

5 Elektricitetslära och magnetism

5.1 Elektriska fält

Beteckningar

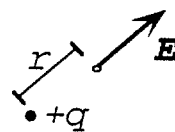
| | | | | | |
|----------------|----------------------|-------|-----------|---|----------|
| A | area | m^2 | T | kraftmoment | Nm |
| E | elektrisk fältstyrka | V/m | U | elektrisk spänning, potentialdifferens | V |
| \mathbf{e}_r | radiell enhetsvektor | N/C | V | potential | V |
| F | kraft | N | W_P | potentiell energi | J |
| ℓ | längd | m | λ | laddning per längd | C/m |
| P | dipolmoment | Cm | σ | laddning per area | C/m^2 |
| Q, q | laddning | C | Φ_E | elektriskt flöde | Nm^2/C |
| r | radiell längd | m | | | |

Coulombs lag

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

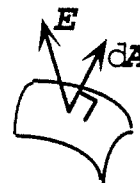
Elektrisk fältstyrka

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$$



Elektriskt flöde

$$\Phi_E = \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$



Gauss sats

$$\Phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{innesluten}}}{\epsilon_0} \quad \text{sluten yta}$$

5 Elektricitetslära och magnetism

Fältstyrkan från några laddningsfördelningar:

sfärisk ledare med radien R

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

gäller då $r > R$

sfärisk ledare med radien R

$$E = 0$$

gäller då $r < R$

lång rak ledare

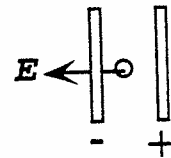
$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

platta med oändlig utsträckning

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

två plattor med oändlig utsträckning

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Elektrisk potential

en laddning

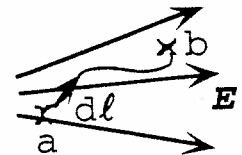
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

flera laddningar

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

potentialdifferens

$$U = V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$



potentiell energi

$$W_p = qV$$

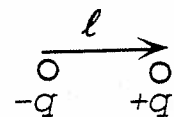
Elektrisk dipol

dipolmoment

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l}$$

kraftmoment

$$\mathbf{T} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

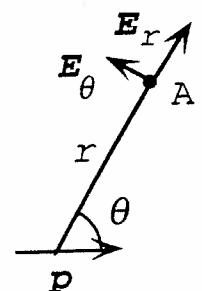


fältstyrkan på långt avstånd från en elektrisk dipol

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \cos \theta$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sin \theta$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$



formeln ger fältet i A

potentiell energi

$$W_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

5.2 Kapacitans

Beteckningar

| | | | | | |
|-----|----------------------|-------|--------------|---|---------|
| A | area | m^2 | w | energitäthet | J/m^3 |
| C | kapacitans | F | U | elektrisk spänning, potentialdifferens | V |
| d | avstånd | m | W_p | potentiell energi | J |
| E | elektrisk fältstyrka | V/m | ϵ_r | relativ permittivitet | |
| Q | laddning | C | | | |

Kapacitans

$$C = \frac{Q}{U}$$

Några kapacitanser

plattkondensator

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

sfärisk kondensator

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{4\pi ab}{b - a}$$

cylinderkonden- sator

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{2\pi l}{\ln \frac{b}{a}}$$

seriekopplade kondensatorer

$$\frac{1}{C_{ers}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

parallellkopplade kondensatorer

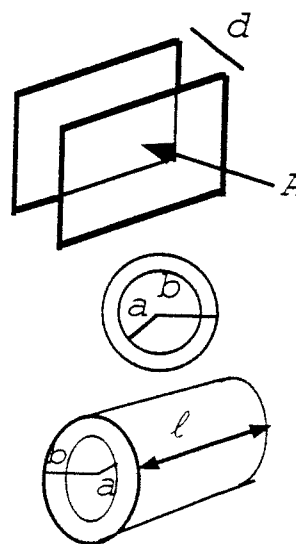
$$C_{ers} = \sum_i C_i$$

Kondensatorns energiinnehåll

$$W_p = \frac{1}{2} CU^2$$

Elektriska fältets energitäthet

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$$



5 Elektricitetslära och magnetism

5.3 Likström

Beteckningar

| | | | | | |
|--------|-----------------------|------------------|----------|-----------------------|-----------------|
| A | area | m^2 | Q | laddning | C |
| C | kapacitans | F | q | momentan laddning | C |
| E | elektromotorisk kraft | V | T, T_0 | temperatur | K |
| I | ström | A | T | tid | s |
| i | momentan ström | A | U | elektrisk spänning, | V |
| J | strömtäthet | A/m ² | v | momentan spänning | V |
| ℓ | längd | m | α | temperaturkoefficient | K ⁻¹ |
| R | resistans | Ω | ρ | resistivitet | Ωm |
| P | effekt | W | σ | konduktivitet | S/m |

Resistans i en tråd

$$R = \frac{\rho \ell}{A}$$

Resistivitetens temperaturberoende

$$\rho_T = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

Ohms lag, resistivitet, konduktivitet

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{J}$$

Ohms lag, resistans

$$R = \frac{U}{I}$$

Resistans

seriekoppling

$$R_{ers} = \sum_i R_i$$

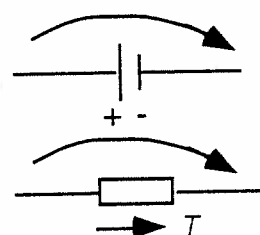
parallellkoppling

$$\frac{1}{R_{ers}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

Referensriktningar

spänning

ström



Kirchhoffs strömlag

$$\sum_i I_i = 0$$

i knutpunkt

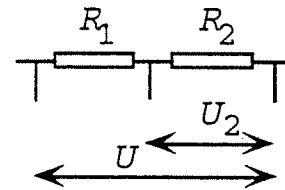
**Kirchhoffs
spänningslag**

$$\sum_i U_i = 0$$

i strömslinga

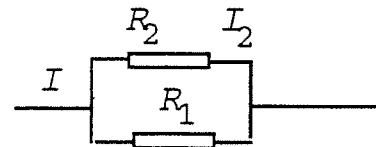
Spänningsdelning

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



Strömdelning

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



**Samband mellan
emk, E , och
polspänning, U**

$$E = U + IR$$

Joules lag

$$P = UI$$

effektutveckling i
resistans

**Uppladdning av
kondensator**

$$\begin{aligned} q(t) &= Q_f(1 - e^{-t/RC}) \\ u(t) &= U_f(1 - e^{-t/RC}) \\ i(t) &= I_o e^{-t/RC} \end{aligned}$$

**Urladdning av
kondensator**

$$\begin{aligned} q(t) &= Q_o e^{-t/RC} \\ u(t) &= U_o e^{-t/RC} \\ i(t) &= I_o e^{-t/RC} \end{aligned}$$

5 Elektricitetslära och magnetism

5.4 Magnetiska fält

Beteckningar

| | | | | | |
|----------------|-------------------------|---------|----------|---------------------------|----------|
| A | area | m^2 | N | antal varv | |
| B | magnetisk flödestäthet | T | n | laddning per volym | C/m^3 |
| E | elektrisk fältstyrka | V/m | n | varv per längd | m^{-1} |
| \mathbf{e}_r | polär enhetsvektor | | q | laddning | C |
| F | kraft | N | r | radiell längd | m |
| I | ström | A | T | kraftmoment | |
| i_c | ledningsström, momentan | A | v | hastighet | m/s |
| i_D | förskjutningsström | A | W_p | potentiell energi | J |
| J | strömtäthet | A/m^2 | μ_r | relativ permeabilitet | |
| ℓ | längd | m | χ_m | magnetisk susceptibilitet | |
| m | magnetiskt dipolmoment | Am^2 | Φ_B | magnetiskt flöde | Wb |

Magnetisk flödestäthet från en laddning i rörelse

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

ger B-fältet från laddningen q i en punkt på avståndet r i riktningen \mathbf{e}_r

Biot-Savarts lag

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

Magnetiskt flöde

$$\Phi_B = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Amperes lag

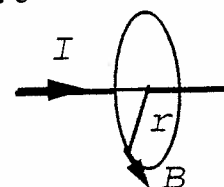
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I_{\text{innesluten}}$$

sluten kurva

Flödestätheten vid några strömförande ledare

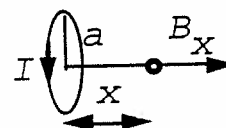
utanför en lång ledare

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



på axeln till en strömslinga

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

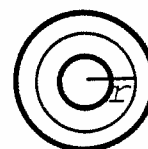


inuti en lång solenoid med n varv per längd

$$B = \mu_0 n I$$

inuti en toroid med N varv

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$



Kraft på laddad partikel i ett magnetfält

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Kraft på laddad partikel i kombinerade E-och B-fält

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Kraft på ett strömelement med längden, $d\ell$

$$d\mathbf{F} = I d\ell \times \mathbf{B}$$

Kraft per längd mellan två ledare med strömmarna I och I'

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}$$

Magnetisk dipol

dipolmoment

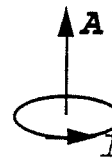
$$\mathbf{m} = I \mathbf{A}$$

kraftmoment

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

potentiell energi

$$W_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

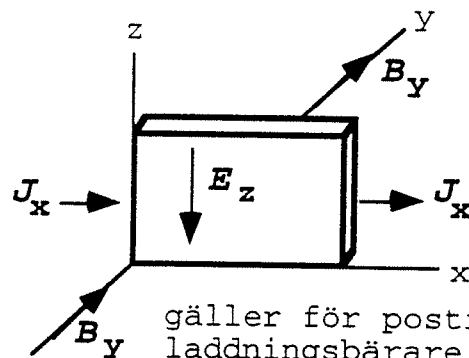


Relativ permeabilitet

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

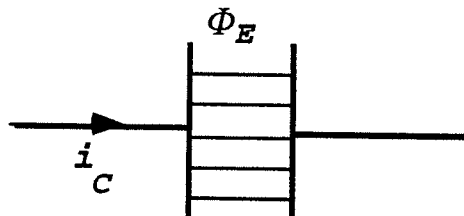
Halleffekt

$$n \cdot q = \frac{-J_x B_y}{E_z}$$



Förskjutningsström

$$i_D = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$



Amperes lag med förskjutningsström

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 (i_C + i_D)$$

5 Elektricitetslära och magnetism

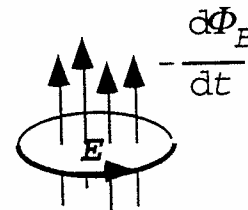
5.5 Induktion och induktans

Beteckningar

| | | | | | |
|--------|---------------------------|-------|---------------|---|----------|
| A | tvärsnittsarea | m^2 | R | resistans | Ω |
| B | magnetisk flödestäthet | T | r | radie | m |
| C | kapacitans | F | t | tid | s |
| E | elektrisk fältstyrka | V/m | w | energitäthet | J/m^3 |
| I | ström | A | v | hastighet | m/s |
| i | momentan ström | A | W_P | potentiell energi | J |
| L | induktans | H | \mathcal{E} | elektromotorisk kraft ¹ | V |
| ℓ | längd | m | Φ_B | magnetiskt flöde | Wb |
| M | ömsesidig induktans | H | $\Phi_{1,2}$ | flöde i spole 2 från ström i spole 1 | Wb |
| N | antal varv | | ω | vinkelfrekvens | rad/s |

Faradays lag

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

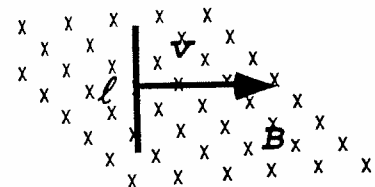


Faradays lag

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Inducerad emk då en ledare rör sig vinkelrätt mot fältet

$$\mathcal{E} = vB\ell$$



Ömsesidig induktans

$$\begin{aligned} Mi_1 &= N_2 \Phi_{12} \\ Mi_2 &= N_1 \Phi_{21} \end{aligned}$$

Självinduktans

$$LI = N\Phi_B$$

¹ Den rekommenderade beteckningen för elektromotorisk kraft är \mathcal{E} . Här använder vi \mathcal{E}

lång spole

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}$$

toroid

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{2\pi r}$$

Emk över induktans

ömsesidig
induktans

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt}$$

självinduktans

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$$

Induktansens
energiinnehåll

$$W_p = \frac{1}{2} LI^2$$

Magnetiska fältets
energitäthet

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Strömtillväxt i
induktans

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-tR/L})$$

Strömavtagande i en
induktans

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-tR/L}$$

Vinkelfrekvens för
LC-krets

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Vinkelfrekvens för
en dämpad LC-krets

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Villkor för kritisk
dämpning

$$R^2 = 4 \frac{L}{C}$$

5 Elektricitetslära och magnetism

5.6 Växelström

Beteckningar

| | | | | | |
|-----------------|---|----------|-----------------|---|----------|
| C | kapacitans | F | t | tid | s |
| I, I_{eff} | strömmens effektivvärde | A | U, U_{eff} | spänningens effektivvärde | V |
| \underline{I} | strömmens effektivvärde på komplex form (med fasfaktor) | A | \underline{U} | spänningens effektivvärde på komplex form (med fasfaktor) | V |
| i | momentan ström | A | u | momentan spänning | V |
| \hat{i} | strömmens amplitud | A | | spänningens amplitud | V |
| \underline{i} | momentan ström på komplex form | A | \underline{u} | momentan spänning på komplex form | V |
| L | självinduktans | H | Z | impedans | Ω |
| P | effekt | W | \underline{Z} | komplex impedans | Ω |
| R | resistans | Ω | φ, ϕ | fasvinkel | rad |
| | | | ω | vinkelfrekvens | rad/s |

Samband mellan amplitud och effektivvärde

$$I_{eff} = I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} ; U_{eff} = U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

Effekt

$$P = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi)$$

5.6.1 Visarmetoden

Strömmens momentanvärde

$$i(t) = \hat{i} \cos \omega t$$

Spänningsfall över impedanser

resistans

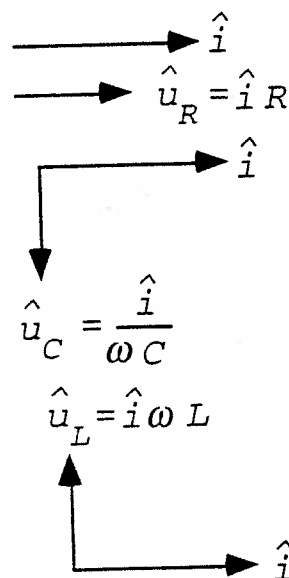
$$u_R(t) = \hat{i} R \cos(\omega t)$$

kapacitans

$$u_C(t) = \frac{\hat{i}}{\omega C} \cos(\omega t - \pi / 2)$$

induktans

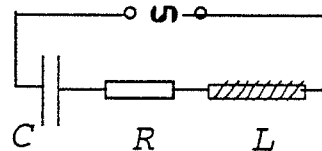
$$u_L(t) = \hat{i} \omega L \cos(\omega t + \pi / 2)$$



Seriekrets

impedans

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$



fasvinkel

$$\tan(\phi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Resonans i seriekrets

resonans-
vinkel-
frekvens

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

godhetstal

$$Q = \frac{\omega_{res} L}{R} = \frac{1}{\omega_{res} RC}$$

$$Q = \frac{\text{lagrad energi}}{\text{energiförlust per radian}}$$

5.6.2 Komplexa metoden

Strömmen och spänningen, tidsberoende samband

strömmen

$$\underline{I} = I e^{j\phi}$$

spänningen

$$\underline{U} = U e^{j\phi}$$

Impedanser

resistans

$$\underline{Z} = R$$

kapacitans

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$$

induktans

$$\underline{Z} = j\omega L$$

Samband mellan
spänning och
ström

$$\underline{U} = \underline{I} \underline{Z}$$

sambandet gäller även
för amplitudvärden

Spänningsfall över impedanser, tidsberoende samband

(Gäller även för amplitudvärden.)

resistans

$$U_R e^{j\phi} = I R$$

$$\phi = 0$$

kapacitans

$$U_C e^{j\phi} = I \frac{1}{j\omega C}$$

$$\phi = -\pi/2$$

induktans

$$U_L e^{j\phi} = I j\omega L$$

$$\phi = \pi/2$$

fasvinkel
spänning/ström

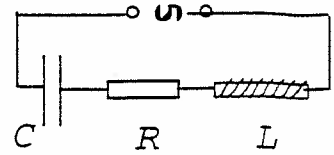
$$\phi = \arctan \frac{\text{Im}(\underline{Z})}{\text{Re}(\underline{Z})}$$

5 Elektricitetslära och magnetism

Seriekrets

impedans

$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$



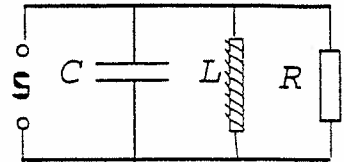
fasvinkel

$$\varphi_z = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Parallellkrets (Obs! Dessa samband gäller enbart om resistansen i induktansen försummas)

impedans

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$



fasvinkel

$$\varphi_z = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

5.7 Elektromagnetisk strålning

Beteckningar

| | | | | | |
|----------------|------------------------|------------------|----------------|------------------|------------------|
| A | area | m ² | p | rörelsemängd | kgm |
| B | magnetisk flödestäthet | T | Q | laddning | C |
| E | elektrisk fältstyrka | V/m N/C | S | Poyntings vektor | W/m ² |
| I | intensitet | W/m ² | t | tid | s |
| I _C | ledningsström | A | Φ _B | magnetiskt flöde | Wb |
| l | längd | m | Φ _E | elektriskt flöde | Vm |

Maxwells ekvationer (integralform)

Gauss sats

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{innesluten}}}{\epsilon_0}$$

Gauss sats för magnetism

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Amperes lag

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(I_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Faradays lag

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

**Samband mellan E
och B i tomma
rymden**

$$B = \mu_0 \epsilon_0 c E$$

**Ljushastigheten i
tomma rymden**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Energitransport

Poyntings vektor

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

energiflöde per tid och
area

intensitet

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{\max}^2$$

tidsmedelvärdet av S

Strålningstryck

$$\frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{EB}{\mu_0 c}$$

rörelsemängd per area

