FK2003 - Kvantfysikens principer, Fysikum, Stockholms universitet
Tentamensskrivning, onsdag 16 december 2015, kl 17:00 - 22:00

Läs noggrant genom hela tentan först. Börja med uppgifterna som du tror du klarar bäst!
Förklara tydligt ditt resonemang och ge rätt enhet när det behövs.
Hela tentan omfattar 7 frågor. Frågor 1 och 3 ger 5 poäng, de övriga 6 poäng (max 40 poäng).
Betygsgänser: F $\leq$ 18, Fx: 18.5, E: 20, D: 24.5, C: 29, B: 33.5, A: 38.
Tillåtna hjälpmedel: miniräknare (ej grafisk) och bifogat formelsammling.

Lycka till! Eddy Ardonne

1. Korta frågor.

   a. (1p) Förklara kortfattat Paulis uteslutningsprincip.

   b. (1p) Förklara kortfattat Heisenbergs obestämdhetsrelation.

   c. (1p) Nämn två skillnader mellan bosoner och fermioner.

   d. (2p) Vi har en ändlig potentialgrop, d.v.s. $V(x) = 0$ för $0 < x < L$ och $V(x) = V_0 < \infty$ annars. Skissa kvalitativt vågfunktionen av det bundna tillståndet med lägst energi (som är mindre än V_0).

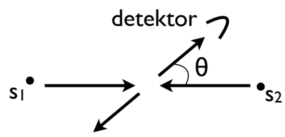
2. Vi skickar spinn $s = 1$ partiklar genom tre Stern-Gerlach apparater, som är orienterade i tre olika riktningar, S, T och R. Den första apparaten släpper genom partiklar i tillståndet $|0S\rangle$. Den andra apparaten släpper genom partiklar i tillstånden $|+T\rangle$ och $|-T\rangle$. Den tredje apparaten släpper genom partiklar i tillståndet $|-R\rangle$.

   a. (2p) Beskriv apparaterna i Feynmans notation, och ge amplituden för händelsen att en partikel som har kommit genom den första apparaten kommer ut ur den tredje.

   b. (2p) Besvara samma fråga som i a. med skillnaden att den andra apparaten släpper genom alla partiklar. Motivera ditt svar!

   c. (2p) Besvara samma fråga som i a., men nu med skillnaden att den andra apparaten är i samma riktning som den första (så nu släpper den genom partiklar i tillstånden $|+S\rangle$ och $|-S\rangle$).

3. Två partiklar som skickas från källor s_1 och s_2 sprids mot varandra. Amplituden att spridningen sker med vinkel θ är $f(\theta)$. Vid vinkel θ finns en detektor, som registrerar partiklar (oberoende av vilken typ av partiklar det handlar om), se figuren.



   a. (1p) Rita de möjliga processerna där en partikel hamnar i detektorn vid vinkel θ.

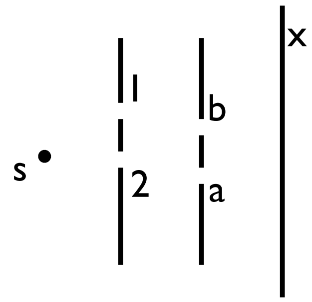
   b. (1p) Vad är sannolikheten att en partikel detekteras i detektorn, om partiklarna från s_1 och s_2 är olika?

   c. (1p) Vad är sannolikheten att en partikel detekteras i detektorn, om partiklarna från s_1 och s_2 är identiska bosoner?

   d. (1p) Vad är sannolikheten att en partikel detekteras i detektorn, om partiklarna från s_1 och s_2 är identiska fermioner?

   e. (1p) Vad blir sannolikheterna i uppgifterna b, c och d om vinkeln $\theta = \pi/2$?

4. Vi gör ett dubbelspaltexperiment med elektroner, som skickas från en källa s till en första vägg med två hål 1 och 2. Det finns ytterligare en vägg med två hål a och b. Till sist detekteras elektronerna på en skärm där x betecknar positionen där elektronen träffar skärmen.



   a. (2p) Vad är sannolikheten att en elektron detekteras i x? Använd Diracnotation, d.v.s. amplituden att en elektron från källan åker genom hål 1 är $\langle 1|s\rangle$, osv.

   b. (2p) Nu stänger vi hål b, och placerar en lampa vid hålen 1 och 2, så att vi vet om en elektron åker genom hål 1 eller 2. Vad blir sannolikheten att en elektron detekteras i x?

   c. (2p) Nu ändrar vi successivt våglängden av ljuset i uppgift b. så att den blir längre och längre. Beskriv vad som händer.

5. Vi har en stor uppsättning $s = \frac{1}{2}$ partiklar, som alla är i tillståndet som beskrivs (i s_z basen) av $|\psi\rangle = A(\frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle - \frac{1}{2}|-\rangle)$. A är en positiv, reell konstant och en mätning av s_z ger för tillståndet $|+\rangle$ värdet $s_z = +\hbar/2$, och för $|-\rangle$ värdet $s_z = -\hbar/2$.

   a. (2p) Bestäm A, så att tillståndet $|\psi\rangle$ är normerat.

   b. (2p) Bestäm medelvärdet av s_z (d.v.s. $\langle s_z\rangle$) för de här partiklarna.

   c. (2p) Beräkna sannolikheten att en partikel i tillstånd $|\psi\rangle$ kommer genom en Stern-Gerlach apparat som bara släpper genom $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|-\rangle$.

6. Vi betraktar en NH_3 molekyl, med bestämd energi $E = E_0 - A$, så molekylen befinner sig i tillstånd $|\mathrm{II}\rangle$, se formelsamlingen ($|1\rangle$ och $|2\rangle$ är tillstånd där kväveatomen befinner sig på en viss sida av väteatomerna).

   a. (2p) Vi mäter kväveatomens läge. Vad är sannolikheten att hitta kväveatomen på ena sidan om väteatomerna?

   b. (4p) Nu antar vi att molekylen befinner sig i tillstånd $|1\rangle$ vid tiden $t = 0$, d.v.s. kväveatomen är på en viss sida av väteatomerna. Vad är sannolikheten, som funktion av tiden t, att hitta kväveatomen på andra sidan av väteatomerna?

7. Vi betraktar en oändligt djup potentialgrop, $V(x) = 0$ om $0 \leq x \leq L$, och $V(x) = \infty$ annars. I potentialgropen befinner sig en partikel med massa m i tillstånd $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\rangle - |2\rangle\big)$, där $|n\rangle$ motsvarar ett tillstånd med energin E_n (se formelsamlingen).

   a. (2p) Skissa vågfunktionen vid $t = 0$ för $|\Phi\rangle$, d.v.s. $\Phi(x)$. Skissa även sannolikhetstätheten $|\Phi(x)|^2$.

   b. (2p) Vi gör en mätning av partikelns energi. Vilka värden kan vi få, och vad är deras sannolikhet?

   c. (2p) Vad är tidsutvecklingen för tillståndet $|\Phi\rangle$, d.v.s., vad är $\Phi(x,t)$?

Liten Formelsamling

Partiklar – vågor

$$E = \hbar\omega \qquad \omega = 2\pi\nu$$
$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$$

Kvantformalism

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$$
$$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|\phi\rangle = \sum_i c_i|i\rangle$$
$$\sum_i |c_i|^2 = 1$$
$$\langle\phi|\chi\rangle = \langle\chi|\phi\rangle^*$$
$$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1 \text{ (eller } | \text{)}$$
$$\langle\chi|A|\phi\rangle = \sum_{i,j}\langle\chi|i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\phi\rangle$$

Spinn 1/2

$$|+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ |+\rangle_x\ +\ |-\rangle_x\ \right)$$
$$|-\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ -\ |+\rangle_x\ +\ |-\rangle_x\ \right)$$

där $|+\rangle_z$ betecknar spinn upp tillståndet m a p z-axeln, etc.

Tidsutveckling

$$i\hbar\frac{dc_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}c_j(t)$$

Specialfall:

Två bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$$|\Phi\rangle_t = c_1(t)|1\rangle\ +\ c_2(t)|2\rangle$$
$$c_1(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$
$$c_2(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ |1\rangle\ -\ |2\rangle\ \right) \qquad \text{energi } E_0 + A$$
$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ |1\rangle\ +\ |2\rangle\ \right) \qquad \text{energi } E_0 - A$$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi(x,t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\psi_E(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\phi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\phi(x) = E\phi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } \; 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\;, \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

$$m_{\text{proton}} = 1,67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

$$m_{\text{neutron}} = 1,67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Trigonometriska funktioner

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos^2(\alpha) = \tfrac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))\;, \quad \sin^2(\alpha) = \tfrac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$$

Tenta FK2003;
2015-12-16.

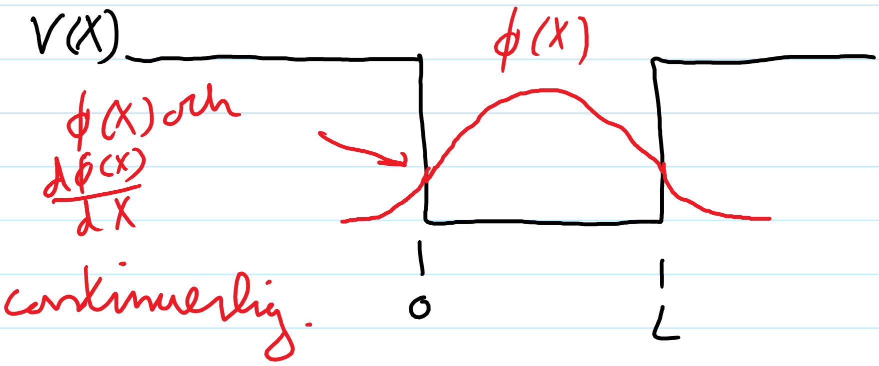
Fråga 1.

1a) Paulis uteslutningsprincip innebär att två identiska fermioner (med samma spin, osv) inte kan vara i samma tillstånd.

1b) Heisenbergs obestämdhetsrelation (för x och p_x) innebär att läget x och rörelsemängd p_x inte både kan vara bestämd med godtycklig noggrannhet samtidigt.

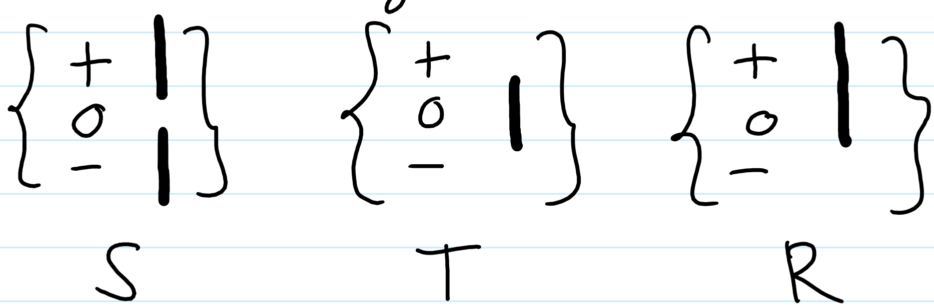
1c) * Bosoner har heltals spin, fermioner halvtals spinn.
* Identiska bosoner kan vara i samma tillstånd, id. fermioner inte.

1d) Med $V_0 \to \infty$: lägst energi tillstånd är $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$. Med V_0 ändlig har vi är sin(L). Med V_0 ändlig har vi att $\phi(x)$ inte är noll för $x<0$ ell. $x>L$, men exponentiell avtagande.



Fråga 2.

2 a) Tre Stern-Gerlach apparater:



Amplituden blir (vi har två icke-urskiljbara 'vägar' genom T):

$$\langle -R|+T\rangle\langle +T|0S\rangle + \langle -R|+T\rangle\langle +T|0S\rangle$$

2 b) Vi får en summa av tre termer:

$$\langle -R|+T\rangle\langle +T|0S\rangle + \langle -R|0T\rangle\langle 0T|0S\rangle$$

$$+\langle -R|-T\rangle\langle -T|0S\rangle$$, men:

$\mathbb{1} = |+T\rangle\langle +T| + |0T\rangle\langle 0T| + |-T\rangle\langle -T|$,

så vi har (T gör ingenting!):

$\langle -R | 0S\rangle$.

2c) De $|0S\rangle$ partiklar som kommer genom 1:a SGA blockeras i 2:a SGA, så amplituden är noll!

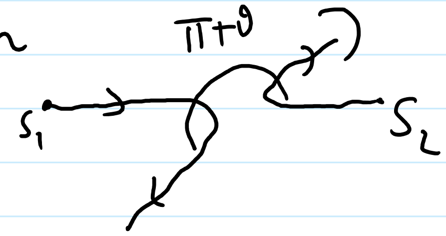
Eller: $\langle -R|+S\rangle\underbrace{\langle +S|0S\rangle}_{=0} + \langle -R|-S\rangle\underbrace{\langle -S|0S\rangle}_{=0}$

$= 0 + 0 = 0$.

Fråga 3.

3a) Processerna är:

och



OBS: $f(\pi+\theta) = f(\pi-\theta)$ p.g.a. symmetri.

3b) För olika partiklar adderas sannolikheter:

$$P = |f(\theta)|^2 + |f(\theta+\pi)|^2 = |f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2$$

3c) För identiska bosoner adderas amplituderna:

$$P = |f(\theta) + f(\pi-\theta)|^2.$$

3d) För identiska fermioner subtraheras amplituder

3 d) För identiska fermioner subtraheras amplituder

$$P = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2$$

3 e) För $\theta = \pi/2$ får vi:

olika: $P = 2|f(\pi/2)|^2$

id. bos $P = 4|f(\pi/2)|^2$

id. ferm. $P = 0$

Fråga 4.

4a) Vi har 4 bidrag, med amplituder som måste adderas:

$$P = |\langle x|a\rangle\langle a|1\rangle\langle 1|s\rangle + \langle x|a\rangle\langle a|2\rangle\langle 2|s\rangle + \langle x|b\rangle\langle b|1\rangle\langle 1|s\rangle + \langle x|b\rangle\langle b|2\rangle\langle 2|s\rangle|^2$$

4b) b är stängd, och vi vet om e^- 'tar' 1 eller 2, så sannolikheter måste adderas:

$$P = |\langle x|a\rangle\langle a|1\rangle\langle 1|s\rangle|^2 + |\langle x|a\rangle\langle a|2\rangle\langle 2|s\rangle|^2$$

4c) När λ blir längre, finns det en chans att vi inte vet om e^- tog 1 eller 2, så interferensen vi inte vet om e tog 1 eller 2, så interferensen försvinner så småning om.

Fråga 5.

5a) $|\psi\rangle = A/\sqrt{3}\,|+\rangle - \frac{A}{2}|-\rangle$

Vi vill ha: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

$\langle\psi|\psi\rangle = A^2/3\,\langle +|+\rangle + \frac{A^2}{4}\langle -|-\rangle = A^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$

$= A^2 \frac{7}{12}$

Så: $A = \sqrt{\frac{12}{7}} = 2\sqrt{3/7}$ (A reell och positiv).

5b) $P(s_z = +\frac{\hbar}{2}) = |\langle +|\psi\rangle|^2 = 4/7$

$P(s_z = -\frac{\hbar}{2}) = |\langle -|\psi\rangle|^2 = 3/7$

Så: $\langle s_z\rangle = \frac{4}{7}(+\frac{\hbar}{2}) + \frac{3}{7}(-\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{7}\frac{\hbar}{2}$.

5c) $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|-\rangle$ är normerat:

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$

Så, amplituden för att komma genom:

$\langle\phi|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{7}}\langle +|+\rangle + \left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\cdot -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\langle -|-\rangle$

$= \frac{2}{\sqrt{21}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2+\sqrt{6}).$

Sannolikhet:

$P = |\langle\phi|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{21}(2+\sqrt{6})^2 = \frac{1}{21}(4+4\sqrt{6}+6)$

$$P = |\langle \phi | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{21}(2+\sqrt{6})^2 = \frac{1}{21}(4+4\sqrt{6}+6)$$
$$= \frac{1}{21}(10+4\sqrt{6}).$$

Fråga 6.

6a) NH_3 molekyl, i tillstånd $|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$;
$E = E_0 - A$.

$|II\rangle$ är en energi tillstånd, så stationär.
Sannolikhet för att hitta N på ena sidan (säg tillstånd $|1\rangle$):
$$P_1 = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = |\langle 1|II\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1|1\rangle + \underbrace{\langle 1|2\rangle}_{=0})\right|^2$$
$$= \frac{1}{2}.$$
Likadant för $P_2 = |\langle 2|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}$.

6b) På tid $t=0$ är tillståndet $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$.
Vi vill veta chans att hitta molekylen i tillstånd $|2\rangle$, som funktion av t:
$$P_2(t) = |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2.$$
Allmänna lösning till TBSE:
$$c_1(t) = a/2 \; e^{-i(E_0-A)t/\hbar} + b/2 \; e^{-i(E_0+A)t/\hbar}$$
$$c_2(t) = a/2 \; e^{-i(E_0-A)t/\hbar} - b/2 \; e^{-i(E_0+A)t/\hbar}.$$

$c_1(0) = \frac{a+b}{2}$; $c_2(0) = \frac{a-b}{2}$, och $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$,

så: $a = b = 1$.

Då får vi: $c_1(t) = e^{-iE_0t/\hbar} \frac{1}{2}\left(e^{iAt/\hbar} + e^{-iAt/\hbar}\right)$

$$= e^{-iE_0t/\hbar} \cos(At/\hbar)$$

och $c_2(t) = e^{-iE_0t/\hbar} \frac{1}{2}\left(\frac{i}{i}\right)\left(e^{iAt/\hbar} - e^{-iAt/\hbar}\right)$

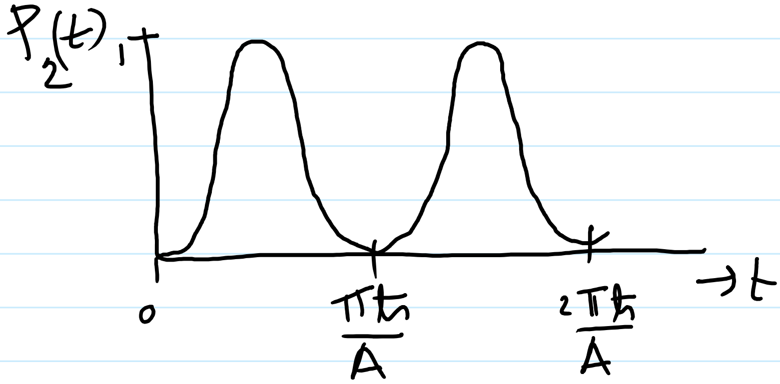
$$= e^{-iE_0t/\hbar}\, i \sin(At/\hbar)$$

Så: $|\psi(t)\rangle = e^{-iE_0t/\hbar}\left(\cos(At/\hbar)\,|1\rangle + i\sin(At/\hbar)\,|2\rangle\right)$

Vi får nu:

$$P_2(t) = \left|e^{-iE_0t/\hbar} \cdot i \cdot \sin(At/\hbar)\right|^2 = \sin^2(At/\hbar)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2At/\hbar).$$



Fråga 7.

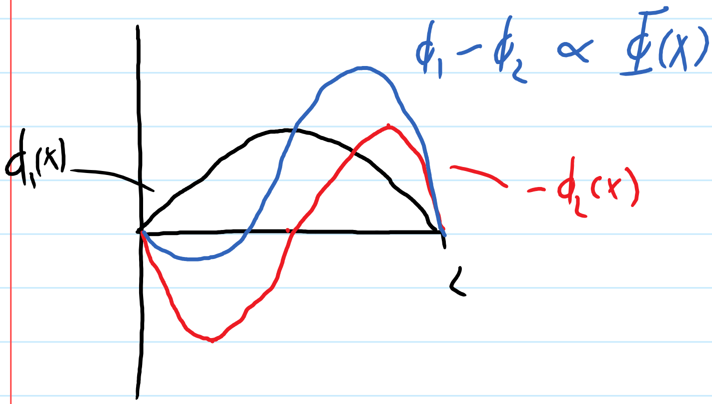
7a) $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |2\rangle\right)$.

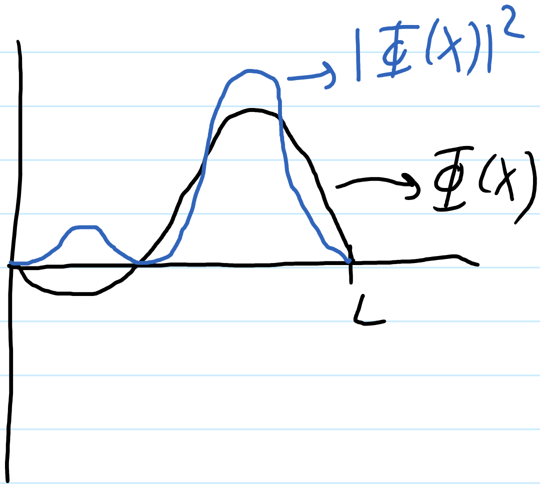
$$\Phi(x) = \langle x|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle x|1\rangle - \langle x|2\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\phi_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\phi_2(x) \text{ med}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_2(x) \text{, med}$$

$$\phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) ; \quad \phi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$





7b) De möjliga energi värden motsvarar den för $|1\rangle$ och $|2\rangle$. $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$, så

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} ; \quad E_2 = \frac{4\hbar^2\pi^2}{2mL^2} .$$

$$P(E = E_1) = |\langle 1 | \phi \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(E = E_2) = |\langle 2 | \phi \rangle|^2 = 1/2$$

7c) För ett stationärt tillstånd är tids utveckling

$$\psi(x,t) = e^{-iEt/\hbar} \phi(x).$$

Så, vi får:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_1 t/\hbar} \phi_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_2 t/\hbar} \phi_2(x).$$