FK4010 - Elektromagnetism, Fysikum, Stockholms universitet
Dugga 1, Måndag, 04 februari 2013, kl 10:15 - 12:00

Beräkningar och resonemang får vara kortfattade, men måste tillåta en bedömning. Ge rätt enhet när det behövs.
Erhållna poäng räknas om till tentamenspoäng (bonus) vid tentamenstillfällena under 2013.
Tillåtna hjälpmedel: Physics handbook eller motsvarande, läroboken och en kalkylator.

Lycka till! Eddy

1. Fyra likadana punktladdningar $q = 1.0\mu\text{C}$ befinner sig i punkterna $(x, y) = (1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ i ett cartesiskt koordinatsystem (med avstånd i meter).

   a. (0.5 p) Beräkna det elektriska fältet i punkten $(x, y) = (0, 0)$.

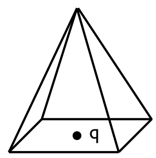
   b. (0.5 p) Vad är den elektriska potentialen i samma punkt $(x, y) = (0, 0)$? Anta att potentialen är noll i oendligheten.

2. En elektrisk dipol med dipolmoment $p = 6.0 \cdot 10^{-6}\text{Cm}$ befinner sig i ett konstant elektriskt fält med storlek $E = 5.0 \cdot 10^{7}\text{V/m}$, så att $\vec{p} \parallel \vec{E}$.

   a. (0.5 p) Vad är den potentiella energien av konfigurationen?

   b. (0.5 p) Hur mycket arbete krävs det att vrida dipolen nittio grader, så att $\vec{p} \perp \vec{E}$?

3. En pyramid (1 p)
   En laddning q befinner sig precis i mitten av en kvadrat som är basen av en pyramid med fyra lika sidor. Vad är det elektriska flödet, dvs ytintegralen $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$, genom en av pyramidens fyra sidor?



4. (1 p) Genom två mycket långa, raka, parallella trådar går en ström $I_1 = 1\text{A}$ och $I_2 = 2\text{A}$, åt samma håll. Avståndet mellan trådarna är 1 meter. Beräkna magnetfältets stryka i en punkt P precis mitt emellan trådarna, och gör en skiss som visar fältets riktning.

5. En plattkondensator består av två plattor med area $A = 75\text{cm}^2$. Avståndet mellan plattorna är $d = 5.0\text{mm}$. Mellan plattorna finns ett linjärt dielektrikum med relativ permittivitet $\epsilon = 3$.

   a. (0.5 p) Beräkna kondensators kapacitans.

   b. (0.5 p) Kondensator laddas upp till 50 Volt. Hur mycket energi är lagrat i kondensatorn?

6. (1 p) En partikel med negativ laddning rör sig i ett konstant magnetiskt fält $B = 1.00\text{mT}$ med en hastighet $v = 1.76 \cdot 10^{7}\text{m/s}$, vinkelrätt mot det magnetiska fältet. Partikelns banan har en radie $R = 10.0\text{cm}$. Bestäm kvoten q/m. Vilken slags partikel kan det handla om?

7. (1 p) En laddning q befinner sig på en avstånd d ovanför ett oendligt stort ledande plan, som är jordat. Vad är kraften som planet utövar på laddningen q?

8. (1 p) Polarisationen av en sfärisk skal, med inre radie R_a och yttre radie R_b ges av $\vec{P} = k\frac{\hat{r}}{r}$, med k en konstant, och r avståndet till skalets mitten. Polarisationen är fryst in i skalet, dvs, det finns inga fria laddningar. Bestäm det elektriska fältet i skalet.
   Ledning: det finns ett mycket snabbt sätt, och ett krångligare sätt att lösa problemet.

Svar:

1. Det elektriska fältet av an punktladdning q ges av $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$, med r avståndet till laddningen, och $\hat{r}$ enhetsvektorn radiellt bort från laddningen. Den elektriska potentialen ges av $\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

   a. Storleken i $(0,0)$ av $\vec{E}$ pga de fyra laddningarna är samma, men riktningarna är olika. Riktning pga laddningen i $(1,1)$ är $(-1,-1)$, och riktning pga laddningen i $(-1,-1)$ är $(1,1)$. Så $\vec{E}$ pga de här laddningarna är noll. Likadant är $\vec{E}$ noll pga laddningarna i $(1,-1)$ och $(-1,1)$. Så, det totala elektriska fältet pga de fyra laddningarna är $\vec{E} = \vec{0}$.

   b. Alla laddningar ger samma bidrag till potentialen, som blir $\phi(\vec{0}) = 4\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$, med $q = 1\mu\text{C}$, $r = \sqrt{2}\,\text{m}$ och $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0\cdot 10^9\text{Nm}^2/\text{C}^2$, får vi $\phi = 25.5\text{kV}$.

2. Energien av en dipol $\vec{p}$ i ett konstant elektriskt fält $\vec{E}$ är $U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$ (där vi har valt att $U = 0$ om $\vec{p}\perp\vec{E}$).

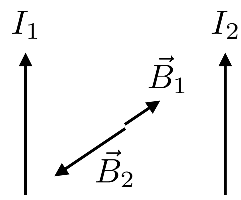
   a. Eftersom $\vec{p}$ och $\vec{E}$ är parallella, får vi att $U = -pE$, eller $U = -300J$.

   b. När $\vec{p}$ och $\vec{E}$ är ortogonal är energien noll, så energien måste ökas med $300J$, så det krävs $W = 300J$ arbete för att vrida dipolen nittio grader.

3. Gauss lag ger att det totala flödet genom en sluten yta rund en punktladdning är $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = q/\epsilon_0$. Hälften av flödet går genom pyramiden. De fyra sidorna är ekvivalenta, så genom varje sida har vi ett flöde $\frac{q}{8\epsilon_0}$.

4. Det magnetiska fälted av en lång, rak tråd är $\vec{B} = \frac{\mu_0 I\hat{\varphi}}{2\pi r}$. Jag väljer trådarna som i figuren, så i en punkt mitt emellan trådarna har vi att $\vec{B}_1$ pga tråd 1 pekar in i pappret, $\vec{B}_2$ pga tråd 2 pekar ut ur pappret.

   Eftersom $I_2 = 2I_1$ har vi att $B_2 = 2B_1$, så storleken av $\vec{B}$ i en punkt mit emellan trådarna är $B = \frac{\mu_0(I_2 - I_1)}{2\pi r}$, med $r = 0.50\text{m}$ och $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\text{Tm/A}$. Storleken blir $B = 4.0\cdot 10^{-7}\text{T}$, och riktningen är ut ur pappret, som i figuren.

5. a. Kapacitansen av en plattkondensator ges av $C = \frac{\epsilon_0\epsilon A}{d}$, så vi får $C = (8.85\cdot 10^{-12})3(75\cdot 10^{-4})/(5\cdot 10^{-3}) = 40\text{pF}$.

   b. Energien av en laddat kondensator är $U = \frac{1}{2}CV^2 = 50\cdot 10^{-9}\text{J}$.

6. Hastigheten $\vec{v}$ är vinkelrätt mot $\vec{B}$, så Lorentzkraften är centripetalkraften för en cirkelrörelse, $qvB = mv^2/r$, eller vi kan får kvoten q/m via $\frac{q}{m} = \frac{v}{Br} = 1.76\cdot 10^7\cdot 10^3\cdot 10^1 = 1.76\cdot 10^{11}\text{C/kg}$. Eftersom det står i uppgiften att laddningen är negativ, får vi egentligen $\frac{q}{m} = -1.76\cdot 10^{11}\text{C/kg}$. En elektron har mass $m = 9.11\cdot 10^{-31}\text{kg}$, och $q = -1.60\cdot 10^{-19}C$, som också ger $\frac{q}{m} = -1.76\cdot 10^{11}\text{C/kg}$. Partikeln kan vara en elektron.

7. Här använder vi bildladdningsmetoden. Potentialen av planet är noll. Så, om vi kan hitta en laddningsfördelning som har potentialen noll vid planet (och i oendligheten), då kan vi också använda den alternativa laddningsfördelningen för att bestämma kraften

på laddningen ovanför planet, eftersom det finns bara en lösning till Poisson ekvationen $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$, som ger ϕ om laddningsfördelningen och randvillkor är bestämmda.

Om vi byta ut planet mot en laddning $-q$ på avstånd $2d$ rakt under laddningen q ovanför planet, då är potentialen noll precis var planet fanns (och i oendligheten). Så, kraften på laddningen ovanför planet ges av $F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}$, och är riktat mot planet.

8. Den snabba lösningen. Det finns inga fria laddningar Q_{fria}. Det innebär att $\vec{D} = \vec{0}$ överallt, om $\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{0}$. Det är så, eftersom $\vec{\nabla} \times \vec{P} = \vec{0}$ och $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ (alltid i det statiska fallet), och vi har desutom $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$. Det elektriska fältet i skalet är alltså $\vec{E} = -1/\epsilon_0\vec{P} = -\frac{k}{\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r}$ (utanför skalet har vi $\vec{E} = \vec{0}$).

   Den krångliga lösningen. Vi kan också bestämma laddningen pga polarisationen. Nämligen, ytladdningstäthet ges av $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$, och laddningstäthet $\rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$. Vi får att $\rho = -\frac{k}{r^2}$, eftersom $\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r} = \frac{1}{r^2}$

   På skalets insida har vi $\hat{r} \cdot \hat{n} = -1$ och $\sigma_p(R_a) = -k/R_a$, så laddningen på skalets insida är $Q_p(R_a) = -4\pi R_a k$. På skalets utsida har vi $\hat{r} \cdot \hat{n} = 1$ och $\sigma_p(R_a) = k/R_b$, så laddningen på skalets utsida är $Q_p(R_b) = 4\pi R_b k$. Laddningen i en sfär med radie r, med $R_a < r < R_b$ är $Q_p(R_a) + \int_{R_a}^{r} dr 4\pi r^2(-\frac{k}{r^2}) = -4\pi R_a k - 4\pi k(r - R_a) = -4\pi k r$.
   Med hjälp av Gauss lag (ta en sfär med radie r som Gauss yta) får vi att det elektriska fältet vid r inuti skalet ges av $4\pi r^2 E = -4\pi k r/\epsilon_0$, eller $\vec{E} = -\frac{k}{\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r}$, svaret som vi fick mycket snabbare ovanför.

   Notera att den totala laddningen i skalet är noll, nämligen
   $Q_{\text{tot}} = Q_p(R_a) + \int_{R_a}^{R_b} dr 4\pi r^2(-\frac{k}{r^2}) + Q_p(R_b) = -4\pi R_a k - 4\pi k(R_b - R_a) + 4\pi R_b k = 0.$