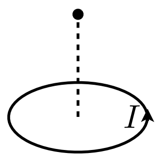
FK4010 - Elektromagnetism, Fysikum, Stockholms universitet
Dugga 2, Fredag, 22 februari 2013, kl 10:15 - 12:00

Förkalra tydligt ditt resonemang och ge rätt enhet när det behövs.
Erhållna poäng räknas om till tentamenspoäng (bonus) vid tentamenstillfällena under 2013.
Tillåtna hjälpmedel: Physics handbook eller motsvarande, läroboken och en kalkylator.

Lycka till! Eddy

1. (1 p) Biot-Savarts lag

   Genom en cirkulär strömslinga går en ström I. Använd Biot-Savarts lag för att bestämma *riktningen* av det magnetiska fältet i en punkt mitt över slingan. Gör en tydlig skiss för att förklara ditt resonemang!

2. Induktans.

   a. (0.5 p) Bestäm självinduktansen av en mycket lång, rak spole med längd l, radie R och med N varv per längd. Du behöver inte härleda formeln för det magnetiska fältet av spolen.

   b. (0.5 p) Visa att den ömsesidiga induktansen M av två spolar (med antalet varv per längd N_1 och N_2) som är vecklade på varandra ges av $M = \sqrt{L_1 L_2}$, om allt flöde av den första spolen går genom den andra (och tvärtom).

3. Magnetiskt dipolmoment av en spole.

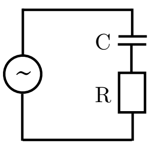
   a. (0.5 p) Genom en cirkulär spole med 20 varv och radie $R = 10$ cm går en ström $I = 2$ A. Bestäm det magnetiska dipolmomentet av spolen.

   b. (0.5 p) Spolen befinner sig i ett *externt* konstant magnetiskt fält $B = 1.0$ T, som är riktat parallellt med det magnetiska fältet av spolen. Hur mycket arbete krävs det att vrida om spolen, så att fälten är åt motsatta håll?

4. (1 p) Vi har ett batteri med en inre resistans $R_i = 2.0\Omega$ och elektromotorisk spänning $\mathcal{E} = 10$V. Två motstånd med resistanser $R_1 = 10\Omega$ och $R_2 = 40\Omega$ är kopplade parallellt till batteriet. Rita kretsen, och bestäm strömmen genom R_1 och R_2.

5. Växelspänning

   (1 p) En motstånd $R = 1.0k\Omega$ och en kondensator $C = 1.0\mu$F är kopplade i serie till en källa som ger en spänning $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, med $V_0 = 200V$, och $\omega = 1.0 \cdot 10^3 s^{-1}$. Bestäm strömmen genom kretsen, båda amplituden och fasen. Ligger strömmen före eller efter spänningen?

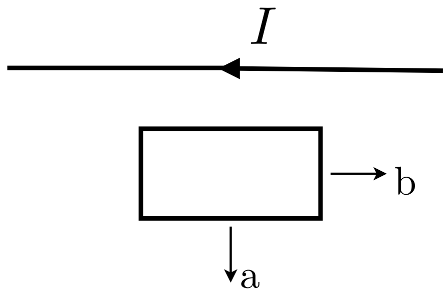
   

Var god vänd!

6. En tråd för en ström åt vänster, se figuren. Vid tråden finns en slinga av ett ledande material.

    a. (0.5 p) Finns det en inducerat ström i slingan om den dras bort från tråden? Åt vilket håll går strömmen, om den inte är noll?

    b. (0.5 p) Nu drar vi slingan parallellt längs tråden. Finns det en inducerat ström i slingan då? Åt vilket håll går strömmen, om den inte är noll?



Förklara tydligt, och gör en skiss om det behövs!

7. (1 p) En lång rak spole har en längd $l = 10$ cm, och $N = 1000$ varv per längd. Inuti spolen finns ett (linjärt) magnetiskt material med en relativ permeabilitet $\mu = 21$. Strömmen genom spolen är $I_{fria} = 5.0$ A. Vad är den totala bundna strömmen som finns på utan av det magnetiska materialet?

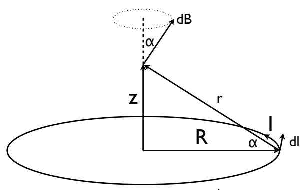
8. Genom en spole med radie $R_{\text{spole}} = 1.0$ cm går en ström som ökar med tiden, så att det magnetiska fältet i spolen ökas med $1.0 \cdot 10^{-3}$ T/s. Rund spolen finns en metallisk, cirkulär slinga med radie $R_{\text{slinga}} = 10$ cm. Det magnetiska fältet är vinkelrätt mot slingans yta.

    a. (0.5 p) Åt vilket håll går den inducerade strömmen i slingan?

    b. (0.5 p) Bestäm det inducerade elektriska fältet vid slingan, p.g.a. ändringen i det magnetiska fältet i spolen.

Svar:

1. Det magnetiska fältet ges med hjälp av Biot-Savarts lag: en infinitesimal bit av strömmen ger upphov till $d\vec{B}$ i en punkt P äntligt $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$, med $d\vec{l}$ längs strömmen I, och $\vec{r}$ vektorn från $d\vec{l}$ till punkten P.



    I figuren pekar $d\vec{l}$ in i pappret, och med högerhand regeln får vi riktningen av $d\vec{B}$ p.g.a. biten $d\vec{l}$ av slingan. Om vi nu integrera längs slingan, för att få det totala magnetiska fältet i P mitt över slingan, äntligt $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$, då ser vi att komponenterna som är parallella med slingan tar ut varandra, och att vi bara har en komponent i $\hat{z}$ riktningen, upåt i det här fallet. Svaret är alltså att det magnetiska fältet pekar rakt upåt, bort från slingan.

2. Storleken av det magnetiska fältet i en lång, rak spole ges av $B = \mu_0 NI$, med N antalet varv per längd, och I strömmen genom spolen.

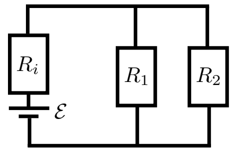
    a. Flödet genom ett varv ges av $B\pi R^2$, och det finns Nl varv, så det totala flödet genom spolen blir $\Phi = BN\pi R^2 l = \mu_0 IN^2 \pi R^2 l$. Självinduktansen ges av $\Phi = LI$, så vi får att $L = \mu_0 N^2 \pi R^2 l$.

    b. Det magnetiska fältet av den första spolen ges av $B_1 = \mu_0 N_1 I$, så flödet genom den andra spolen blir $\Phi_2 = B_1 N_2 \pi R^2 l = \mu_0 I N_1 N_2 \pi R^2 l$. Den ömsesidiga induktansen ges av $\Phi_2 = MI_1$, eller $M = \mu_0 N_1 N_2 \pi R^2 l$, och vi får att $M^2 = L_1 L_2$, eller $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

3. a. Dipolmomentet m av en slinga ges av $m = IA$, med A arean, och I strömmen. Riktningen ges av högerhandregeln. Det totala dipolmomentet blir $m = n_{\text{varv}} IA = 20 \cdot 2 \cdot \pi (0.10)^2 = 0.40\pi = 1.26 Am^2$.

b. Den potentiella energien av en dipol i ett konstant magnetiskt fält ges av $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$. I början är $\vec{m}$ och $\vec{B}$ parallella, och i slutet anti-parallella. Så det krävs positivt arbete att vrida om spolen, nämligen $W = 2mB$, eller $W = 2.51$J.

4. Den totala resistansen av kretsen som är kopplat till batteriet ges av $\frac{1}{R_{\text{krets}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 1/10 + 1/40 = 5/40$, eller $R_{\text{krets}} = 8$. Tillsammans med den inre resistansen i batteriet får vi $R_{\text{tot}} = 10\Omega$. Den totala strömmen blir $I = \mathcal{E}/R_{\text{tot}} = 10/10 = 1.0$A.



Polspänningen av batteriet blir $V_p = \mathcal{E} - IR_i = 10 - 2 = 8$V. Så strömmen genom resistansen med $R_1 = 10\Omega$ är $I = V_p/R_1 = 8/10 = 0.80$A, och strömmen genom resistansen med $R_2 = 40\Omega$ är $I = V_p/R_2 = 8/40 = 0.20$A. Som förväntat är summan 1.0A.

5. Den komplexa impedansen av kretsen ges av $Z_t = Z_R + Z_C = R - \frac{i}{\omega C}$, som blir $Z_t = 1.0 \cdot 10^3(1-i)$, eller i termer av $Z = |Z_t|e^{i\phi}$ har vi $|Z_t| = 1.41 \cdot 10^3\Omega$ och $\phi = -\pi/4 = -45°$. Amplituden av strömmen blir $|I_0| = V_0/|Z_t| = 200/(1.41 \cdot 10^3) = 0.14$A.
Den komplexa strömmen ges av $\mathcal{I} = I_0 e^{-i\phi} = 0.14e^{i\pi/4}$, så att strömmen ligger en fas $\pi/4 = 45°$ före spänningen. Eller, om vi skriver strömmen explicit, får vi $I = I_0 \cos(\omega t + \pi/4)$.

6. Det magnetiska fältet p.g.a. tråden är i ϕ riktningen, så att det pekar ut ur papperet i figuren. Det avtar som $1/r$, med r avståndet till tråden.

   a. Eftersom B-fältet avtar nar vi drar slingan bort från tråden, blir flödet genom slingan mindre. Lenz lag säger nu att det uppstår en ström, som motverkar minskningen av flödet. Så, strömmen i slingan är så att det ger upphov till ett B-fält som också pekar ut pappret. Det följer att strömmen i slingan är moturs.

   b. Nu att slingan dras längs tråden, har vi ingen ändring i det magenetiska flödet genom slingan. Det innebär att vi inte få någon ström den här gången.

7. Vi antar att spolen är lång, så att det magnetiska fältet är konstant inuti, och pekar längs axeln. Fältet $\vec{H}$ bestämms av de fria strömmen, och $\vec{B}$ av alla strömmar, nämligen $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{fria,C}}$ och $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_{\text{fria,C}} + I_{m,C})$, med $I_{m,C}$ strömmen genom kurvan C p.g.a. magnetiseringen.
Nu tar vi en kurva C genom spolen, och tillbaka utanför spolen, där $B = H = 0$. Då har vi $Hl = NlI_{\text{fria}}$, och $Bl = \mu_0(NlI_{fria} + I_m)$. Eftersom materialet är linjärt har vi $B = \mu_0\mu H$, som ger sambandet $\mu_0(NlI_{fria} + I_m) = \mu_0\mu NlI_{\text{fria}}$, eller $I_m = (\mu - 1)NlI_{\text{fria}} = 20 \cdot 1000 \cdot 0.10 \cdot 5 = 10kA$.

8. Det magnetiska fältet ökas med $1.0 \cdot 10^{-3}T/s$, i en area $A = \pi R^2_{\text{spole}} = \pi 10^{-4}m^2$, så flödet genom slingan ökas, $\frac{d\Phi}{dt} = \pi \cdot 10^{-7}Tm^2/s$.

   a. Eftersom flödet genom slingan blir större, finns det en ström i slingan som motverkar den här ökningen. Så strömmen i slingan är precis åt motsatt håll än strömmen i spolen.

   b. För att bestämma det elektriska fältet använder vi Faradays lag, $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$. På grund av symmetrin vet vi att det elektriska fältet pekar i $\hat{\phi}$ riktningen, och beror bara på avståndet till spolen (jämför med B-fältet av en lång rak tråd).
   Vi tar kurvan C precis längs slingan, och antar att B-fältet pekar i $+\hat{z}$ riktningen. Då har vi att $E_\phi 2\pi R_{\text{slingan}} = -\pi \cdot 10^{-7}$, eller $E_\phi = -0.50 \cdot 10^{-6}V/m$.