Fysikum

FK4010 - Elektromagnetism
Laborationsinstruktion (15 november 2013)

LABORATION 2
MAGNETISKA FÄLT

Mål

I denna laboration skall du studera sambandet mellan B- och H-fälten i en toroidformad järnkärna med strömspole. De fenomen som skall studeras är komplexa och du måste förbereda övningen genom att sätta dig in i en del relevant teoretisk information — före laborationstillfället. Redovisningen sker i form av en labrapport.

1 Inledande kommentarer

Denna laboration gäller en spole med järnkärna. De fenomen som studeras är mycket komplexa och det är därför inte möjligt att ge några kvantitativa förutsägelser. Det gäller istället att utnyttja teorin för att tolka mätningarna i termer av egenskaperna hos spolen. Det saknas ibland anvisningar som talar om exakt hur mätningarna ska gå till. Istället anges vad som skall mätas och hur mätningarna ska redovisas. Detta gör att laborationen kan ta ganska lång tid att genomföra om du inte tänkt igenom i förväg hur du ska arbeta. Planera därför mätningarna och gör de beräkningar du kan i förväg. Instruktionen innehåller en hel del relevanta teoretiska diskussioner som kan vara till hjälp när du skall tolka resultaten av dina mätningar under redovisningen.

Ägna gärna tid åt att diskutera uppgifterna med dina kamrater, med labassistenten och med din gruppundervisare. Koncentrera dig på frågor av typen ”Varför blir det så här?” och ”Hur gör man för att ta reda på det här?”. Undvik ointressanta frågor av typ ”Vad ska det bli?”.

Det som avgör en mätnings kvalitet är storleken på felet i mätningen, och man skall alltså sträva efter att minimera detta, samt ange värden med feluppskattningar. Det är viktigt att du när du gör en mätning avgör vilka felkällor som finns och hur stora felen är, samt gör vad du kan för att minska dem. För att bedöma kvaliteten på någon annans mätning krävs också att man får klart för sig huruvida de fel och de värden som anges har härletts på ett korrekt sätt och att rådata är tillförlitliga. Det är därför också viktigt att redovisa sina mätningar och beräkningar på ett övertygande sätt.

2 Begrepp och definitioner

Man beskriver ofta det magnetiska fältet **B** genom *fältlinjer*. Antalet fältlinjer som passerar en yta är proportionellt mot *flödet* genom ytan, dvs fältstyrkan eller flödestätheten, **B**, ges av antalet linjer per ytenhet. Eftersom **B**-fältet saknar källor (är divergensfritt) är fältlinjerna slutna. Enheten för magnetisk fältstyrka i SI-systemet är tesla, T. Andra vanliga beteckningar för samma enhet är Wb/m^2 (weber/m^2) och Vs/m^2 (voltsekunder/m^2). Det är ibland praktiskt att tänka sig att en elektrisk ström ger ett magnetiserande fält, **H** (mäts i enheten A/m), som i sin tur ger upphov till **B**, dels direkt i vakuum, dels genom att magnetisera eventuellt material. Olyckligtvis påverkas också **H** av det magnetiserade materialet, vilket gör det besvärligt att bestämma fältkonfigurationer för godtyckliga fall. Om magnetiseringen (dipolmomentet/volymenhet) är källfri bidrar materialet emellertid inte till **H**. Detta blir fallet i en magnetiserad torus där magnetiseringen beskrivs av slutna, cirkulära, fältlinjer. I en spole, tätt lindad runt en sådan torus, (toroidspole) samverkar strömmen i de olika lindningsvarven och det magnetiserande fältet blir proportionellt mot NI, där N är antalet varv och I är strömmen. Om torusen har ett tunt luftgap bidrar det magnetiserade materialet till **H** endast i luftgapet, medan **B**-fältet blir detsamma i luftgapet som i järnet.

Sambandet mellan H och B-fält skrivs ofta på formen

$$B = \mu \mu_0 H$$

Här är μ_0 den magnetiska permeabiliteten i vakuum, vars värde definieras som $4\pi\cdot10^{-7}$ Vs/Am. Den relativa permeabiliteten, μ, karaktäriserar materialets magnetiska egenskaper. I vakuum är $\mu = 1$.

Det åtgår energi för att bygga upp ett magnetfält. Denna energi lagras i magnetfältet och kan återvinnas, med undantag för de energiförluster som kan uppstå då magnetiseringen av materiella medier ändras. Hur mycket energi som krävs för att öka strömmen i spolen beror på spolens *självinduktans*.

Självinduktansen anger sambandet mellan strömmen genom spolen och det magnetiska flödet ϕ i spolen som denna ström ger upphov till. Om sambandet mellan ström och magnetfält är linjärt (som i vakuum), är självinduktansen L en konstant som ges av

$$L = \frac{\phi}{I}$$

Om sambandet mellan strömmen och det magnetiska flödet inte är linjärt (om vi t.ex. har järn i spolen), definierar vi induktansen som flödesändring per strömändring:

$$L = \frac{d\phi}{dI}$$

Anledningen till denna definition är att den inducerade spänningen i spolen ges av Faradays lag som

$$\varepsilon = \oint E.dl = -\frac{d\phi}{dt}$$

så att vi kan skriva $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$. Spänningen över spolen är $V_L = -\varepsilon$, dvs

$$V_L = L\frac{dI}{dt}$$

När strömmen i spolen ändras uppstår alltså en spänning V_L över spolen och strömkällan avkrävs ett arbete per tidsenhet (effekt) som är $V_L I$. Detta arbete måste uföras mot det elektriska fält som Faradays lag ger, och det går dels till att öka den magnetiska fältenergin och dels till värmeförluster i järnkärnan (om vi har en sådan!).

Om μ är konstant (t.ex. i vakuum) gäller att den energi som krävs för att bygga upp strömmen I i en spole är

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

Detta är ekvivalent med att tillskriva det magnetiska fältet en energi per volymsenhet som är

$$\frac{1}{2\mu\,\mu_0}B^2$$

Dessa båda formler gäller alltså när man kan försumma att μ beror på den magnetiska fältstyrkan och är en god approximation utom för ferri- och ferromagnetiska ämnen, t.ex. järn[1]. Järn intill eller inuti en spole blir magnetiserat och bidrar då till spolens magnetfält. Järn, liksom andra ferro- och ferrimagnetiska material, ökar alltså spolens induktans vilket ofta är önskvärt. Järn har emellertid dessutom egenskapen att permeabiliteten varierar med den magnetiska fältstyrkan och att sambandet mellan **B** och **H** inte är entydigt. Detta gör att formeln ovan för energin i spolen inte är tillämplig. Istället måste man tillgripa en mer allmän formel för den energitillförsel som krävs för att ändra B och H, nämligen

$$W = \int_V d\tau \int_{B_1,H_1}^{B_2,H_2} \mathbf{H}.\mathbf{dB}$$

där den yttre integralen beräknas över det område där den inre integralen är skild från noll. Den inre integralen representerar alltså energiåtgång per volymsenhet.

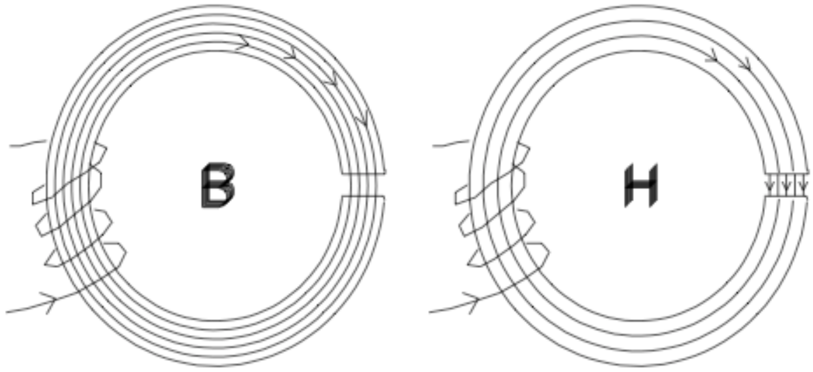
Uttrycken för W kan alltså härledas (se t.ex. Grant & Phillips sid 245) m.h.a. Faradays lag. W är det totala arbetet som krävs (bortsett från värmeförluster i ledningarna). Detta arbete går delvis till värmeutveckling i det magnetiserade materialet, delvis till energi som lagras i **B**-fältet. Det finns i den makroskopiska teorin för elektromagnetism inget sätt att skilja dessa båda bidrag åt. Den inre integralen ovan specificerar alltså den energi per volymsenhet som krävs för att variera B och H längs en ”kurva” i den sexdimensionella (**B**,**H**)-rymden mellan punkterna ($\mathbf{B_1},\mathbf{H_1}$) och ($\mathbf{B_2},\mathbf{H_2}$). Denna integral är i allmänhet inte oberoende av kurvan. Om **B** och **H** är parallella blir naturligtvis $\mathbf{H} \cdot \mathbf{dB} = H\,dB$, och integralen ovan blir entydigt definierad av B_1 och B_2 om H är en entydig funktion av B. Detta innebär att den energi som krävs för att ändra fältet från B_1 till B_2 återfås om man går tillbaka till B_1, dvs man kan tillskriva det magnetiska fältet en lagrad energitäthet. Däremot kan man alltså inte definera ett entydigt energiinnehåll hos det makroskopiska fältet när man har värmeförluster.

I det enklaste fallet, nämligen att $B = \mu\,\mu_0 H$ med konstant μ, följer som redan nämnts att energitätheten blir $\frac{1}{2\mu\,\mu_0}B^2$. I det något mer komplicerade fallet som här studeras är **B** och **H** parallella eller antiparallella (se fig. 1), men sambandet mellan dem är inte entydigt. I detta fall kan **B** och **H** ersättas med *B* resp. *H*, dvs fältens komponenter moturs (eller medurs) i toroiden. Integralen ovan blir i så fall lika med den magnetiserade volymen gånger en integral i (*B,H*)-planet (observera att integrationsvariabeln är *B*):

$$W = \int_V d\tau \int_{B_1,H_1}^{B_2,H_2} H\,dB$$

[1] Alla ämnen är antingen dia- eller paramagnetiska. Bland dessa finns vissa vars atomära magnetiskamoment, pga regelbunden gitterstruktur, sammansätter sig till en förhållandevis kraftigmagnetisering. Det är dessa som kallas ferro- och ferrimagnetiska.

Det faktum att sambandet mellan **B** och **H** inte är entydigt betyder också att den relativa permeabiliteten, μ, vare sig är konstant eller entydigt definierad. För små fält kan man dock, även för ett ferromagnetiskt material, ofta approximera sambandet mellan **B** och **H** med en proportionalitet.



Figur 1: **B**- och **H**-fältlinjer i en toroidspole med luftgap

3 Toroidspolen

En toroidspole med *N* varv är lindad på en järnkärna som har tvärsnittsytan *A*, medelomkretsen ℓ och ett smalt luftgap. Det magnetiska fältet **B** i luftgapet kan mätas och användas för att beräkna fältstyrkan inuti toroidens järnkärna. Den toroid som används vid laborationen har ett ganska smalt luftgap och vi kan därför tillåta oss approximationen att försumma det läckflöde som luftgapet orsakar.

Amperes lag kan användas för att beräkna det magnetiska fältet i en toroidspole. Den kan skrivas

$$\oint \mathbf{B}.dl = \mu_0 I_{tot}$$

där I_{tot} är den totala strömmen, som har en komponent, *NI*, från strömmen genom lindningsvarven, men domineras av magnetiseringsströmmen när spolen har en järnkärna. Magnetiseringsströmmen bidrar däremot inte till integralen av *H*:

$$\oint \mathbf{H}.dl = NI$$

Om man integrerar runt en cirkel som sammanfaller med en **B**-fältlinje i figur 1 ovan får man

$$H_j\left(l - d\right) + H_l\, d = NI,$$

där index *j* och *l* betecknar järn respektive luft och *d* är luftgapets tjocklek. Eftersom **B**-fältlinjerna är slutna innebär antagandet att man kan försumma läckflödet på grund av luftgapet att fältstyrkan B_j i järnet måste vara lika stor som fältstyrkan B_l i luftgapet. Sätt B_j = B_l = B. I luftgapet är sambandet mellan **B** och **H** entydigt bestämt:

$$B = \mu_0 H_l$$

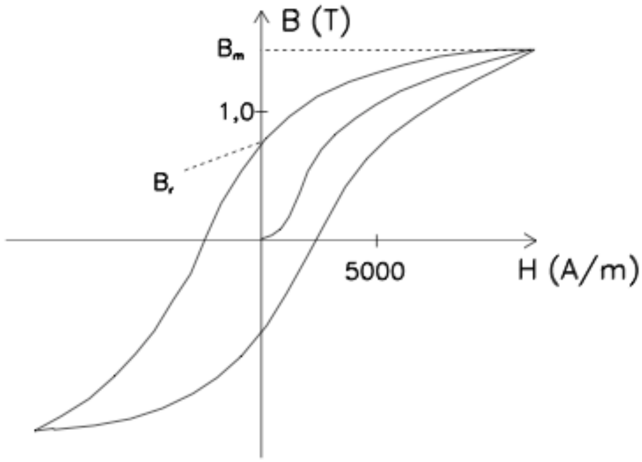
Insättning ger sambandet

$$H_j = \frac{\mu_0 NI - Bd}{\mu_0 (l - d)}$$

Det är alltså möjligt att samtidigt bestämma fälten **B** och **H** i järnet genom att

a) Sända en bestämd ström *I* genom toroidspolen.
b) Mäta fältstyrkan *B* i luftgapet.
c) Beräkna det H_j som svarar mot strömmen *I* och fältet *B*.

Formellt kan man fortfarande skriva $B = \mu \mu_0 H$, men man måste då komma ihåg att den relative permeabiliteten, *μ*, inte längre är en konstant utan beror på järnets magnetisering. Sambandet mellan *B* och *H* i några olika magnetiska material finns angivna i t.ex. Physics Handbook. I figuren nedan återges en s.k. hystereskurva som grafiskt illustrerar sambandet mellan de två fältstyrkorna.



Figur 2: Ett exempel på en hystereskurva. B_m och B_r är mättnadsvärdet av *B*-fältet resp. remanensen. Mättnadsfältet svarar mot att magnetiseringen nått sitt maximala värde. Om strömmen ökas ytterligare ökar *B* endast mycket långsamt eftersom endast strömmen i lindningen bidrar till ökningen.

3.1 Sambandet mellan B och H-fälten i toroidspolens järnkärna

Här är det meningen att du skall undersöka sambandet mellan **B** och **H** i järnet för likström. Detta är inget entydigt funktionssamband, utan hysteres förekommer, dvs värdet på **B** för ett givet H beror på de föregående värdena. Detta har viss betydelse när du ställer in de värden på strömmen som du vill mäta vid.

Uppgifter:

a) Avmagnetisera järnet i toroidspolen med hjälp av växelström av minskande amplitud från en vridtransformator. Var försiktig när du handskas med transformatorn så att du inte får en stöt! Du bör kunna komma ned till några Gauss.
b) Anslut spolen till en likspänningskälla som ger minst 6A och med kontinuerligt varierbar spänning upp till minst 20V. Mät B i toroidspolens luftgap med en gaussmeter (hallplatta) och jämför hystereskurvorna vid låg ström och vid hög ström.

Låg ström:
Mät ström och magnetfält för ström mellan -100mA och +100mA i steg av ungefär 25 mA. Börja med $I=0$.

Hög ström:
Mät därefter ström och magnetfält i området I = -6A till +6A. Börja med I = 0.

Redovisa:

1. Spolens nummer och karaktäristika.
2. Diagram över B som funktion av strömmen I.
3. Diagram över B som funktion av H_j .
4. Ett värde på μ i järnet som kan användas för att approximera hystereskurvan vid låg ström med en rät linje (skall senare användas för att beräkna L för spolen). Felet skall inkludera effekten av icke-linjäriteter och hysteres. Man anpassar lämpligen en rät linje till samtliga mätpunkter för låg ström så att avvikelserna från ett rätlinjigt samband bidrar till det beräknade felet i μ.

3.2 Toroidspolen som kretselement

En ideal spole är resistanslös och karaktäriseras av självinduktansen som är en konstant (dvs sambandet mellan I och **B** är linjärt. Med en "halvideal" spole menar vi här en spole som är ideal i alla avseenden utom att lindningen har en viss resistans. Denna resistans kan enkelt representeras av en seriekopplad resistor då man gör beräkningar. Egenskaperna hos en halvideal spole bestäms alltså av två konstanter, induktansen L och resistansen r. Spänningen över en halvideal spole blir t.ex. $V = L\frac{dI}{dt} + rI$.

Idealet är svårt att uppnå, även när det gäller spolar. Mätningarna ovan visar tydligt att sambandet mellan I och B för vår toroidspole är icke-linjärt. Det är ju inte ens entydigt! Enligt resonemanget i avsnitt 2 ovan innebär detta en viss energiförlust i järnet för varje period, dvs energiförlusten är för konstant ström proportionell mot vinkelfrekvensen ω. Dessutom är järnkärnan homogen, vilket innebär att det varierande magnetiska flödet lätt kan inducera strömmar i järnet (s.k. virvelströmmar), vilka leder till värmeförluster som beror på frekvensen. Det inducerade elektriska fältet som driver virvelströmmarna är proportionellt mot $\frac{d\phi}{dt}$, dvs mot ω om amplituden hos ϕ-variationerna är konstant. Den utvecklade medeleffekten blir därför proportionell mot ω^2 (För att undvika virvelströmmar brukar man använda laminerade järnkärnor).

Syftet med denna övning är att studera hur avvikelserna från en ideal spole visar sig då du kopplar in spolen i en växelströmskrets, samt att du skall ge en kvalitativ tolkning av resultaten.

Uppgifter:

a) Mät lindningens resistens (för likström).

b) Visa att om vi antar att järnets permeabilitet, μ_j, är konstant ges toroidens induktans L av uttrycket

$$L = \frac{\mu_0 A N^2}{d + \frac{(l-d)}{\mu_j}},$$

och beräkna värdet på L. Använd ditt värde på μ_j från avsnitt 3.1.

c) Avmagnetisera spolen igen.

d) Koppla spolen i serie med ett lämpligt motstånd och mät med oscilloskop spänningen V_1 över kombinationen, och V_2 över seriemotståndet. Använd tongeneratorns sinussignaler vid mätningarna. Visa att, om man antar en halvideal spole, ges dess induktans och inre resistans (som naturligtvis båda är konstanter) av

$$L = \frac{R}{\omega}\left|\frac{V_1}{V_2}\right|\sin\varphi \qquad och \quad r = \frac{\omega L}{\tan\varphi} - R,$$

där ω är vinkelfrekvensen och φ fasförskjutningen mellan spänningarna. För en halvideal spole är alltså L och r konstanter, och om vi mäter på en sådan ger alltså uttrycken ovan samma L och r för olika ω. (För L blir t.ex. $\left|\frac{V_1}{V_2}\right|\sin\varphi$ proportionellt mot ω). Hur tolkar du L och r som fås enligt ovan när spolen **inte är (halv)ideal**? Fundera över hur virvelströmmar och hysteres effekterkan tänkas påverka de mätta värdena på L och r för olika frekvenser. Finns det några andra effekter som kan spela en roll?

Använd sambanden ovan för att bestämma L och r vid ett antal olika frekvenser, däribland 50Hz, 1500 Hz och 75 kHz.

Redovisa:

1. Lindningens resistans.
2. Den beräknade induktansen.
3. *L* och *r* för växelström som funktioner av frekvensen och en jämförelse med lindningens resistans och den beräknade induktansen. (Tänk efter ordentligt när du beräknar felen på *L* och *r*. Undvik korrelerade fel.) Kommentera (de kraftiga!) avvikelserna från en ideal växelströmskrets.

3.3 Energiomsättningen i toroidspolen

När toroidspolen kopplas till en växelströmskälla förbrukas elektrisk energi dels genom värmeutvecklingen i lindningens resistans (kopparförluster) och dels genom värmeutveckling i järnkärnan på grund av hysteres och virvelströmmar (järnförluster). Använd redan gjorda mätningar (avsnitt 3.1) för att lösa nedanstående beräkningsuppgifter (se avsnitt 2 och 3.2). I ett par av uppgifterna måste du numeriskt bestämma ytor som begränsas helt eller delvis av din hystereskurva.

Beräkna:

1. Medeleffekten som utvecklas i järnkärnan då spolen genomflyts av en växelström med toppvärdet 6A och frekvensen 50Hz (antag att hystereskurvan blir den du mätt upp). Hur beror effekten på frekvensen? (Bortse från virvelströmmar!)

2. Motsvarande effektutveckling i spolens lindningar. Hur beror denna effekt på frekvensen?

3. Den energi som åtgår för att bygga upp det magnetiska fältet i spolens järnkärna då strömmen ökas från 0A till 6A och järnet från början är omagnetiserat. Håll reda på axlarna!

4. Motsvarande energi för det magnetiska fältet i spolens luftgap.

4 Enkla mätningar på en krets som innehåller en inducerad elektromotorisk spänning

Syftet med denna övning är att använda toroidspolen och ett oscilloskop för att på ett handgripligt sätt övertyga sig om hur förträfflig Faradays lag är. Lagen ger ett samband mellan ett varierande magnetiskt flöde och vägintegralen av det elektriska fältet runt en sluten kurva i rymden:

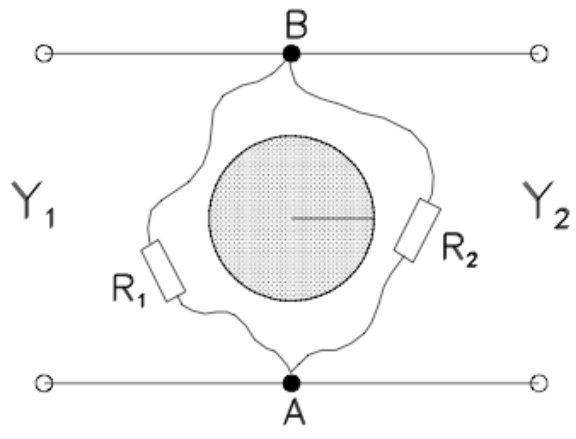
$$\oint \mathbf{E}.dl = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}.dS \equiv -\frac{d\phi}{dt}$$

Eftersom vägintegralen av **E** runt en sluten kurva inte är noll om **B**-fältet är tidsberoende kan man i det fallet inte definiera någon elektrisk potential, dvs spänningsskillnaden mellan två punkter blir *odefinierad* (vägintegralen av E mellan punkterna beror på vilken väg vi väljer). I detta sammanhang kan man betrakta ett oscilloskop eller en voltmeter som ett instrument som mäter vägintegralen $\oint \mathbf{E}.dl$ *inuti instrumentet* mellan de två anslutningspolerna. *Du bör innan laborationstillfället vara säker på att du förstår och kan redogöra för ovanstående resonemang*. Toroidspolen matas med en sinusformad spänning från en tongenerator.

Uppgifter:

Dra en sladd genom toroiden och anslut ändpunkterna till ett oscilloskop. Sladden (en vanlig labsladd med banankontakter är lämplig) och ingångsimpedansen till oscilloskopet ska bilda en sluten strömkrets, som omsluter magnetiska fältet i toroidens järnkärna. Undersök om den inducerade spänningen är känslig för slingans form, avstånd till järnet etc. Pröva också att linda sladden flera varv kring järnkärnan.

Koppla upp en krets enligt figur 3 så att R_1 och R_2 ingår i en slinga som omsluter toroidens järnkärna. De två ingångarna till ett dubbelstråleoscilloskop ansluts som figuren visar till samma punkter, A och B. Här betyder "samma punkter" verkligen just det!



Figur 3: Koppling för induktionsförsök. Järnkärnan i mitten.

Anordningen kan ses som en transformator där sekundärkretsen visas i figuren. Strömmarna genom oscilloskopen kan försummas (hög in-impedans), så strömmen i kretsen flyter enbart genom motstånden och deras anslutningsledningar. Mät signalerna (amplitud och fas) över ingångarna Y_1 och Y_2 för följande kombinationer av resistanser:

a) $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$
b) $R_1 = 100$ och $R_2 = 200\ \Omega$
c) R_1 kortsluten med en labsladd och $R_2 = 200\ \Omega$
d) Både R_1 och R_2 kortslutna med var sin labsladd (likadana).

Tänk före varje mätning igenom hur resultatet av denna rimligen borde bli och kontrollera sedan att du tänkt rätt. **Hur kan de två oscilloskop-ingångarna ge olika utslag trots att de verkar mäta "spänningen" mellan samma punkter?** Hur kan ett oscilloskop som mäter $\int \mathbf{E}.dl$ inuti sig självt (och inget annat!), och är på stort avstånd från spolen och motstånden "veta" vilket motstånd det skall visa "spänningen" över?

För att ge en korrekt beskrivning är det enklast ansätta en ström I i kretsen och sedan utgå direkt från Faradays lag och tillämpa den på ett antal slutna kurvor, vilket ger ett ekvationssystem. Det gäller då att se till att man väljer en väg där man kan uttrycka det elektriska fältet i termer av I, Y_1, Y_2, R_1 och R_2. Det är bl.a. värt att notera att det elektriska fältet inuti ledningstrådarna oftast (men inte alltid!) kan försummas.

Redovisa mätresultaten och en kort jämförelse med det förväntade utfallet. (Här räcker det med att ange värden utan fel.)

Sammanställningen

För att underlätta den sammanställning av resultat som skall inlämnas som en labrapport, ges här en sammanfattning av vad den ska innehålla. Gruppera materialet enligt punkterna nedan:

1. Data för toroidspolen (N, d, ℓ, A, likströmsresistans), med fel, samt spolens nummer.

2. Mätvärden för I och B (med fel), samt motsvarande beräknade värden på H (med fel) i tabell- och grafisk form.

3. Värdet på μ_j för svag ström med fel som tar hänsyn till att sambandet inte är linjärt eller entydigt. Motsvarande beräknade värde på L för likström (med fel).

4. Härledningar av uttrycken för L och r som ges i avsnitt 3.2.

5. Värden (med fel) på L och r för olika ω. (Tänk på att beräkna felen korrekt utgående från mätta storheter som kan anses ha oberoende fel.)

6. Stolpvis uppräkning (max tre rader vanlig text) av effekter som bidrar till det observerade frekvensberoendet för L och r.

7. Resultatet av beräkningsuppgifterna i avsnitt 3.3. (Två effekter och två energier

utan fel.)

8. De uppmätta amplituderna och relativa faserna för Y_1 och Y_2 i kopplingarna a) till d) i avsnitt 4 (utan fel).

9. Härledningar av de förväntade resultaten för kopplingarna a) till d) för ett givet varierande magnetiskt flöde, $\phi(t)$, i toroidens järnkärna.