FK2003 - Kvantfysikens principer, Fysikum, Stockholms universitet
Tentamensskrivning, onsdag 7e mars 2018, kl 17:00 - 22:00

Läs noggrant genom hela tentan först. Börja med uppgifterna som du tror du klarar bäst!
Förklara tydligt ditt resonemang och ge rätt enhet när det behövs.
Hela tentan omfattar 7 frågor. Frågor 1 och 4 ger 5 poäng, de övriga 6 poäng (max 40 poäng).
Betygsgänser: F $\leq$ 18, Fx: 18.5, E: 20, D: 24, C: 28, B: 32, A: 36.
Tillåtna hjälpmedel: miniräknare (ej grafisk) och bifogat formelsamling.

Lycka till! Eddy Ardonne

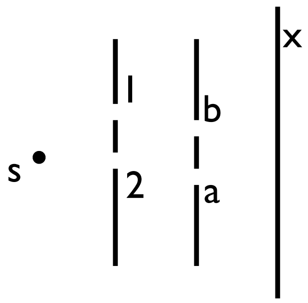
1. Korta frågor.

   a. (1p) Ge ett exempel på en partikel som är en boson samt ett exempel på en partikel som är en fermion.

   b. (1p) Varför kräver man att en vågfunktion är normerad?

   c. (1p) Vad är ett snärjt (eller sammanflätat) tillstånd?

   d. (2p) Vi har en oändlig potentialgrop, d.v.s. $V(x) = 0$ för $0 < x < L$ och $V(x) = \infty$ annars. Skissa kvalitativt vågfunktionerna av de två bundna tillstånden med lägst och näst lägst energi. Vad är kvoten av de här energierna?



2. Vi gör ett dubbelspaltexperiment med elektroner, som skickas från en källa s till en första vägg med två spalter 1 och 2. Det finns ytterligare en vägg med två spalter a och b. Till sist detekteras elektronerna på en skärm där x betecknar positionen där elektronen träffar skärmen.

   a. (2p) Vad är sannolikheten att en elektron som skickas från källan detekteras i x? Använd Diracnotation, d.v.s. amplituden att en elektron från källan åker genom spalt 1 är $\langle 1|s\rangle$, osv.

   b. (2p) Nu stänger vi hål 2, och placerar en lampa samt detektorer vid spalterna a och b. Lampans ljus har en våglängd som är *mycket* längre än avståndet mellan spalterna a och b. Vad blir sannolikheten att en elektron detekteras i x?

   c. (2p) Nu ändrar vi successivt våglängden av ljuset i uppgift b. så att den blir kortare och kortare. Beskriv vad som händer.

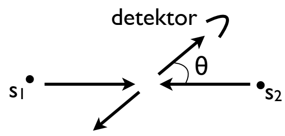
3. Vi skickar spinn $s = 1$ partiklar genom tre Stern-Gerlach apparater, som är orienterade i tre olika riktningar, S, T och R. Den första apparaten släpper genom partiklar i tillståndet $|-S\rangle$. Den andra apparaten släpper genom partiklar i tillstånden $|0T\rangle$ och $|+T\rangle$. Den tredje apparaten släpper genom partiklar i tillståndet $|-R\rangle$.

   a. (2p) Beskriv apparaterna i Feynmans notation, och ge amplituden för händelsen att en partikel som har kommit genom den första apparaten kommer ut ur den tredje.

   b. (2p) Besvara samma fråga som i a. med skillnaden att den andra apparaten släpper genom alla partiklar. Motivera ditt svar!

   c. (2p) Besvara samma fråga som i a., men nu med skillnaden att den andra apparaten är i samma riktning som den första (så nu släpper den genom partiklar i tillstånden $|0S\rangle$ och $|+S\rangle$).

4. Två partiklar som skickas från källor s_1 och s_2 sprids mot varandra. Amplituden att spridningen sker med vinkel θ är $f(\theta)$. Vid vinkel θ finns en detektor, som registrerar partiklar (oberoende av vilken typ av partiklar det handlar om), se figuren.



   a. (1p) Rita de möjliga processerna där en partikel hamnar i detektorn vid vinkel θ.
   b. (1p) Vad är sannolikheten att en partikel detekteras i detektorn, om partiklarna från s_1 och s_2 är identiska fermioner?
   c. (1p) Vad är sannolikheten att en partikel detekteras i detektorn, om partiklarna från s_1 och s_2 är samma typ av bosoner, men med olika s_z värden?
   d. (1p) Vad är sannolikheten att en partikel detekteras i detektorn, om partiklarna från s_1 och s_2 är icke kvantmekaniska partiklar?
   e. (1p) Vad blir sannolikheterna i uppgifterna b, c och d om vinkeln $\theta = \pi/2$?

5. Vi har en stor uppsättning $s = \frac{1}{2}$ partiklar, som alla är i tillståndet som beskrivs (i s_z basen) av $|\psi\rangle = A(\frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle - \frac{1}{2}|-\rangle)$. A är en positiv, reell konstant och en mätning av s_z ger för tillståndet $|+\rangle$ värdet $s_z = +\hbar/2$, och för $|-\rangle$ värdet $s_z = -\hbar/2$.

   a. (2p) Bestäm A, så att tillståndet $|\psi\rangle$ är normerat.
   b. (2p) Bestäm medelvärdet av s_z (d.v.s. $\langle s_z\rangle$) för de här partiklarna.
   c. (2p) Beräkna sannolikheten att en partikel i tillstånd $|\psi\rangle$ kommer genom en Stern-Gerlach apparat som släpper genom $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|-\rangle$.

6. Vi betraktar en NH_3 molekyl, och gör tre stycken mätningar på den, direkt efter varandra (så det är ingen tidsutveckling mellan mätningarna). I den första mätningen, mäter vi positionen av kväveatomen, och får att den är 'nere', eller $|2\rangle$. I den andra mätningen, mäter vi kväveatomens energi, och får resultatet $E = E_{\mathrm{II}} = E_0 - A$. I den tredje mätningen mäter vi igen positionen av kväveatomen.

   a. (3p) Vad kan vi säga om resultatet av den tredje mätningen?
   b. (3p) Förklara om molekylen befinner sig i ett stationärt tillstånd eller ej efter den tredje mätningen.

7. Vi betraktar en partikel med massa m i en kvadratsik potential $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$, med ω en konstant. Partikeln beskrivs av den tidsoberoende vågfunktionen $\phi(x) = A_0 e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$, med A_0 en normeringskonstant, som *inte* ska beräknas.

   a. (3p) Visa att $\phi(x)$ uppfyller den tidsoberoende Schrödingerekvationen och bestäm den motsvarande energin E.
   b. (2p) För den här potentialen ges de möjliga energierna av $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, med $n = 0, 1, 2, \ldots$. De tidsoberoende vågfunktionerna för tillstånden $|n\rangle$ skrivs som $\phi_n(x)$. Vad blir den tidsberoende vågfunktionen $\psi(x, t)$ för en partikel som vid $t = 0$ befinner sig i tillståndet $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle$? Ge ditt svar i termer av en eller flera $\phi_n(x)$.
   c. (1p). Är tillståndet i uppgift b ett stationärt tillstånd? Förklara ditt svar.

Liten Formelsamling

Partiklar – vågor

$E = \hbar\omega \qquad \omega = 2\pi\nu$

$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \qquad k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$

Kvantformalism

$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$

$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|\phi\rangle = \sum_i c_i|i\rangle$

$\sum_i |c_i|^2 = 1$

$\langle\phi|\chi\rangle = \langle\chi|\phi\rangle^*$

$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$ (eller |)

$\langle\chi|A|\phi\rangle = \sum_{i,j}\langle\chi|i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\phi\rangle$

Spinn 1/2

$$|+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|+\rangle_x \;+\; |-\rangle_x\, \right)$$

$$|-\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\,|+\rangle_x \;+\; |-\rangle_x\, \right)$$

där $|+\rangle_z$ betecknar spinn upp tillståndet m a p z-axeln, etc.

Tidsutveckling

$$i\hbar\frac{dc_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}c_j(t)$$

Specialfall:

Två bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$|\Phi\rangle_t = c_1(t)|1\rangle \;+\; c_2(t)|2\rangle$

$$c_1(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

$$c_2(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$|I\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle \;-\; |2\rangle \right)$ energi $E_0 + A$

$|II\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle \;+\; |2\rangle \right)$ energi $E_0 - A$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi(x,t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\psi_E(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\phi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\phi(x) = E\phi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } \ 0 \le x \le L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\ , \quad e = 1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

$$m_{\text{proton}} = 1,67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

$$m_{\text{neutron}} = 1,67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Trigonometriska funktioner

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos^2(\alpha) = \tfrac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))\ , \quad \sin^2(\alpha) = \tfrac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$$

Tenta FK2003; 2018-03-07

1) a) Boson: α-kärna, ~~pho~~ foton, H-atom, ...

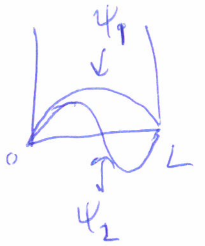
Fermion: elektron, proton, neutron, neutrino, ...

b) Då är totala sannolikhet att ~~hitta~~ mäta något av de möjliga mätvärden 1.

c) Det är ett tillstånd ~~som~~ för 2 (eller fler) partiklar som inte kan skrivas som ett produkttillstånd.

d) De två vågfunktionerna: $\psi_1 \sim \sin(\pi x/L)$

$\psi_2 \sim \sin(2\pi x/L)$

↳ 

Energin av tillstånden: $E_n \propto n^2$; så kvoten blir $E_2/E_1 = 4$.

2 a) Med Dirac notation blir sannolikhet:

$$P = \cancel{|\langle x|1\rangle\langle 1|S\rangle} + |\langle x|a\rangle\langle a|1\rangle\langle 1|S\rangle + \langle x|a\rangle\langle a|2\rangle\langle 2|S\rangle + \langle x|b\rangle\langle b|1\rangle\langle 1|S\rangle + \langle x|b\rangle\langle b|2\rangle\langle 2|S\rangle|^2$$

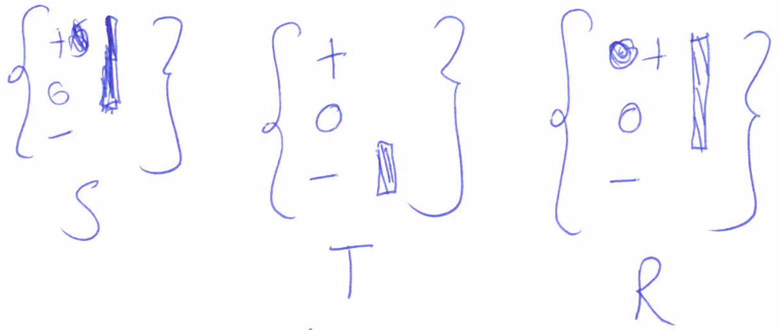
b) Elektronen ~~Ljuset~~ kan bara åka genom spalt ~~hål~~ 1, inte 2. Desutom har vi en lampa hos spalterna a och b. Våglängden är mycket längre än avståndet mellan a och b, så vi vet ändå inte vilken väg ljuset tar. Så vi har interferens!

$$P = |\langle x|a\rangle\langle a|1\rangle\langle 1|S\rangle + \langle x|b\rangle\langle b|1\rangle\langle 1|S\rangle|^2$$

c) När våglängden är så kort att ~~h~~ vi kan ser vilken spalt elektronerna ~~fotonerna~~ tar, förlorar vi interferens, och ska addera sannolikheterna:

$$P = |\langle x|a\rangle\langle a|1\rangle\langle 1|S\rangle|^2 + |\langle x|b\rangle\langle b|1\rangle\langle 1|S\rangle|^2$$

3) a) Stern-Gerlach apparater med Feynman:



Amplitud för att komma genom 3:e när man har kommit genom 1:a:

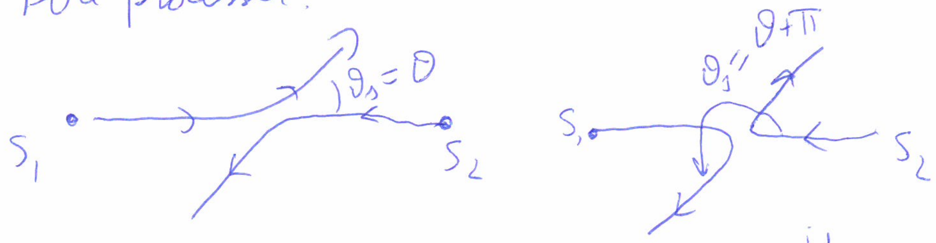
$$\langle -R|+T\rangle\langle +T|-S\rangle + \langle -R|0T\rangle\langle 0T|-S\rangle$$

b) Amplituden blir "först": $\langle -R|+T\rangle\langle +T|-S\rangle + \langle -R|0T\rangle\langle 0T|-S\rangle + \langle -R|-T\rangle\langle -T|-S\rangle$,

men det är samma som $\langle -R|-S\rangle$, eftersom andra apparaten gör ingenting!

c) Nu är andra apparaten i S riktning, så den blockerar alla partiklar som kommer genom 1:a apparaten, så amplituden blir noll!

4 a) Två processer:



b) Vi kan inte skilja processerna, och vi har id. fermioner, så vi måste <u>subtrahera</u> amplituderna!

$$P = |f(\theta) - f(\theta + \pi)|^2$$

c) Nu har vi bosoner, men vi kan ~~s~~ skilja de åt, p.g.a att de har olika kvanttal. Så, vi måste addera sannolikheterna

$$P = |f(\vartheta)|^2 + |f(\vartheta+\pi)|^2$$

d) Vi kan alltid skilja åt icke-kvant mekaniska partiklar, så vi måste, som i c), addera sannolikheterna!

$$P = |f(\vartheta)|^2 + |f(\vartheta+\pi)|^2.$$

e) Nu är ~~sa~~ vinkeln $\vartheta = \pi/2$, så vi har ~~$f(\vartheta)$~~ $f(\pi/2)$ och $f(3\pi/2)$. Men de är samma, p.g.a. symmetrin runt ~~d~~ axeln. Så då får vi:

b): $P = |f(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{3\pi}{2})|^2 = |f(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{2})|^2 = 0$ (fermioner)

c) och d): $P = |f(\frac{\pi}{2})|^2 + |f(\frac{\pi}{2})|^2 = 2|f(\frac{\pi}{2})|^2$ (skiljbara partiklar).

5 a) Tillståndet är: $|\psi\rangle = A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle - \frac{1}{2}|-\rangle\right)$.

Normering kräver: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, eller (använd $\langle+|-\rangle = 0$, $\langle+|+\rangle = \langle-|-\rangle = 1$)

$$|A|^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\langle+|+\rangle + |A|^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2\langle-|-\rangle$$

$$= |A|^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = |A|^2\frac{7}{12} = 1,$$ så om A är reell och positiv får vi $A = +\cancel{\sqrt{\frac{7}{12}}}\sqrt{\frac{12}{7}}$

$$|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{7}}|+\rangle - \sqrt{\frac{3}{7}}|-\rangle$$

b) Medelvärdet av S_z:

$$\langle S_z \rangle = +\frac{\hbar}{2} P(S_z = +\frac{\hbar}{2}) - \frac{\hbar}{2} P(S_z = -\frac{\hbar}{2})$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 - \frac{\hbar}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\frac{4}{7} - \frac{3}{7}\right) = \frac{\hbar}{14}.$$

c) Apparaten släpper $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|-\rangle$

genom. $|\phi\rangle$ är normerat:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 + \left|i\sqrt{\frac{2}{3}}\right|^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Sannolikheten blir:

$$P = |\langle\phi|\psi\rangle|^2 \quad \text{OBS: } \langle\phi| = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle+| \underset{\uparrow}{-} i\sqrt{\frac{2}{3}}\langle-|$$

$(\langle+|-\rangle = \langle-|+\rangle = 0)$

Då har vi:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{7}}\underbrace{\langle+|+\rangle}_{=1} - i\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right)\underbrace{\langle-|-\rangle}_{=1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{21}} + i\sqrt{\frac{2}{7}}$$

Så: $|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{21}} + i\sqrt{\frac{2}{7}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{21}} - i\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$

$$= \frac{4}{21} + \frac{2}{7} = \frac{10}{21}$$

6)

a) Efter andra mätningen är molekylen i tillståndet $|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$, eftersom vågfunktionen har kollapsat efter andra mätningen. Så, om vi genast gör en mätning av positionen, får vi ~~to~~ position '1' (uppe), med sannolikhet $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$, och position '2' (nere) med $P = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$.

b) Efter 3° mätningen är ~~II~~ tillståndet, genast efter mätningen $|1\rangle$ eller $|2\rangle$,
De här tillstånden är <u>inte</u> stationära, de är en kombination av energitillstånd:

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|I\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|II\rangle, \text{ och } |2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|I\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|II\rangle.$$

Bara energitillstånden $|I\rangle$ och $|II\rangle$ är stationära!

7 a) Tidsoberoende Schrödinger ekvationen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + V(x)\phi(x) = E\phi(x), \text{ med } V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

$$\phi_0(x) = A_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

Vi behöver $\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)$; $\quad \frac{d}{dx}(\phi(x)) = A_0\left(\frac{d}{dx} - \frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)e^{-m\omega x^2/2\hbar}$

$$= A_0\left(-\frac{\cancel{2}m\omega x}{\cancel{2}\hbar}\right)e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

Så: $\frac{d^2}{dx^2} = A_0\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right)e^{-m\omega x^2/2\hbar} + A_0\left(-\frac{m\omega x}{\hbar}\right)\frac{d}{dx}e^{-m\omega x^2/2\hbar}$

$$= A_0\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right)e^{-m\omega x^2/2\hbar} + A_0\left(-\frac{m\omega x}{\hbar}\right)\left(-\frac{m\omega x}{\hbar}\right)e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

$$= A_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar}\left[-\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{m^2\omega^2x^2}{\hbar^2}\right]$$

Då blir vänsterled av Schrödinger ekvationen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + \frac{m\omega^2}{2}x^2\phi(x)$$

$$= -\frac{m\omega}{\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)A_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{m^2\omega^2 x^2}{\hbar^2}A_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$
$$+\frac{m\omega^2}{2}x^2 A_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

$$= +\frac{\omega\hbar}{2}A_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}A_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}A_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

$$= \frac{\omega\hbar}{2}A_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

Högerled av SE: $E\phi(x) = E A_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar}$, så vi får att $E = \frac{\omega\hbar}{2}$, och då uppfyller $\phi(x)$ Schrödinger ekvationen!

b) Möjliga energi värden: $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$

Tid $t=0$: har vi en partikel i tillstånd $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle$, så tidsoberoende biten av våg funktion

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_3(x)$$

Tidsberoende biten ges av $e^{-iEt/\hbar}$, så vi får:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{3}{2}\hbar\omega t/\hbar}\phi_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{7}{2}\hbar\omega t/\hbar}\phi_3(x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3i\omega t/2}\phi_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i7\omega t/2}\phi_3(x)$$

c) Tillståndet är inte stationär, ~~det~~ eftersom det är en superposition av två tillstånd med olika energier!