{B}$

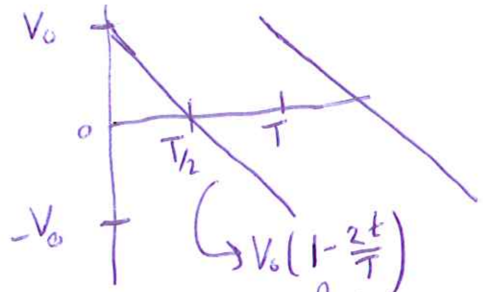


Om vi vrider spolen runt axeln, då är ~~stammen~~ $\vec{m}\cdot\vec{B}$ konstant. Arbete som krävs: $W = 0\,\text{J}$!

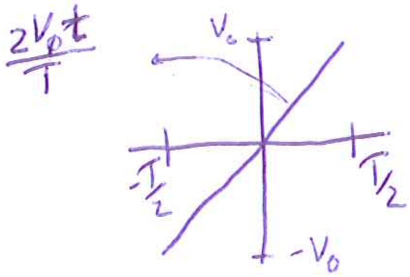
3) RMS-värdet ges av:

$$V_{RMS} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} \quad \text{, med } \langle V^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V^2(t)\,dt.$$

Spänningen ges av:



Vi kan förskjuta ~~ute~~ spänningen en halv period, och sen $V \to -V$:

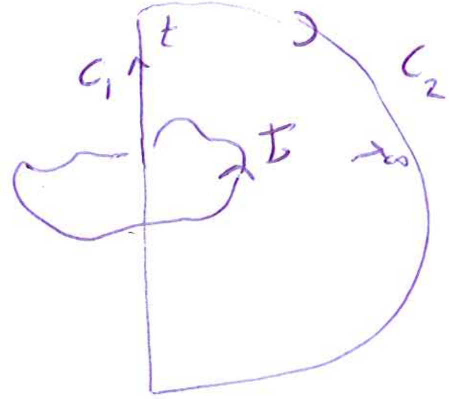


$$\text{Så: } \langle V^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{2V_0 t}{T}\right)^2 dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \frac{4V_0^2 t^2}{T^2}\,dt$$

$$= \frac{8V_0^2}{T^3}\int_0^{T/2} t^2\,dt = \frac{8V_0^2}{T^3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{T}{2}\right)^3 = \frac{V_0^2}{3}$$

Så, vi har $\underline{V_{RMS} = \frac{V_0}{\sqrt{3}}}$ (Obs: $\frac{V_0^2}{T}\int_0^T \left(1-\frac{2t}{T}\right)^2 dt = \frac{V_0^2}{3}$ också)

4) Vi har en strömslinga rund origo:

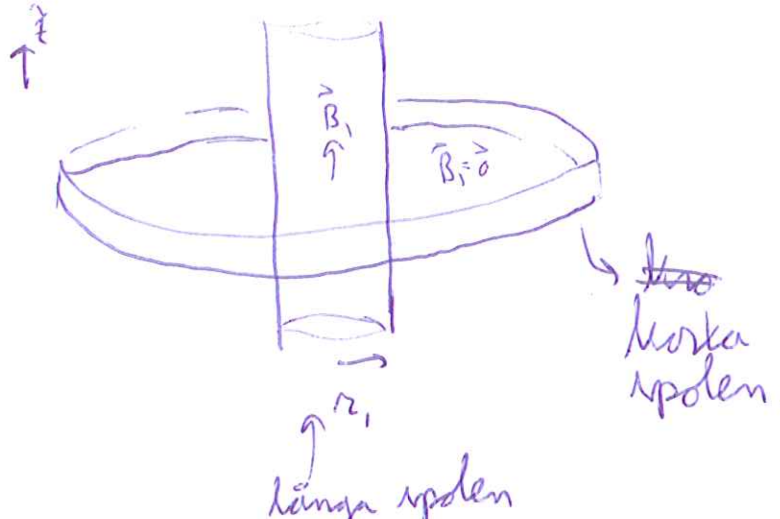


I oändligheten avtar $\vec{B}$ som $1/r^2$, så vi kan skriva $\int_{-\infty}^{\infty} B_z(0,0,z)\,dz$

$$= \int_{C_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_{C_1+C_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} \underset{\text{Ampère}}{=} \mu_0 I$$

Så vi har: $\int_{-\infty}^{\infty} B_z(0,0,z)\,dz = \mu_0 I$

5]



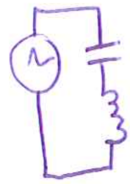
$\vec{B}$-fältet från den korta spolen är inte lätt att få, så vi ta $\vec{B}$-fältet från den långa spolen, $\vec{B}_1$ och tittar hur mycket flöde Φ_2 det ger genom den korta:

$\vec{B}_1 = \mu_0 N_1 I_1 \hat{z}$ (inuti spolen). Flödet genom ett varv av den korta spolen: $\mu_0 N_1 I_1 \pi r_1^2$

Totala flödet genom korta spolen: $\Phi_2 = \mu_0 N_1 \pi r_1^2 \overset{\#\text{ varv i korta spolen}}{n_t} I_1 = M I_1$

Så vi har: $M = \mu_0 \pi r_1^2 N_1 n_t$

6] Kretsen:



$C = 1{,}0\cdot10^{-6}$ F.

$L = 0{,}20$ mH

$V_0 = 20\cos(10^5 t)$

$Z_{tot} = i\omega L - i/\omega C$
$= i(10^5\cdot2\cdot10^{-4} - 10^{-5}\cdot10^6)$
$= i(20-10) = 10i = 10e^{i\pi/2}$

$V(t) = 20e^{i\omega t} \Rightarrow \mathcal{I}(t) = \dfrac{20e^{i\omega t}}{10e^{i\pi/2}}$, så strömmen ges av:

$I(t) = \mathrm{Re}[\mathcal{I}(t)] = \cancel{\tfrac{20}{10}}\,2\,\mathrm{Re}[e^{i(\omega t - \pi/2)}] = \underset{\text{Amplituden}}{2}\cos(\underbrace{10^5 t - \pi/2}_{\text{fasen}})$ A.

Strömmen ligger efter spänningen

7| a Laddningstäthet ges av:

$$\rho/\varepsilon_0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}. \qquad \vec{E} = k(-x^2 t, 2xyt, 0)$$

$$\text{Så: } \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = k(\underbrace{-2xt}_{\frac{\partial}{\partial x}E_x} + 2xt + 0) = 0$$

Det finns ingen laddning!

b Faradays lag: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial t}, \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

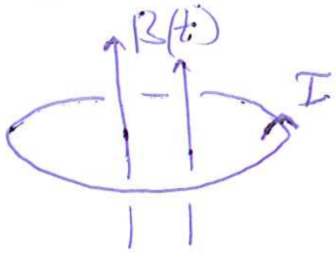
$$= k(0, 0, 2yt)$$

Så vi har: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -k(0,0,2yt)$. Med $\vec{B}(0) = \vec{0}$ får vi

$\vec{B}(t) = -k(0,0,yt^2)$

8| a) $\vec{B}$-fältet genom ringen minskas ($\alpha > 0$)

$$\frac{dB}{dt} = -\alpha, \quad \text{så } \frac{d\Phi}{dt} < 0.$$



Så, Lenz lag säger att ringen har en inducerat ström, som skapar ett $\vec{B}$-fält parallellt med det externa fältet. Så strömmen är moturs. (med högerhandsregeln).

b) Den inducerade spänningen: $\mathcal{E}_{ind} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$

$$\text{Så: } I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{1}{R}\underbrace{\pi a^2}_{\text{area av ringen}}\left|\frac{\partial B}{\partial t}\right| = \frac{\pi a^2}{R}\alpha.$$