FK2003 - Kvantfysikens principer, Fysikum, Stockholms universitet
Tentamensskrivning, onsdag 21 december 2016, kl 17:00 - 22:00

Läs noggrant genom hela tentan först. Börja med uppgifterna som du tror du klarar bäst!
Förklara tydligt ditt resonemang och ge rätt enhet när det behövs.
Hela tentan omfattar 7 frågor, maximalt antal poäng är 40.
Betygsgänser: F $\leq$ 18, Fx: 18.5, E: 20, D: 24.5, C: 29, B: 33.5, A: 38.
Tillåtna hjälpmedel: miniräknare (ej grafisk) och bifogat formelsammling.

Lycka till! Eddy Ardonne

1. Korta frågor.

   a. (1p) Ge ett exempel på en boson och en fermion.

   b. (1p) Vad innebär Paulis uteslutningsprincip?

   c. (1p) Vad är ett stationärt tillstånd?

   d. (1p) Antar att vi utför ett dubbelspaltexperiment med elektroner, som visar interferens. Nu minskar man hur snabbt elektronerna skickas efter varandra, så att det bara finns en elektron mellan källan och skärmen i taget. Beskriv vad händer med interferensmönstret.

   e. (1p) Antar att vi utför ett experiment för att testa en Bell-olikhet, och man får att olikheten inte är uppfylld. Vad har man visat då?

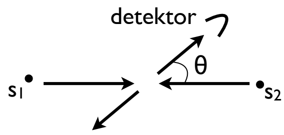
2. Vi skickar spinn $s = 1/2$ partiklar genom tre Stern-Gerlach apparater, som är orienterade i tre olika riktningar, S, T och R. Den första apparaten blockerar partiklar i tillståndet $|-S\rangle$. Den andra apparaten blockerar partiklar i tillståndet $|+T\rangle$. Den tredje apparaten blockerar partiklar i tillståndet $|-R\rangle$.

   a. (2p) Beskriv apparaterna i Feynmans notation, och ge amplituden för händelsen att en partikel som har kommit genom den första apparaten kommer ut ur den tredje.

   b. (2p) Besvara samma fråga som i a., men med skillnaden att den andra apparaten släpper genom alla partiklar. Motivera ditt svar!

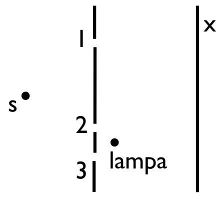
   c. (2p) Vi kan nu ändra på den andra och tredje Stern-Gerlach-apparaten men kan inte blockera båda strålar i en apparat. Beskriv två möjliga ändringar, som var för sig leder till att ingen partikel kommer ut ur tredje apparaten.

3. Två partiklar som skickas från källor s_1 och s_2 sprids mot varandra. Amplituden att spridningen sker med vinkel θ är $f(\theta)$. Vid vinkel θ finns en detektor, som registrerar partiklar (oberoende av vilken typ av partiklar det handlar om), se figuren.



   a. (1p) Vad är sannolikheten att en partikel detekteras i detektorn, om partiklarna från s_1 och s_2 är protoner respektive heliumkärnor?
   b. (1p) Vad är sannolikheten att en partikel detekteras i detektorn, om partiklarna från s_1 och s_2 är protoner med samma spinn?
   c. (1p) Vad är sannolikheten att en partikel detekteras i detektorn, om partiklarna från s_1 och s_2 är heliumkärnor (den vanliga formen, med två neutroner, som har $s = 0$)?
   d. (1p) Vad blir sannolikheterna i uppgifterna b, c och d om vinkeln $\theta = \pi/2$?

4. Vi gör ett 'tripplespaltexperiment' med elektroner, som skickas från en källa s till en en vägg med tre hål 1, 2 och 3. Avståndet mellan hålen 2 och 3 är mycket mindre än avståndet mellan hålen 1 och 2. Elektronerna detekteras på en skärm där x betecknar positionen där elektronen träffar skärmen. Mellan hålen 2 och 3 finns en lampa.



   a. (2p) Först gör vi ett experiment med lampan släckt. Vad är sannolikheten att en elektron detekteras i x? Använd Diracnotation, d.v.s. amplituden att en elektron från källan åker till hål 1 är $\langle 1|s\rangle$, osv.
   b. (2p) Nu gör vi ett experiment med lampan på. Ljustets våglängd är valt på så sätt att vi inte kan skilja om en elektron åker genom spalt 2 eller 3. Däremot vet vi om en elektron åker genom spalt 1 eller inte. Vad blir sannolikheten att en elektron detekteras i x?
   c. (2p) Nu ändrar vi successivt våglängden av ljuset i uppgift b. så att den blir längre och längre. Beskriv vad som händer med interferensmönstret.

5. Vi har en stor uppsättning $s = 1$ partiklar, som alla är i tillståndet som beskrivs (i s_z basen) av $|\psi\rangle = a(i|+\rangle + \sqrt{5}|0\rangle - \sqrt{2}|-\rangle)$. a är en positiv, reell konstant.
   a. (1p) Bestäm a, så att tillståndet $|\psi\rangle$ är normerat.
   b. (2p) Bestäm medelvärdet av s_z (d.v.s. $\langle s_z\rangle$) för de här partiklarna.
   c. (2p) Partiklarna skickas genom en Stern-Gerlach apparat A som beskrivs av

$$\langle +|A|+\rangle = \langle +|A|-\rangle = \langle -|A|+\rangle = \langle -|A|-\rangle = 1/2 \qquad \langle 0|A|0\rangle = 1$$
$$\langle +|A|0\rangle = \langle 0|A|+\rangle = \langle 0|A|-\rangle = \langle -|A|0\rangle = 0\ .$$

   Beräkna sannolikheten att en partikel som skickas genom apparaten hamnar i tillståndet $|-\rangle$.
   (Den här apparaten släpper genom partiklar med $s_x = \pm\hbar$, och blockerar partiklar med $s_x = 0\hbar$.)
   d. (2p) Skriv A som matris, och beräkna A^2. Förklara svaret som du får.

6. Vi betraktar en NH_3 molekyl, som vid tidpunkt $t = 0$ är i tillståndet $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|2\rangle$. $|1\rangle$ och $|2\rangle$ är tillstånd där kväveatomen befinner sig på en viss sida av väteatomerna, se formelsamlingen.

   a. (2p) Ge $|\psi(0)\rangle$ i termer av tillstånden $|I\rangle$ och $|II\rangle$, som har bestämd energi.

   b. (1p) Är $|\psi(t)\rangle$ ett stationärt tillstånd? Förklara ditt svar.

   c. (2p) Vid tidpunkt $t = 0$ gör vi en mätning av molekylens energi. Vad är sannolikheten att mäta E_{II}? Är sannolikheten att mäta E_{II} tidsberoende?

   d. (1p) Om vi gör en mätning av läget, är då sannolikheten att hitta molekylen i tillståndet $|1\rangle$ tidsberoende eller inte? Förklara kortfattat dit svar.

7. Vi betraktar en partikel med massa m i potentialen $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ i en dimension. En möjlig vågfunktion, vid tidpunkt $t = 0$, är $\phi(x) = e^{-\alpha x^2}$ (den här vågfunktionen är inte normerad).

   a. (3p) Hamiltonianen ges av $H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$. Hitta de värden för α så att vågfunktionen uppfyller den tidsoberoende Schrödingerekvationen.

   b. (1p) Förklara vilket värde för α man måste välja för att få en fysikaliskt lösning.

   c. (1p) Vad är energin för den här lösningen?

   d. (1p) Vad blir den tidsberoende vågfunktionen $\psi(x, t)$?

Liten Formelsamling

Partiklar – vågor

$$E = \hbar\omega \qquad \omega = 2\pi\nu$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$$

Kvantformalism

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$$

$$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|\phi\rangle = \sum_i c_i|i\rangle$$

$$\sum_i |c_i|^2 = 1$$

$$\langle\phi|\chi\rangle = \langle\chi|\phi\rangle^*$$

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1 \text{ (eller } |)$$

$$\langle\chi|A|\phi\rangle = \sum_{i,j}\langle\chi|i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\phi\rangle$$

Spinn 1/2

$$|+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\, |+\rangle_x \;+\; |-\rangle_x \,\right)$$

$$|-\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\, -\, |+\rangle_x \;+\; |-\rangle_x \,\right)$$

där $|+\rangle_z$ betecknar spinn upp tillståndet m a p z-axeln, etc.

Tidsutveckling

$$i\hbar\frac{dc_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}c_j(t)$$

Specialfall:

Två bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$$|\Phi\rangle_t = c_1(t)|1\rangle \;+\; c_2(t)|2\rangle$$

$$c_1(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

$$c_2(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\, |1\rangle \;-\; |2\rangle \,\right) \qquad \text{energi } E_0 + A$$

$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\, |1\rangle \;+\; |2\rangle \,\right) \qquad \text{energi } E_0 - A$$

Tenta FK2003,

2016-12-21.

1) Korta frågor.

a) Boson: foton, H atom, He-kärna, Higgs boson, ...

Fermion: elektron, proton, neutron, neutrino, quark, ...

b) Paulis uteslutningsprincip innebär att två <u>identiska</u> fermioner (med samma spinn, osv) inte kan vara i samma tillstånd.

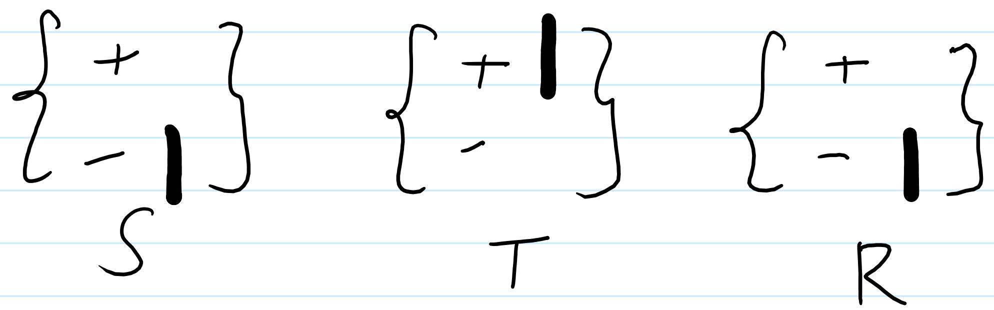
c) Ett stationärt tillstånd är ett tillstånd med bestämd energi E. Tidsberoendet ges av en <u>faktor</u> $e^{-iEt/\hbar}$. Alla <u>sannolikheter</u> för ett stationärt tillstånd är <u>tidsoberoende</u>.

d) Även om man skickar elektronerna efter varandra, ger de upphov till ett interferensmönster om man har.

interferens mönster, om man har detekterat tillräckligt många elektroner.

e) Man har visat att man inte kan beskriva naturen i termer av en deterministisk, klassisk teori.

2 a) SG-apparater i Feynmans notation:



Amplituden blir:

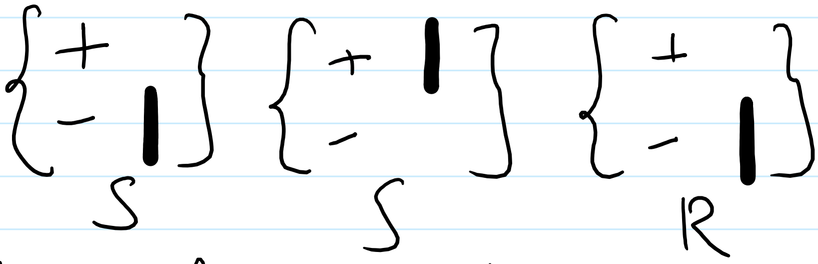
$$\langle +R | -T \rangle \langle -T | +S \rangle .$$

b) Nu har partiklarna 2 sätt att åka genom andra apparaten, som vi inte kan urskilja. Så vi måste addera amplituderna:

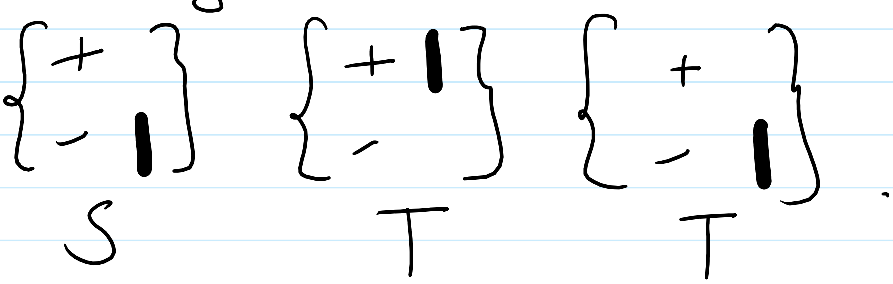
$$\langle +R | +T \rangle \langle +T | -S \rangle + \langle +R | -T \rangle \langle -T | -S \rangle$$

men $|+T\rangle\langle +T| + |-T\rangle\langle -T| = \mathbb{1}$, så vi har: $\langle +R | -S \rangle$, som vi kunde ha vi har: $\langle +K \mid -S \rangle$, som vi kunde har skrivit genast, eftersom nu gör 2a apparaten ingenting.

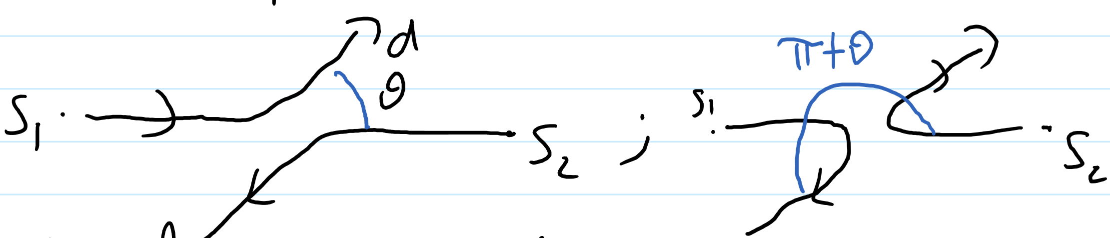
c) Vi kan vrida 2a apparaten så att den är i S-riktning, då kommer inga partiklar genom 2a apparaten:



Vi kan också vrida tredje apparaten till riktning T:



3 Vi har två möjliga processer som leder till en partikel i detektorn:



Amplituderna är:

$f(\vartheta)$ och $f(\pi+\vartheta) = f(\pi-\vartheta)$

p.g.a. symmetri.

a) Vi har två olika partiklar, så vi måste addera sannolikheterna:

$$P = |f(\vartheta)|^2 + |f(\pi+\vartheta)|^2.$$

b) Nu har vi identiska fermioner, så vi måste subtrahera amplituderna:

$$P = |f(\vartheta) - f(\pi+\vartheta)|^2$$

c) Nu har vi identiska bosoner, så vi måste addera amplituderna:

$$P = |f(\theta) + f(\pi+\theta)|^2.$$

d) Nu tittar vi vid $\theta = \pi/2$, och använder att $f(\pi+\theta) = f(\pi-\theta)$, så att, med $\theta = \pi/2$:

$f(3/2\,\pi) = f(1/2\,\pi)$. Nu blir svaren för a, b, c:

$P = 2|f(\pi/2)|^2$ (olika partiklar)

$P = 0$ (id. fermioner)

$P = 0$ (id. fermioner)

$P = 4|f(\pi/2)|^2$ (id. bosoner)

4. a) Det finns tre olika sätt för en elektron att hamnar vid X, som inte kan urskiljas. Så vi måste addera amplituderna, och sedan ta absolut belopp:

$$P = |\langle X|1\rangle\langle 1|S\rangle + \langle X|2\rangle\langle 2|S\rangle + \langle x|3\rangle\langle 3|S\rangle|^2$$

b) Nu kan vi urskilja hål 1 från två och tre, så slh. blir en summa av två termer (2 och 3 kan inte urskiljas)

$$P = |\langle x|1\rangle\langle 1|S\rangle|^2 + |\langle x|2\rangle\langle 2|S\rangle + \langle x|3\rangle\langle 3|S\rangle|^2$$

c) Våglängden blir större, så upplösningförmoga blir mindre. När det har blivit så dåligt att vi inte vet längre om en foton kom mer inte vet längre om en foton kommer från hål 1, 2 eller 3, då går det inte längre att urskilja någon av de tre sätt för en elektron att hamna i X. Så, interferensen kommer <u>helt tillbaka</u>!

5 a) För ett normerat tillstånd har vi:

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = A^2 \left[|i|^2 + |\sqrt{5}|^2 + |-\sqrt{2}|^2 \right]$$
$$= A^2 \left[1 + 5 + 2 \right] = 8A^2 = 1.$$

Så, vi har $A = 1/\sqrt{8} = 1/2\sqrt{2}$, eftersom $A > 0$.

b) Medelvärdet av S_z är:

$$\langle S_z \rangle = +\hbar\, P(S_z = +\hbar) + 0\hbar\, P(S_z = 0\hbar) + (-\hbar) P(S_z = -\hbar)$$

$$= \hbar \left| \frac{i}{2\sqrt{2}} \right|^2 + 0 \cdot |\sqrt{5}|^2 - \hbar \left| \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right|^2$$

$$= \hbar/8 + 0\hbar - \hbar/4 = -\hbar/8.$$

c) Apparaten beskrivs av $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|\psi\rangle$ ges av: $\psi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$|\psi\rangle$ ges av: $\psi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Tillståndet χ efter apparaten:

$$\chi = A\psi = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i - \sqrt{2} \\ 2\sqrt{5} \\ i - \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{, eller}$$

$$|\chi\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left((i - \sqrt{2})\,|+\rangle + 2\sqrt{5}\,|0\rangle + (i - \sqrt{2})\,|-\rangle \right)$$

Sannolikheten att få $S_z = -\hbar$ vid en mätning av S_z är

$$P(S_z = -\hbar) = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 |i - \sqrt{2}|^2$$

$$= \frac{1}{32}\left(1^2 + (\sqrt{2})^2\right) = 3/32$$

Frågan måste ändras!

d) $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, så

$$A^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$= A.$

Så, $A^2 = A$. Det ska vara så, eftersom att ha två lika SGA efter varandra är precis samma som att bara ha ett.

6 a) Vi har en NH_3 molekyl i tillstånd $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|2\rangle$.

$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$

$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$, så vi kan skriva:

$|I\rangle + |II\rangle = \sqrt{2}|1\rangle$, eller $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle + |II\rangle)$

På samma sätt: $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|I\rangle + |II\rangle)$.

Vi har då:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|I\rangle + |II\rangle\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|I\rangle + |II\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{3})|I\rangle + (1-\sqrt{3})|II\rangle\right]$$

b) $|\psi(0)\rangle$ är en superposition av två stationära tillstånd ($|I\rangle$ och $|II\rangle$) med <u>olika energier</u>, så $|\psi(t)\rangle$ är <u>inte</u>

med olika energier, så $|\psi(t)\rangle$ är inte stationär!

c) Med a) inser vi att

$$P(E=E_{II}) = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{3})\right|^2$$
$$= \frac{1}{8}\left|(1-\sqrt{3})\right|^2$$
$$= 1/8\,(4-2\sqrt{3})$$

Svaret beror inte på tiden, eftersom tidsberoendet ges av:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})\,e^{-iE_I t/\hbar}\,|I\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{3})\,e^{-iE_{II} t/\hbar}\,|II\rangle,$$ och

en extra fas i amplituden påverkar inte sannolikheten!

d) Sannolikhet att molekylen är i tillstånd $|1\rangle$ är tidsberoende, eftersom $|\psi(t)\rangle$ inte är stationär.

Explicit har vi:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{3})e^{-iE_I t/\hbar} + (1-\sqrt{3})e^{-iE_{II} t/\hbar}\right)|1\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\ldots (1+\sqrt{3}) e^{\ldots} \Big)|1\rangle$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-(1+\sqrt{3})e^{-iE_I t/\hbar} + (1-\sqrt{3})e^{-iE_{II} t/\hbar}\right)|2\rangle,$$

Så sannolikheterna är tidsberoende! $\lrcorner$

7a) $$H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$H(x)\,\phi(x) =$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}e^{-\alpha x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Derivatorna blir:

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = -2\alpha x\, e^{-\alpha x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = -2\alpha e^{-\alpha x^2} - 2\alpha x(-2\alpha x)e^{-\alpha x^2}$$

$$= -\left[2\alpha - 4\alpha^2 x^2\right]e^{-\alpha x^2}$$

Så vi har:

$$H(x)\,\phi(x) = \left[\frac{2\alpha\hbar^2}{2m} - \frac{4\alpha^2\hbar^2}{2m}x^2\right]e^{-\alpha x^2}$$

$$+\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 e^{-\alpha x^2}.$$

Schrödingerekvationen är:

$H(x)\,\phi(x) = E\,\phi(x)$ när termen proportionell

$H(x)\phi(x) = E\phi(x)$, så termen proportionell mot x^2 i $H(x)\phi(x)$ måste ta ut varandra:

$$-\frac{4\alpha^2\hbar^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 = 0, \text{ eller:}$$

$$\hbar^2 4\alpha^2 = 2m\left(\frac{1}{2}m\omega^2\right) = m^2\omega^2, \text{ så}$$

$$\alpha^2 = (m\omega/2\hbar)^2.$$

Det betyder att $\alpha = \pm(m\omega/2\hbar)$.

b) Vågfunktionen blir nu:

$$\phi(x) = e^{-(\pm m\omega/2\hbar)x^2} = e^{\mp(m\omega/2\hbar)x^2}$$

Vågfunktionen är inte normerat, så vi borde göra det.

Om $\alpha = -m\omega/(2\hbar)$ har vi: $\phi(x) = e^{+m\omega/(2\hbar)x^2}$,

och vi får: $\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(e^{m\omega/(2\hbar)x^2}\right)^2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{m\omega x^2/\hbar} \to \infty,$$ så vi kan inte

få en normerat vågfunktion (sannolikhet att hitta en partikel någonstans blir ∞)

att hitta en partikel någon stans blir ∞).

Så, vi måste välja $\alpha = m\omega/(2\hbar)$ och

$$\phi(x) = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

c) Med $\alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}$ har vi:

$$H(x)\,\phi(x) = \frac{2\alpha\hbar^2}{2m}\, e^{-\alpha x^2}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\frac{\hbar^2}{m}\, e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega\,\phi(x)$$, så $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

d) Den tidsberoende vågfunktionen blir: $\psi(x,t) = e^{-iEt/\hbar}\,\phi(x)$

$$= e^{-i\hbar\omega/2\cdot t/\hbar}\, e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)x^2}$$

$$= e^{-\omega t/2}\, e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)x^2}$$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi(x,t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\psi_E(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\phi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\phi(x) = E\phi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } \ 0 \le x \le L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\ , \quad e = 1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

$$m_{\text{proton}} = 1,67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

$$m_{\text{neutron}} = 1,67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Trigonometriska funktioner

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos^2(\alpha) = \tfrac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))\ , \quad \sin^2(\alpha) = \tfrac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$$