Tentamen, Kvantfysikens principer
FK2003, 7,5 hp

Tid: 17:00-22:00, tisdag 3/3 2015
Hjälpmedel: utdelad formelsamling, utdelad miniräknare

Var noga med att förklara införda beteckningar och att motivera stegen i dina räkningar. Lösningarna ska vara tydliga och lätta att följa, och det ska klart framgå hur du har tänkt och att du har förstått. **Om inget annat anges i uppgiften, måste du motivera/förklara dina lösningar och svar för att få poäng.**

Maxpoäng är 36 p.
Betygsgränser: F: < 14, Fx: 14, E:18, D: 22, C: 25, B: 31, A: 34

Lycka till!

1.
Med utgångspunkt i vad du vet om identiska och icke-särskiljbara partiklar beskriv kortfattat grunderna för:

a) Fenomenet laser.

b) Grundämnenas periodiska system.

Var noga med att förklara sambandet med identiska partiklar och varför respektive fall fungerar enbart för bosoner eller enbart för fermioner. (4p)

2.
En ström av partiklar med spinn *S*=1 går in i en sekvens av tre Stern-Gerlach apparater. Den mittersta apparaten (*T*) är roterad i förhållande till de andra två (*S*). Rita respektive apparat enligt Feynmans notation och ange amplituden ut från den sista om:

a) Den första (*S*) blockerar $|+S\rangle$ och $|0S\rangle$, den sista (*S*) blockerar $|0S\rangle$ och $|-S\rangle$ medan den mellersta (*T*) blockerar $|+T\rangle$. (2p)

b) Den första (*S*) blockerar $|+S\rangle$ och $|-S\rangle$, den sista (*S*) blockerar $|+S\rangle$ och $|0S\rangle$ medan den mellersta (*T*) släpper igenom $|+T\rangle$, $|0T\rangle$ och $|-T\rangle$. (Skriv upp alla amplituder och motivera slutresultatet!). (2p)

3.
En partikel befinner sig i en oändlig (en-dimensionell) potentialgrop med bredden 7 Å, dvs den rör sig i potentialen $V(x) = 0$ för $0 < x < 7$ Å och $V(x) = \infty$ annars.

a) Bestäm vågfunktionerna och energierna för de två tillstånd som har lägst energi om partikeln är en elektron. (4p)

b) I vilken eller vilka punkter i lådan är sannolikheten störst respektive minst att finna elektronen i de två tillstånden? (2p)

c) Samma uppgift som i a) om partikeln är en proton. (2p)

4.
Ange för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Rätt svar ger +1p, fel svar ger -1p, och inget svar ger 0p. Uppgiften kan ge mellan 0 och 6p (dvs den ger inte minuspoäng).

a) En proton och en elektron med samma rörelsemängd har samma våglängd.

b) En proton och en elektron som rör sig med samma hastighet har samma våglängd.

c) En proton instängd i en låda med sidan L befinner sig i den 40:e energinivån. Där har den högre energi än en elektron i grundtillståndet i en likadan låda.

d) En stråle av bosoner delar upp sig i ett jämnt antal strålar om den leds genom en Stern-Gerlach apparat.

e) I ett stationärt tillstånd har sannolikhetsamplituden inget tidsberoende.

f) Ett stationärt tillstånd har en bestämd energi.

5.
I ett experiment skjuts elektroner från en källa *S* och registreras i en detektor *D*. Mellan *S* och *D* finns två skärmar som elektronerna måste passera – skärmen närmast *S* har två hål medan den närmast *D* har tre hål. Ge ett uttryck för sannolikheten (baserat på amplituder för de olika vägarna) att observera en elektron i detektorn om: (4p)

a) inget av hålen observeras

b) ett av de tre hålen i skärmen närmast D observeras (så att man kan avgöra om elektronen passerat detta hål eller ej).

6.
Två partiklar a och b sprids till tillstånden 1 och 2 så att en partikel hamnar i vardera tillståndet. Vi antar att spridningsprocessen inte påverkar partiklarnas spinn. Ge ett uttryck för *sannolikheten* för denna process (uttryckt i enpartikel amplituderna $\langle 1|a\rangle$, $\langle 2|a\rangle, \langle 1|b\rangle$ och $\langle 2|b\rangle$) om

a) partiklarna är olika (1p)
b) partiklarna är identiska bosoner (1p)
c) partiklarna är elektroner med samma spinnprojektion (1p)
d) partiklarna är elektroner med olika spinnprojektion (1p)

7.
Antag att vi har ett stort antal partiklar med spinn s = 3/2 vilket ger fyra bastillstånd (spinnprojektioner)$|+3/2\rangle, |+1/2\rangle, |-1/2\rangle, |-3/2\rangle$ svarande mot mätvärdena $\frac{3}{2}\hbar, \frac{1}{2}\hbar, -\frac{1}{2}\hbar$ och $-\frac{3}{2}\hbar$. Partiklarna är alla preparerade i samma tillstånd som ges av

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|+3/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|+1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-3/2\rangle$$

a) Beräkna $\langle\Psi|\Psi\rangle$ och normera vågfunktionen. (1p)
b) Beräkna medelvärdet av spinnets projektion för partiklarna. (1p)
c) Beräkna hur stor andel av partiklarna som passerar två Stern-Gerlach apparater där den första bara släpper igenom $\left|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\right|+1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-3/2\rangle$ och den andra bara släpper igenom $\left|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\right|+1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-1/2\rangle$ (2p)

8.
Antag att en ammoniakmolekyl befinner sig i tillståndet $|2\rangle$ vid tiden $t = 0$ (se formelsamling). Efter hur lång tid befinner sig molekylen i stället i tillståndet $|1\rangle$? ($|2\rangle$ och $|1\rangle$ är tillstånd där kvävemolekylen har en fix position relativt väteatomerna). (2p)

Liten Formelsamling

Partiklar – vågor

$E = \hbar\omega \qquad \omega = 2\pi\nu$

$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \qquad k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$

Kvantformalism

$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$

$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle C_i$

$\sum_i |C_i|^2 = 1$

$\langle\phi|\chi\rangle = \langle\chi|\phi\rangle^*$

$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$ (eller $\mathbb{I}$)

$\langle\chi|A|\phi\rangle = \sum_{i,j} \langle\chi|i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\phi\rangle$

Spinn 1/2

$$|+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\, |+\rangle_x \; + \; |-\rangle_x \,\right)$$

$$|-\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\, -\,|+\rangle_x \; + \; |-\rangle_x \,\right)$$

där $|+\rangle_z$ betecknar spinn upp tillståndet m a p z-axeln, etc.

Tidsutveckling

$$i\hbar\frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}C_j(t)$$

Specialfall:

Två bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$|\Phi\rangle_t = C_1(t)|1\rangle \; + \; C_2(t)|2\rangle$

$$C_1(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$|I\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\, |1\rangle \; - \; |2\rangle \,\right) \qquad$ energi $E_0 + A$

$|II\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\, |1\rangle \; + \; |2\rangle \,\right) \qquad$ energi $E_0 - A$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi(x,t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\psi_E(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } \ 0 \le x \le L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\ , \quad e = 1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

$$m_{\text{proton}} = m_{\text{neutron}} = 1,67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Trigonometriska funktioner

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\sin^2(\tfrac{\alpha}{2}) = \tfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)$$

Lösningsförslag 2015-03-03

1 a) Laser. Viktigt få med att fotoner är bosoner som ~~[illegible]~~ gärna alla är i samma tillstånd

b) Periodiska systemet. Viktigt få med skalstrukturen som kommer av att elektronerna är fermioner där alla måste vara i olika tillstånd

2. a) $\underset{S}{\begin{Bmatrix} +1 \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}} \underset{T}{\begin{Bmatrix} +1 \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}} \underset{S}{\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}}$ $\langle +S|0T\rangle\langle 0T|-S\rangle + \langle +S|-T\rangle\langle -T|-S\rangle$

b) $\underset{S}{\begin{Bmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}} \underset{T}{\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}} \underset{S}{\begin{Bmatrix} +1 \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}}$ Eftersom T-apparaten har alla vägar öppna kan den ersättas med en $\mathbb{1}$·operator och $\langle -S|0S\rangle = 0$

3. a) $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} \cdot e^{-iE_1 t/\hbar}$ för $0 \le x \le L = 7 \cdot 10^{-10}$ m

$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L} e^{-iE_2 t/\hbar}$ — " —

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2 \cdot 1^2}{2 m_e L^2} = \frac{(1.05 \cdot 10^{-34})^2 \pi^2}{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot (7 \cdot 10^{-10})^2} = 0{,}012 \cdot \frac{10^{-68}}{10^{-51}} = 1.2 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

$$E_2 = 4 \cdot E_1 = 4.8 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

b) $|\psi_1(x)|^2$ har max för $x = \frac{L}{2}$ och min $(|\psi_1(x)|^2 = 0)$ för $x = 0, L$

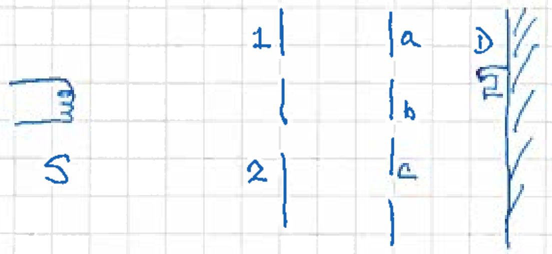
$|\psi_2(x)|^2$ har max för $x = \frac{L}{4}, \frac{3L}{4}$ och min för $x = 0, \frac{L}{2}, L$

c) Vågfunktionerna för protonen är desamma som för elektronen men energin ges av $E_1^p = \frac{m_e}{m_p} E_1^{\text{elektron}} =$

$$= \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-19} = 6.5 \cdot 10^{-23}\ \text{J} \quad ; \quad E_2^p = 4 \cdot E_1^p$$

4. a) Sant b) Falskt c) Falskt d) Falskt e) Falskt f) Sant

5.



a) Om inget av hålen observeras summeras alla amplituder

$$P(S \to D) = \big| \langle D|a\rangle\langle a|1\rangle\langle 1|S\rangle + \langle D|a\rangle\langle a|2\rangle\langle 2|S\rangle + \langle D|b\rangle\langle b|1\rangle\langle 1|S\rangle + \langle D|b\rangle\langle b|2\rangle\langle 2|S\rangle + \langle D|c\rangle\langle c|1\rangle\langle 1|S\rangle + \langle D|c\rangle\langle c|2\rangle\langle 2|S\rangle \big|^2$$

b) Antag att vi detekterar i b:

$$P(S \to D) = \big| \langle D|b\rangle\langle b|1\rangle\langle 1|S\rangle + \langle D|b\rangle\langle b|2\rangle\langle 2|S\rangle \big|^2 + \big| \langle D|a\rangle\langle a|1\rangle\langle 1|S\rangle + \langle D|a\rangle\langle a|2\rangle\langle 2|S\rangle + \langle D|c\rangle\langle c|1\rangle\langle 1|S\rangle + \langle D|c\rangle\langle c|2\rangle\langle 2|S\rangle \big|^2$$

6. a) $|\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle|^2 + |\langle 1|b\rangle\langle 2|a\rangle|^2$

b) $|\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle + \langle 1|b\rangle\langle 2|a\rangle|^2$

c) $|\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle - \langle 1|b\rangle\langle 2|a\rangle|^2$

d) $|\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle|^2 + |\langle 1|b\rangle\langle 2|a\rangle|^2$

7. a) $\langle \psi|\psi\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \longrightarrow$ Normering: $\frac{2}{\sqrt{5}}$

Normerad $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|+3/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}|+1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}|-3/2\rangle$

b) $\langle S_z\rangle = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\hbar\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\hbar\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{3}{2}\hbar\right) = -\frac{1}{10}\hbar$

c) $|\langle \Omega|\Phi\rangle\langle \Phi|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right|^2 = \frac{1}{5} = 20\%$

OBS! $\langle \Omega|\Omega\rangle = \langle \Phi|\Phi\rangle = 1$

8. Vi har att

$$C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 + A)t}$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 + A)t}$$

$t = 0$

$$C_2(0) = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = 1$$

$$C_1(0) = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 0$$

$$C_1(0) + C_2(0) \Rightarrow a = 1$$

$$C_1(0) - C_2(0) \Rightarrow b = -1$$

Sök t så att $|C_1(t)|^2 = 1$:

$$1 = \left| \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \left\{ e^{\frac{i}{\hbar}At} - e^{-\frac{i}{\hbar}At} \right\} \right|^2 = \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}At} - e^{\frac{i}{\hbar}At}\right)\left(e^{\frac{i}{\hbar}At} - e^{-\frac{i}{\hbar}At}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - e^{\frac{2iAt}{\hbar}} - e^{-\frac{2iAt}{\hbar}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{e^{\frac{2iAt}{\hbar}} + e^{-\frac{2iAt}{\hbar}}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2At}{\hbar}\right)$$

$$\therefore \cos\left(\frac{2At}{\hbar}\right) = -1 \Rightarrow \frac{2At}{\hbar} = (2n+1)\pi \Rightarrow \underline{\underline{t = (2n+1)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\hbar}{A}}}$$